MIMS Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 22 (2), 2022, 161 – 176
eISSN 2722-9886 pISSN 1411-6669
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Penerapan algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper pada pemrograman fraksional linear di UD Bintang Furniture

(Application of Dinkelbach's algorithm and Charnes Cooper's transformation in linear fractional programming problems in UD Bintang Furniture)

Evira Dian Safitri, M. Wakhid Musthofa*

Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
*korespondensi: muhammad.musthofa@uin-suka.ac.id

Received: 13-06-2022, accepted: 22-09-2022

Abstract

Linear fractional programming is a special case of non-linear programming with an objective function consisting of the ratio of two linear functions. The problem can be solved using the Dinkelbach algorithm and the Charnes Cooper transformation. The essence of these two methods is to convert the problem of linear fractional programming into a linear programming problem which then provides an optimal value of each variable in its objective function. In this study, we will solve the problem of linear fractional programming at UD Bintang Furniture, that is to determine the optimal value of the comparison between profits and production costs of the company. The results show that the Dinkelbach algorithm method requires more iterations than Charnes Cooper's transformation. Despite this, both methods produce the same optimal value.

Keywords: Linear fractional programming, Dinkelbach algorithm, Charnes Cooper transformation.

MSC2020: 90C32

1. Pendahuluan

Manusia sering berpikir untuk mendapatkan hasil yang optimal dengan sumber daya yang terbatas. Merespon hal tersebut, optimisasi muncul sebagai sebuah disiplin ilmu yang bertujuan untuk memberikan solusi terbaik/optimal atas beberapa pilihan solusi yang memungkinkan berdasarkan tujuan yang akan dicapai serta dengan mempertimbangkan kendala/keterbatasan yang ada. Banyak permasalahan yang memanfaatkan teori optimisasi dalam penyelesaiannya, diantaranya adalah permasalahan pada bidang pertanian, transportasi, perbankan, investasi, dan lain-lain ([1], [2], [3]).

Berdasarkan fungsinya optimisasi dibedakan menjadi dua yaitu linear dan non-linear. Optimisasi berbentuk linear adalah suatu permasalahan memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan yang berbentuk linear dengan kendala-kendala yang dinyatakan dalam permasalahan linear atau pertidaksamaan linear [4]. Metode titik interior merupakan metode dengan waktu polinomial dalam menyelesaikan masalah optimisasi berbentuk linear [4]. Metode lainnya yang menggunakan permasalahan optimisasi berbentuk linear yaitu dengan menggunakan linear programming [5].

Permasalahan optimisasi yang berbentuk non-linear adalah pemrograman fraksional linear (PFL). Pemrograman fraksional linear merupakan masalah optimisasi non-linear dengan fungsi objektif berbentuk rasio dari dua fungsi linear (dalam bentuk pecahan) dan dengan kendala yang juga dalam bentuk fungsi linear [6]. Masalah PFL dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai metode, diantaranya adalah algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper. Kedua metode ini memiliki kemiripan konsep dalam menyelesaikan masalah PFL, yaitu keduanya mengubah PFL ke dalam bentuk *linear programming* (LP) terlebih dahulu yang kemudian dilanjutkan dengan mencari solusi optimalnya.

Perbedaan algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper terletak pada proses mengubah masalah PFL ke bentuk LP. Algoritma Dinkelbach mengubah masalah PFL ke bentuk LP dengan mendefinisikan suatu fungsi baru pada fungsi objektifnya yang akan menghasilkan fungsi objektif yang linear namun tetap dengan kendala yang serupa. Disisi lain, transformasi Charnes Cooper mengubah PFL menjadi LP dengan mendefinisikan variabel baru yang akan mengubah variabel pada fungsi objektif maupun fungsi kendala menjadi linear [7].

Selain kedua metode tersebut, terdapat pula metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah PFL. Diantaranya adalah metode Criss Cross yang diperkenalkan oleh Zionts ([8], [9]). Metode ini mendasarkan prinsip kerjanya dari metode simpleks dalam LP, yaitu mencari salah satu penyelesaian fisibel yang ada kemudian melakukan serangkaian iterasi untuk mendapatkan penyelesaian optimalnya. Metode lainnya adalah metode koefisien interval ([10], [11]) yang langkah awalnya memanfaatkan hasil transformasi yang diperoleh melalui metode Charnes Cooper. Metode lainnya yang mendasarkan pada transformasi adalah metode transformasi aljabar [12], dan metode Hasan & Acharjee ([13], [14]). Sebagaimana algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper, persamaan prinsip kerja dari semua metode di atas adalah semuanya mengubah masalah PFL menjadi masalah LP sehingga memudahkan untuk dicari solusi optimalnya.

Artikel ini bertujuan untuk menerapkan algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper pada masalah PFL pada UD Bintang Furniture. Perusahaan ini bergerak di bidang furniture atau mebel yang memproduksi lemari berbahan dasar kayu yang terletak di kawasan Cibubur, Jakarta Timur. Masalah PFL yang dimiliki oleh UD Bintang Furniture adalah perusahaan ini ingin memaksimalkan produksinya dalam bentuk mencari rasio keuntungan dan biaya total produksi berdasarkan keterbatasan sumber daya bahan baku dan waktu produksi yang tersedia [15].

Selain untuk mendapatkan solusi optimal dari masalah PFL pada UD Bintang Furniture, dalam artikel ini juga akan dianalisis perbedaan iterasi yang dihasilkan metode algoritma Dinkelbach dan transportasi Charnes Cooper dalam menyelesaikan masalah PFL menggunakan cara numerik. Melalui analisis ini akan diketahui metode mana yang memberikan iterasi lebih pendek dalam menyelesaikan masalah PFL sehingga dapat disimpulkan memiliki efisiensi yang lebih baik.

2. Metodologi

2.1. Pemrograman Fraksional Linear

Diberikan suatu daerah fisibel yang berupa himpunan kompak dan konveks, serta himpunan tak kosong dengan kendala berbentuk persamaan maupun pertidaksamaan. Masalah pemrograman fraksional linear (PFL) yang didefinisikan dalam daerah fisibel tersebut mempunyai bentuk umum sebagai berikut [16].

Fungsi objektif: memaksimumkan

$$Q(x)=\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}, D(x)\neq 0 \tag{1}$$

terhadap kendala

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i=1,2,3,\dots,m_1,\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i=m_1+1, m_1+2,\dots,m_2,\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=m_2+1, m_2+2,\dots,m,\\ x_j\ge 0, j=1,2,\dots,n,\\ m_1\le m_2\le m, n_1\le n,\\ \text{untuk setiap } x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in S,\end{gathered} \tag{2}$$

dengan *Q(x)*: kriteria pengambilan keputusan pada fungsi objektif yang berupa nilai scalar; *P(x)*: fungsi objektif yang mewakili pembilang (*numerator*); *D(x)*: fungsi objektif yang mewakili penyebut (*denominator*); p_j: koefisien pada pembilang fungsi objektif; p_0: konstanta pada pembilang fungsi objektif; d_j: koefisien pada penyebut fungsi objektif; d_0: konstanta pada penyebut fungsi objektif; x_j: variabel pengambilan keputusan yang akan ditentukan; a_{ij}: konstanta pada kendala ke-*i* dan variabel ke-*j*; dan b_i: masukan (input) yang membatasi aktivitas terkait usaha mengoptimalkan fungsi objektif.

2.2 Metode Algoritma Dinkelbach

Algoritma Dinkelbach bekerja dengan cara mendefinisikan fungsi baru pada fungsi objektif yang akan menghasilkan fungsi objektif yang linear dengan kendala yang serupa. Didefinisikan suatu fungsi sebagai berikut [7]

$$Z = F(\lambda) = \max_{x \in S}\{P(x) - \lambda D(x)\}, \lambda \in R \tag{3}$$

dengan S menyatakan himpunan fisibel dari masalah PFL (1,2) dan λ menyatakan parameter untuk menentukan solusi optimal pada algoritma Dinkelbach.
Kendala untuk fungsi objektif (3) di atas adalah

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\,, i = 1,2,3, \dots, m_1, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i\,, i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \\
x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n, \\
m_1 \leq m_2 \leq m, n_1 \leq n.
\end{gathered} \tag{4}$$

Asumsikan p_0 atau d_0 ada. Langkah kerja algoritma Dinkelbach dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Langkah awal

   Ambil $x^{(0)} \in S$, kemudian hitung $\lambda^{(0)} = \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$.
2. Tentukan $F(\lambda^i) = \max_{x \in S}\{P(x) - \lambda^i D(x)\}$ dengan kendala (4) dan tentukan solusi optimal PFL (3,4) menggunakan *software* WinQSB.
3. Cek kriteria pemberhentian

   Jika $F(\lambda^i) = \max_{x \in S}\{P(x^{(i)}) - \lambda^i D(x^{(i)})\} = 0$ atau $-1 < F(\lambda^i) < 1$ maka $x^* = x^{(i)}$ adalah solusi optimal.
4. Iterasi

   Jika langkah 3 tidak dipenuhi maka ambil $x \in R$ yang lain sehingga $\lambda^{(i)} = \frac{P(x^{(i)})}{D(x^{(i)})}$ dan lanjut ke langkah 2.

2.3 Metode Transformasi Charnes Cooper

Berbeda dengan algoritma Dinkelbach, transformasi Charnes Cooper bekerja dengan cara mengganti variabel pada masalah PFL (1,2) menjadi variabel baru pada fungsi objektif maupun fungsi kendala [17]. Didefinisikan sebuah variabel baru yaitu t_j dengan $t_j =$

$\frac{x_j}{D(x)}, j = 1,2,\dots,n$ dan t_0 dengan $t_0 = \frac{1}{D(x)}$ dan $D(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0$. Sehingga dengan menggunakan $t_j = \frac{x_j}{D(x)}$ dengan $j = 1,2,\dots,n$ maka $\frac{1}{D(x)} = \frac{t_j}{x_j}$ dan $P(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + p_0 = \sum_{j=0}^{n} p_j x_j$ sehingga fungsi tujuan/fungsi objektifnya menjadi:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = P(x).\frac{1}{D(x)}$$
$$= \sum_{j=0}^{n} p_j x_j \,.\, (\frac{t_j}{x_j})$$
$$= \sum_{j=0}^{n} p_j t_j.$$

Jika $L(t) = \frac{P(x)}{D(x)} = \sum_{j=0}^{n} p_j x_j$ maka $L(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j x_j$. (5)

Selanjutnya untuk fungsi kendala akan dikalikan masing-masing dengan $\frac{1}{D(x)} = \frac{t_j}{x_j}$ dan $t_0 = \frac{1}{D(x)}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,3,\dots,m_1,$$
$$-b_i.\frac{1}{D(x)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,.\frac{1}{D(x)} \le 0,$$

menjadi $-b_i.t_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \le 0,\ i = 1,2,\dots,m_1,$ (6)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = 1,2,3,\dots,m_1,$$
$$-b_i.\frac{1}{D(x)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,.\frac{1}{D(x)} \ge 0,$$

menjadi $-b_i.t_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \ge 0,\ i = m_1 + 1, m_1 + 2,\dots,m_2,$ (7)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,3,\dots,m_1,$$
$$-b_i.\frac{1}{D(x)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,.\frac{1}{D(x)} = 0,$$

menjadi $-b_i.t_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j = 0,\ i = m_2 + 1, m_2 + 2,\dots,m,$ (8)

$$t_j \ge 0, j = 0,1,2,\dots,n,$$
$$m_1 \le m_2 \le m, n_1 \le n.$$

Selain itu, terdapat kendala tambahan yang merupakan hubungan antara variabel x_j dan t_j yaitu dengan mengalikan $D(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0$ dengan $\frac{1}{D(x)} = \frac{t_j}{x_j}$, sehingga menjadi:

$$D(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0$$
$$= \sum_{j=0}^{n} d_j x_j$$
$$D(x).\frac{1}{D(x)} = \sum_{j=0}^{n} d_j x_j \cdot \frac{1}{D(x)}$$
$$1 = \sum_{j=0}^{n} d_j x_j \cdot \frac{t_j}{x_j}$$
$$\sum_{j=0}^{n} d_j t_j = 1. \tag{9}$$

Langkah kerja hasil transformasi Charnes Cooper dijelaskan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Perubahan masalah PFL menjadi LP pada transformasi Carnes Cooper

Masalah PFL awal dengan variabel x	Masalah LP setelah ditransformasikan dengan variabel baru t
Fungsi Objektif Maks $Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0},$ $D(x) \neq 0$ Kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1,2,3, \dots, m_1$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m$ $x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$ $m_1 \leq m_2 \leq m, n_1 \leq n.$	Fungsi Objektif Maks $L(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j x_j$ Kendala $-b_i t_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \leq 0, i = 1,2, \dots, m_1$ $-b_i t_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \geq 0, i$ $= m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$ $-b_i t_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j = 0, i$ $= m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m$ $\sum_{j=0}^{n} d_j t_j = 1$ $t_j \geq 0, j = 0,1,2, \dots, n$ $m_1 \leq m_2 \leq m, n_1 \leq n.$

Penyelesaian masalah LP memberikan nilai optimal untuk variabel *t*. Sehingga untuk mendapatkan nilai optimal variabel *x* dari masalah PFL (1,2) digunakan rumus $x_j = \frac{t_j}{t_0}$.

3. Hasil dan Pembahasan

UD Bintang Furniture merupakan perusahaan *furniture* atau mebel yang berlokasi di Cibubur, Jakarta Timur. Perusahaan ini memproduksi lemari menggunakan bahan dasar kayu dengan spesifikasi produk yang dihasilkan berupa 5 jenis lemari, yaitu lemari 2 pintu lebar, lemari 2 pintu ramping, lemari 3 tingkat terbuka lebar, lemari 3 tingkat terbuka ramping dan lemari 1 tingkat terbuka. Berikut data biaya dan harga penjualan pada UD Bintang Furniture.

Tabel 2. Data biaya dan harga penjualan UD Bintang Furniture

Jenis Lemari	Lemari 2 pintu lebar	Lemari 2 pintu ramping	Lemari 3 tingkat terbuka lebar	Lemari 3 tingkat terbuka ramping	Lemari 1 tingkat terbuka
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Biaya produksi tiap unit (ribu)	450	375	285	250	220
Biaya penyelesaian produksi (ribu)	125	125	85	85	50
Biaya cetak material (ribu)	150	125	100	85	35
Biaya pengemasan tiap unit (ribu)	30	30	30	30	30
Biaya operasional tiap unit (ribu)	100	90	100	90	80
Biaya total (ribu)	855	745	600	540	415
Harga penjualan tiap unit (ribu)	2100	1800	1350	1150	950

Proses produksi pada perusahaan UD Bintang Furniture mengalami kendala terkait dengan penyimpanan bahan baku dan waktu produksi. Gudang perusahaan yang digunakan untuk menyimpan bahan baku hanya dapat menampung paling banyak 375m^2 kayu. Sedangkan terkait dengan waktu produksi, waktu pengerjaan tiap produk mebel tersebut untuk jangka waktu sebulan (4 minggu) dibatasi dengan waktu kerja 8 jam kerja perhari dan 6 hari kerja per minggu. Data keterbatasan bahan baku serta waktu produksi pada UD Bintang Furniture disajikan dalam Tabel 3 dan 4.

Tabel 3. Data bahan baku kayu

Jenis Lemari	Lemari 2 pintu lebar	Lemari 2 pintu ramping	Lemari 3 tingkat terbuka lebar	Lemari 3 tingkat terbuka ramping	Lemari 1 tingkat terbuka
Bahan Baku (m^2)	1.15	0.98	0.56	0.40	0.16

Tabel 4. Data waktu produksi

Jenis Lemari	Lemari 2 pintu lebar	Lemari 2 pintu ramping	Lemari 3 tingkat terbuka lebar	Lemari 3 tingkat terbuka ramping	Lemari 1 tingkat terbuka
Waktu untuk memproduksi 1 unit mebel (jam)	3.25	2.82	1.56	1.23	0.85

Selain itu, perusahaan juga harus membayar pajak sebagai kewajiban terhadap pemerintah sebesar 0,5% per tahun. Setiap tahun perusahaan mencapai penghasilan kotor yang relatif tetap yaitu sebesar Rp. 480.000.000 per tahun. Berdasarkan data tersebut, berikut akan dibentuk masalah PFL pada UD Bintang Furniture dengan tujuan memaksimalkan keuntungan sebagai berikut.

Didefinisikan variabel-variabel sebagai berikut:

Z=Q(x) : fungsi objektif untuk memaksimalkan keuntungan terhadap biaya dan pajak,
P(x) : keuntungan perusahaan tiap produk mebel,
D(x) : biaya total produksi ditambah dengan pajak,
x_1 : lemari 2 pintu lebar,
x_2 : lemari 2 pintu ramping,
x_3 : lemari 3 tingkat terbuka lebar,
x_4 : lemari 3 tingkat terbuka ramping, dan
x_5 : lemari 1 tingkat terbuka.

a. Menentukan fungsi objektif.
   Fungsi objektif dibentuk berdasarkan rasio antara keuntungan yang diperoleh perusahaan dengan total biaya produksi dan pajak yang harus dibayarkan. Detail pembentukan fungsi objektif dijelaskan sebagai berikut.
   Keuntungan = harga jual – biaya produksi

$$= 2100x_1 + 1800x_2 + 1350x_3 + 1150x_4 + 950x_5 - (855x_1 + 745x_2 + 600x_3 + 540x_4 + 415x_5)$$

$$= 1245x_1 + 1055x_2 + 750x_3 + 610x_4 + 535x_5.$$

   Selanjutnya, dengan mengasumsikan penghasilan kotor perusahaan setiap tahunnya sebesar Rp 480.000.000, maka berdasarkan PP Nomor 23 Tahun 2018 pajak yang dikeluarkan oleh UD Bintang Furniture adalah sebagai berikut.
   Pajak (ribu) = (Penghasilan kotor per tahun: 12) × 0.5%
   = (480.000:12) × 0.5%
   = 40.000 × 0.5%
   = 200.
   Sehingga dapat dibentuk fungsi objektif sebagai berikut

$$\text{Maksimumkan } Z = \frac{\text{keuntungan}}{\text{biaya} + \text{pajak}}$$

$$Z = Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$$
$$= \frac{1245x_1 + 1055x_2 + 750x_3 + 610x_4 + 535x_5}{855x_1 + 745x_2 + 600x_3 + 540x_4 + 415x_5 + 200}.$$

b. Menentukan kendala 1
Kendala 1 terkait dengan keterbatasan bahan baku. Berdasarkan Tabel 3, fungsi kendala yang terkait dengan keterbatasan bahan baku dapat ditulis sebagai berikut:
$$1.15x_1 + 0.98x_2 + 0.56x_3 + 0.40x_4 + 0.16x_5 \leq 376.$$
c. Menentukan kendala 2
Kendala 2 terkait dengan waktu produksi tiap produk mebel. Berdasarkan Tabel 4, kendala yang terkait dengan waktu produksi dapat ditulis sebagai berikut:
$$3.25x_1 + 2.82x_2 + 1.56x_3 + 1.23x_4 + 0.85x_5 \leq 192.$$
d. Batasan variabel
Batasan variabel menyatakan tiap produk mebel yang dibuat oleh perusahaan mebel, sehingga batasan variabelnya adalah
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Berdasarkan fungsi objektif dan fungsi kendala yang telah diperoleh bentuk PFL pada perusahaan mebel UD Bintang Furniture dapat ditulis sebagai berikut.
Fungsi objektif

Maksimumkan $$Z = \frac{1245x_1+1055x_2+750x_3+610x_4+535x_5}{855x_1+745x_2+600x_3+540x_4+415x_5+200}$$

dengan kendala
$$1.15x_1 + 0.98x_2 + 0.56x_3 + 0.40x_4 + 0.16x_5 \leq 376.$$
$$3.25x_1 + 2.82x_2 + 1.56x_3 + 1.23x_4 + 0.85x_5 \leq 192.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Selanjutnya masalah PFL pada UD Bintang Furniture tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper.

3.1 Penyelesaian Menggunakan Algoritma Dinkelbach

Langkah-langkah penerapan algoritma Dinkelbach dalam menyelesaikan permasalahan PFL pada perusahaan mebel UD Bintang Furniture dijelaskan sebagai berikut.

1) Iterasi pertama menggunakan nilai $x = 0$ sehingga $x^{(0)} = (0,0,0,0,0)$

$$\lambda^{(0)} = \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})} = \frac{1245(0) + 1055(0) + 750(0) + 610(0) + 535(0)}{855(0) + 745(0) + 600(0) + 540(0) + 415(0) + 200} = 0.$$

$$F(\lambda^{(0)}) = \max_{x \in S}\{1245x_1 + 1055x_2 + 750x_3 + 610x_4 + 535x_5 - 0$$
$$(855x_1 + 745x_2 + 600x_3 + 540x_4 + 415x_5 + 200)\}$$
$$= \max_{x \in S}\{1245x_1 + 1055x_2 + 750x_3 + 610x_4 + 535x_5\}.$$

Sehingga bentuk LP nya menjadi:
Fungsi objektif

$$\max_{x \in S} 1245x_1 + 1055x_2 + 750x_3 + 610x_4 + 535x_5,$$

dengan kendala

$$1.15x_1 + 0.98x_2 + 0.56x_3 + 0.40x_4 + 0.16x_5 \leq 376,$$
$$3.25x_1 + 2.82x_2 + 1.56x_3 + 1.23x_4 + 0.85x_5 \leq 192,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Dengan menggunakan *software* WinQSB diperoleh hasil perhitungan untuk $x^{(0)} = (0,0,0,0,0)$ yaitu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,0,225)$ dengan solusi optimalnya adalah 120847.0000. Karena solusi optimal tidak sesuai dengan syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach yaitu nilai optimal harus terletak pada $-1 < F(\lambda^i) < 1$ maka dilanjut pada iterasi selanjutnya.

2) Iterasi selanjutnya mencoba menggunakan bilangan bulat positif yaitu x=1,2,3,4,5, … ,1000. Maka diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut.

x=1 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 10393.4900.
x=2 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 8453.1730.
x=3 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 7779.6330.
x=4 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 7437.6090.
x=5 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 7230.6830.

seterusnya sampai pada

x=1000 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 6394.1140.

Dengan menggunakan bilangan bulat positif 1 sampai 1000 bahkan lebih nilainya tetap tidak memenuhi syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach yaitu nilai optimal harus terletak pada $-1 < F(\lambda^i) < 1$ maka dilanjut pada iterasi selanjutnya.

3) Iterasi selanjutnya mencoba menggunakan bilangan bulat negatif yaitu x = -1, -2, -3, -4, -5, … ,-1000. Maka diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut.

x = -1 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 1844.2800.
x = -2 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 4191.4640.
x = -3 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 4940.0810.
x = -4 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 5308.3610.

x = -5 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 5527.4380.

seterusnya sampai pada

x =-1000 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 6394.1140.

Dengan menggunakan bilangan bulat negatif -1 sampai -1000 bahkan lebih nilainya tetap tidak memenuhi syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach yaitu nilai optimal harus terletak pada $-1 < F(\lambda^i) < 1$ maka dilanjut pada iterasi selanjutnya.

4) Iterasi selanjutnya yaitu bilangan di antara 0 dan -1, karena pada solusi optimal 0 dan (-1) terdapat ketidakkonsistenan nilai. Untuk itu diambil nilai x = -0.3, -0.5, -0.7, -0.8 dan berikut hasil perhitungan dengan WinQSB:

x = -0.3 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 0.
x = -0.5 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 0.
x = -0.7 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 0.
x = -0.8 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 610.0888.

Dengan menggunakan nilai x di antara 0 dan -1 nilainya tetap tidak memenuhi syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach yaitu nilai optimal harus terletak pada $-1 < F(\lambda^i) < 1$ maka dilanjut pada iterasi selanjutnya.

5) Iterasi selanjutnya yaitu bilangan di antara (-0.7) dan (-0.8), karena memiliki solusi optimal yang berbeda. Untuk itu diambil nilai x = -0.72, -0.73, -0.75 dan berikut hasil perhitungan dengan WinQSB:

x =-0.72 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 0.
x = -0.73 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 189.1965.
x = -0.75 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 482.6032.

Dengan menggunakan nilai x di antara (-0.7) dan (-0.8) nilainya tetap tidak memenuhi syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach yaitu nilai optimal harus terletak pada $-1 < F(\lambda^i) < 1$ maka dilanjut pada iterasi selanjutnya.

6) Iterasi selanjutnya yaitu bilangan di antara (-0.72) dan (-0.73), karena memiliki solusi optimal yang berbeda. Untuk itu diambil nilai x = -0.729, -0.7295, -0.7297 dan berikut hasil perhitungan dengan WinQSB:

x = -0.729 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan solusi optimalnya 0.
x = -0.7295 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0)$ dengan

solusi optimalnya 0.

x = -0.7297 diperoleh nilai $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (59,0,0,0,0)$ dengan solusi optimalnya 0.2844.

Iterasi nomor 6 ini terdapat nilai x yang memenuhi syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach yaitu nilai optimal harus terletak pada $-1 < F(\lambda^i) < 1$. Oleh karena itu, x = -0.7297 dengan solusi optimal 0.2844 serta $x_1 = 59, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ memenuhi syarat pemberhentian algoritma Dinkelbach. Maka solusi optimal untuk mencari *ratio* keuntungan dengan biaya produksi yaitu:

$$Q(x) = \frac{1245(59) + 1055(0) + 750(0) + 610(0) + 535(0)}{855(59) + 745(0) + 600(0) + 540(0) + 415(0) + 200}$$
$$= \frac{73455}{50645}$$
$$= 1.45038997.$$

3.2 Penyelesaian Menggunakan Transformasi Charnes Cooper

Langkah pertama penyelesaian masalah PFL dengan Transformasi Charnes Cooper adalah mengubah PFL ke dalam bentuk LP, yaitu mengubah variabel $x_j, j = 1,2,3,4,5$ menjadi variabel $t_j, j = 1,2,3,4,5$. Dengan perubahan variabel ini bentuk PFL akan menjadi LP sebagai berikut:

Fungsi objektif:

$$\text{Maks } Z = \frac{1245x_1+1055x_2+750x_3+610x_4+535x_5}{855x_1+745x_2+600x_3+540x_4+415x_5+200} \quad (5)$$

diubah bentuknya menjadi

$$\text{Maks } 1245t_1 + 1055t_2 + 750t_3 + 610t_4 + 535t_5$$

Kendala 1:

$$1.15x_1 + 0.98x_2 + 0.56x_3 + 0.40x_4 + 0.16x_5 \leq 376$$

diubah bentuknya menjadi

$$-376t_0 + 1.15t_1 + 0.98t_2 + 0.56t_3 + 0.40t_4 + 0.16t_5 \leq 0.$$

Kendala 2:

$$3.25x_1 + 2.82x_2 + 1.56x_3 + 1.23x_4 + 0.85x_5 \leq 192$$

diubah bentuknya menjadi

$$-192t_0 + 3.25t_1 + 2.82t_2 + 1.56t_3 + 1.23t_4 + 0.85t_5 \leq 0.$$

Kendala baru:

$$\sum_{j=0}^{n} d_j t_j = 1$$

menjadi

$$-200t_0 + 855t_1 + 745t_2 + 600t_3 + 540t_4 + 415t_5 = 1$$

Batasan kendala:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

menjadi

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \geq 0.$$

Sehingga diperoleh bentuk LP baru yaitu:
Fungsi objektif

$$\text{Maks } 1245t_1 + 1055t_2 + 750t_3 + 610t_4 + 535t_5$$

dengan kendala

$$-376t_0 + 1.15t_1 + 0.98t_2 + 0.56t_3 + 0.40t_4 + 0.16t_5 \leq 0.$$
$$-192t_0 + 3.25t_1 + 2.82t_2 + 1.56t_3 + 1.23t_4 + 0.85t_5 \leq 0.$$
$$200t_0 + 855t_1 + 745t_2 + 600t_3 + 540t_4 + 415t_5 = 1$$
$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \geq 0.$$

Bentuk LP dari hasil transformasi Charnes Cooper tersebut kemudian dicari penyelesaiannya dengan menggunakan *software* WinQSB yang menggunakan metode simpleks. Output yang dihasilkan adalah:

1. Iterasi 1 belum optimal dengan kolom kunci di t_1 dan baris kunci di s_1.
2. Iterasi 2 belum optimal dengan kolom kunci di t_0 dan baris kunci di s_2.
3. Iterasi 3 belum optimal dengan kolom kunci di t_4 dan baris kunci di t_1.
4. Iterasi 4 sudah optimal sehingga perhitungan iterasi dihentikan. Nilai pada baris z sudah tidak ada yang negatif serta output yang dihasilkan yaitu variabel dengan $t_0 = 0.0000197197, t_1 = 0.0011649780, t_2 = 0, t_3 = 0, t_4 = 0, dan\ t_5 = 0$. Selanjutnya, nilai x_j dicari dengan menggunakan nilai variabel t_j yang telah diperolah

$$x_1 = \frac{t_1}{t_0} = \frac{0.0011649780}{0.0000197197} = 59.0769,$$
$$x_2 = \frac{t_2}{t_0} = \frac{0}{0.0000197197} = 0,$$
$$x_3 = \frac{t_3}{t_0} = \frac{0}{0.0000197197} = 0,$$
$$x_4 = \frac{t_4}{t_0} = \frac{0}{0.0000197197} = 0,$$
$$x_5 = \frac{t_5}{t_0} = \frac{0}{0.0000197197} = 0.$$

Substitusikan nilai-nilai x_j di atas ke dalam fungsi objektif (5) diperoleh

$$Q(x) = \frac{1245(59) + 1055(0) + 750(0) + 610(0) + 535(0)}{855(59) + 745(0) + 600(0) + 540(0) + 415(0) + 200}$$
$$Q(x) = \frac{73455}{50645} = 1.45038997$$

Dengan demikian penggunaan algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper dalam menyelesaikan masalah PFL pada UD Bintang Furniture sama-sama menghasilkan nilai optimal untuk setiap variabel x_j yaitu $x_1 = 59, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Hal ini berarti UD Bintang Furniture harus memproduksi 100% produknya pada lemari 2 pintu lebar sebanyak 59 buah, dan tidak memproduksi lemari jenis lainnya.

Dengan menerapkan kebijakan ini maka UD Bintang Furniture akan memperoleh keuntungan maksimal terhadap total biaya dan pajak sebesar $Q(x) = 1.45038997$. Artinya perusahaan memiliki perbandingan keuntungan dibandingkan dengan total biaya produksi dan pajak sebesar 1,45038997:1 atau 1:0,68. Sehingga misalkan perusahaan mengeluarkan biaya produksi sebesar Rp. 10.000.000,00 maka keuntungan yang akan diperoleh perusahaan sebesar Rp. 10.000.000,00 × 1,45038997 = Rp. 14.503.889,00.

Selain itu, hasil perhitungan juga menunjukkan bahwa dalam menyelesaikan masalah PFL pada UD Bintang Furniture meskipun kedua metode memberikan hasil yang sama, namun metode algoritma Dinkelbach membutuhkan iterasi lebih banyak daripada transformasi Charnes Cooper. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dalam menyelesaikan masalah PFL pada UD Bintang Furniture transformasi Charnes Cooper memiliki efisiensi yang lebih baik daripada algoritma Dinkelbach.

4. Kesimpulan

Penerapan algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper dalam menyelesaikan masalah PFL pada UD Bintang Furniture menghasilkan kebijakan pemfokusan UD Bintang Furniture untuk memproduksi lemari 2 pintu lebar sebanyak 59 buah sepanjang masa produksinya dengan keuntungan maksimal yang akan diperoleh terhadap total biaya dan pajak sebesar 1,45038997. Analisis algoritma terhadap kedua metode menghasilkan kesimpulan bahwa dalam hal ini transformasi Charnes Cooper memiliki efisiensi yang lebih baik daripada algoritma Dinkelbach dikarenakan transformasi Charnes Cooper memiliki iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan algoritma Dinkelbach.

Meskipun algoritma Dinkelbach dan transformasi Charnes Cooper telah mampu menyelesaikan masalah PFL pada UD Bintang Furniture, namun ujicoba penggunaan metode-metode lain yang memberikan efisiensi yang lebih baik masih merupakan suatu masalah terbuka yang memerlukan penelitian lebih lanjut.

Daftar Pustaka

[1] S. Khan, A. Bari, and M.F. Khan, *Linear and Integer Programming*. Inggris: Cambridge Scholars Publishing, 2019.

[2] H. Haris and N.S. Hastuti, “Analisis efisiensi bank umum syariah devisa di indonesia dengan metode data envelopment analysis studi pada Bank Muamalat Indonesia dan Bank Syariah Mandiri,” *Muqtasid J. Ekon. dan Perbank. Syariah*,

vol. 4, no. 1, p. 1, 2013, doi: https://doi.org/10.18326/muqtasid.v4i1.1-25

[3] H. Paramu, H. Sukarno, and A. Hairul, "Analisis efisiensi Bank Syariah dan bank konvensional dengan menggunakan metode data envelpment analysis (DEA)," *J. Manaj. dan Bisnis Indones.*, vol. 3, no. 2, p. 199, 2017, doi: https://doi.org/10.32528/jmbi.v3i2.1206

[4] B.P. Sialalahi, "Kasus-kasus buruk penggunaan metode titik interior pada optimisasi linear," *J. Mat. Integr.*, vol. 10, no. 1, p. 9, 2020, doi: https://doi.org/10.24198/jmi.v10i1.10180

[5] S. Aji, F. Kusmaningrum, and M. Herni, "Optimisasi keuntungan menggunakan linear programming di PT Pertamina Refinery Unit (RU) VI Balongan*," *J. Online Inst. Teknol. Nas. Maret*, vol. 01, no. 04, pp. 2338–5081, 2014, [Online]. Available: https://garuda.kemdikbud.go.id/documents/detail/1182901

[6] A. Pal, S.B. Singh, and K. Deep, "Solution of fractional programming problems using PSO algorithm," in *Proceedings of the 2013 3rd IEEE International Advance Computing Conference, IACC 2013*, 2013, pp. 1060–1064. doi: https://doi.org/10.1109/IAdCC.2013.6514373

[7] F. Hanum, "Pemrograman fraksional linear," *J. Math. Its Appl.*, vol. 7, no. 1, pp. 21–32, 2008, doi: https://doi.org/10.29244/jmap.7.1.21-32

[8] S. Zionts, "The Criss-Cross method for solving linear programming problems," *Manage. Sci.*, vol. 15, no. 7, pp. 426–445, 1969, doi: https://doi.org/10.1287/mnsc.15.7.426

[9] A.I. Wijaya, T. Limansyah, and D. Lesmono, "Penyelesaian linear fractional programming dengan menggunakan metode Criss Cross," in *Proceeding of Seminar Nasional Matematika Universitas Katolik Parahyangan*, 2015, vol. 10, pp. 87–94. [Online]. Available: http://hdl.handle.net/123456789/1672

[10] A.R. Sari, Sunarsih, and Suryoto, "Program fraksional linier dengan koefisien interval," *J. Mat.*, vol. 17, no. 7, pp. 115–120, 2014, [Online]. Available: https://ejournal.undip.ac.id/index.php/matematika/article/view/12280

[11] M.K. Zuhanda and E.S.M. Nababan, "Optimasi program linier pecahan interval," 2013. [Online]. Available: https://docplayer.info/47186537-Optimasi-program-linier-pecahan-dengan-fungsi-tujuan-berkoefisien-interval.html

[12] B. Reynaldo, R. Widyati, and M. Irzal, "Pengembangan program pecahan linier dengan transformasi aljabar," *JMT J. Mat. dan Terap.*, vol. 1, no. 1, pp. 1–9, 2017, doi: https://doi.org/10.21009/jmt.1.1.1

[13] M.B. Hasan and S. Acharjee, "Solving LFP by converting it into a single LP," *Int. J. Oper. Res.*, vol. 8, no. 3, pp. 1–14, 2011, [Online]. Available: http://www.orstw.org.tw/ijor/vol8no3/1-Vol_8, No. 3, pp.1-14.pdf

[14] S. Basriati, E. Safitri, and R. Molina, "Optimalisasi keuntungan pengetaman kayu berkah mandiri dengan program pecahan linier menggunakan metode Hasan-Acharjee," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 2, p. 80, 2020, doi: https://doi.org/10.24014/jsms.v6i2.10551

[15] H. Tannady, "Optimasi produksi meubel menggunakan model pemrograman linear," *Bus. Manag. J.*, vol. 10, no. 1, pp. 1–9, 2017, doi: https://doi.org/10.30813/bmj.v10i1.636

[16] B.A. Ozkok, "An iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 140, Feb. 2020, doi: https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106234

[17] E. Bajalinov, *Linear-fractional programming: theory, methods, applications and software*. Hungaria: Springer Science & Business Media., 2003. [Online]. Available: http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=09XMdgKFV68C&pgis=1