

Spektrum *Laplace* pada graf kincir angin berarah (Q_k^3)

(The Laplacian spectrum of directed windmill graphs Q_k^3)

Melly Amaliyanah, Siti Rahmah Nurshiami*, Triyani

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jenderal Soedirman
Jl. Dr. Soeparno 61 Karangwangkal Purwokerto Utara Banyumas 53123

*korespondensi: siti.nurshiami@unsoed.ac.id

Received: 10-05-2022, accepted: 19-09-2022

Abstract

Suppose that $0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ are eigen values of a Laplacian matrix graph with n vertices and $m(\mu_0), m(\mu_1), \dots, m(\mu_{n-1})$ are the multiplicity of each μ , so the Laplacian spectrum of a graph can be expressed as a matrix $2 \times n$ whose line elements are $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ for the first row, and $m(\mu_0), m(\mu_1), \dots, m(\mu_{n-1})$ for the second row. In this paper, we will discuss Laplacian spectrum of the directed windmill graph (Q_k^3) with $k \geq 1$. The determination of the Laplacian spectrum in this study is to determine the characteristic polynomial of the Laplacian matrix from the directed windmill graph (Q_k^3) with $k \geq 1$.

Keywords: Characteristic polynomial, directed windmill graph, Laplacian matrix, Laplacian spectrum

MSC2020: 05C50

1. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan yang dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Biasanya sebuah graf digambarkan dengan kumpulan simpul-simpul yang dihubungkan oleh sisi berupa garis tak berarah atau garis berarah. Graf yang dihubungkan dengan garis tak berarah disebut graf tak berarah, sedangkan untuk graf yang dihubungkan dengan garis berarah disebut graf berarah.

Graf dapat direpresentasikan ke dalam matriks, diantaranya matriks ketetanggaan, matriks bersisian, dan matriks *Laplace*. Matriks *Laplace* dari graf G dengan n buah simpul atau $L(G)$ adalah matriks berukuran $n \times n$ yang diperoleh dari $L(G) = D(G) - A(G)$. Matriks $D(G)$ adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya merupakan derajat dari setiap simpul pada graf G , dan $A(G)$ adalah matriks ketetanggaan dari graf G , dengan entri a_{ij} bernilai 1 jika simpul v_i terhubung langsung dengan simpul v_j , dan bernilai 0 jika simpul v_i tidak terhubung langsung dengan simpul v_j . Matriks *Laplace* dikenal juga

sebagai matriks *Kirchhoff* [1]. Namun, matriks *Laplace* pada graf berarah G dengan n simpul dan m buah sisi dapat diperoleh dari perkalian matriks bersisian $N(G)$ dengan matriks $N(G)^T$ [2], [3]. Matriks $N(G)$ merupakan matriks berukuran $n \times m$ dengan entri n_{ij} bernilai 1 jika simpul i bersisian dan berorientasi arah menuju simpul j , bernilai -1 jika simpul i bersisian dan berorientasi arah meninggalkan simpul j , dan bernilai 0 jika simpul i tidak bersisian dengan simpul j .

Matriks *Laplace* $L(G)$ memiliki karakteristik, diantaranya adalah matriks *Laplace* merupakan matriks singular, simetri dan semidefinit positif. Selain itu, perubahan pelabelan sisi pada graf G tidak berpengaruh pada matriks *Laplace*. Jika $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ merupakan nilai eigen dari matriks *Laplace* $L(G)$, maka $\mu_0 = 0$, dengan vektor eigen $[1, 1, \dots, 1]$. Jika G graf terhubung, maka $\mu_1 > 0$ [4]. Nilai eigen terkecil dari matriks *Laplace* selalu bernilai 0 dan nilai eigen terkecil kedua atau μ_1 dikenal sebagai *algebraic connectivity* dari graf [5]. Penelitian yang sudah dilakukan terkait dengan nilai eigen dari matriks *Laplace* mengkaji beberapa hal, yaitu batas atas dari jumlah nilai eigen dari matriks *Laplace* [6], energi dari matriks *Laplace* [7], [8], [9], dan batas atas nilai eigen terbesar matriks *Laplace* pada graf *bipartite* [10].

Spektrum dari graf G adalah susunan nilai eigen dari matriks ketetanggaan dan multiplisitasnya, yang dinotasikan dengan $Spec\ G$. Spektrum graf dapat diperoleh dengan melakukan operasi matriks, seperti menentukan determinan matriks hingga didapatkan polinomial karakteristik dan nilai eigen. Analisis spektrum graf memiliki banyak kegunaan di berbagai bidang sains dan teknologi, diantaranya untuk melihat sifat geometris dari sebuah jaringan, yang berkaitan dengan konstanta *Cheeger*, untuk mempelajari analisis sinyal pada graf, dan untuk mempelajari beberapa fitur dari *random walk* pada graf yang melalui matriks transisi stokastik [11]. Menurut Biggs [4], jika nilai eigen berbeda dari matriks ketetanggaan adalah $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$ dan multiplisitasnya adalah $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{n-1})$, maka dapat dituliskan

$$Spec\ G = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Selain matriks ketetanggaan, ada matriks lain yang dapat digunakan untuk memperoleh nilai spektrum suatu graf, yaitu matriks *Laplace*. Jika spektrum suatu graf diperoleh dari matriks *Laplace*, maka disebut sebagai spektrum *Laplace* ($Spec_L\ G$). Jika nilai eigen berbeda dari matriks *Laplace* adalah $0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ dan multiplisitasnya adalah $m(\mu_0), m(\mu_1), \dots, m(\mu_{n-1})$, menurut Umam [12], spektrum *Laplace* dapat dituliskan

$$Spec_L\ G = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} \\ m(\mu_0) & m(\mu_1) & \dots & m(\mu_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Beberapa peneliti telah melakukan kajian tentang spektrum *Laplace* pada suatu graf, yaitu spektrum *Laplace* pada graf corona dan graf corona sisi [13], spektrum *Laplace* pada beberapa variasi graf corona [14], estimasi spektrum *Laplace* pada graf hasil kali langsung dan hasil kali kuat dengan menggunakan pendekatan *heuristic* [15], spektrum *adjacency* dan *Laplace* pada graf mahkota (S_n^0) [12], spektrum *adjacency* pada graf kincir angin berarah (Q_k^4) [16], spektrum *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil, $n \geq 3$ [17], dan spektrum *adjacency* dan *Laplace* pada graf bintang (S_n) dan graf lengkap (K_n) [18]. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan spektrum *Laplace* graf kincir angin berarah (Q_k^n) dengan $n = 3$ dan $k \geq 1$.

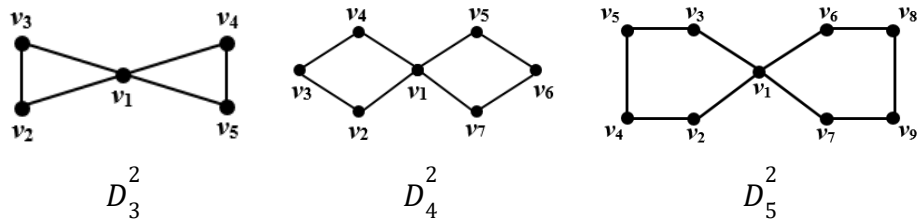
2. Metodologi

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian ini bertujuan untuk menguraikan bentuk umum spektrum *Laplace* pada graf kincir angin berarah (Q_k^n) dengan $n = 3$ dan $k \geq 1$. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menentukan spektrum *Laplace* sebagai berikut:

1. Menentukan matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ yang diperoleh dari perkalian matriks bersisian dengan matriks *transpose*-nya.
2. Menentukan polinomial karakteristik dan nilai eigen matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$
3. Merumuskan bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$.
4. Merumuskan bentuk umum spektrum *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$.

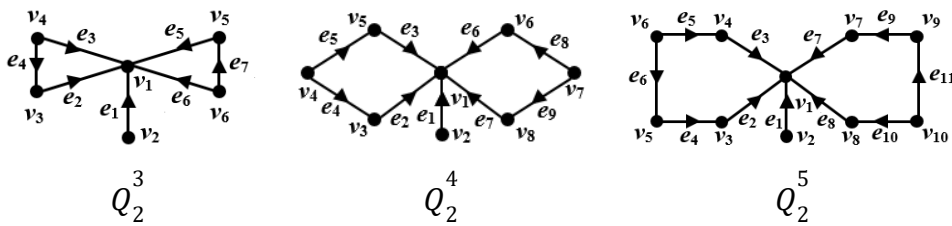
3. Hasil dan Pembahasan

Graf *Dutch windmill* adalah graf yang diperoleh dari graf sikel C_n dengan sebuah simpul yang berimpitan. Graf *Dutch windmill* dinotasikan dengan D_n^m , dengan m menyatakan banyaknya graf sikel C_n yang berhimpit dan n menyatakan banyaknya simpul dari graf sikel C_n . Graf *Dutch windmill* (D_n^m) memiliki simpul sebanyak $(n - 1)m + 1$ dan sisi sebanyak mn [19].



Gambar 1. Graf *Dutch windmill* (D_n^m)

Graf kincir angin berarah merupakan graf berarah hasil modifikasi dari graf *Dutch Windmill* (D_n^m) yang ditambahkan satu buah simpul dan sisi yang bertetangga dengan titik pusat kincir angin. Semua sisinya memiliki orientasi arah menuju ke titik pusat kincir angin. Graf kincir angin berarah dinotasikan dengan Q_k^m , untuk $m \geq 3$ dan $k \geq 1$. Graf kincir angin berarah (Q_k^m) memiliki simpul sebanyak $(m - 1)k + 2$ dan sisi sebanyak $mk + 1$ [16].



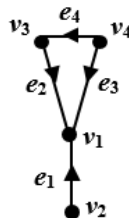
Gambar 2. Graf kincir angin berarah (Q_k^m)

Pembahasan bentuk umum spektrum *Laplace* pada graf kincir angin berarah (Q_k^n) dengan $n = 3$ dan $k \geq 1$ yaitu Q_k^3 akan dilihat terlebih dahulu pola dari polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah Q_1^3 , Q_2^3 , Q_3^3 , dan Q_4^3 .

3.1 Menemukan Pola Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace* pada Graf Kincir Angin Berarah (Q_k^3)

A. Graf Kincir Angin Berarah Q_1^3

Graf kincir angin berarah Q_1^3 dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf kincir angin berarah (Q_1^3)

Berdasarkan Gambar 3, matriks bersisian dari graf kincir angin berarah Q_1^3 sebagai berikut

$$N(Q_1^3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks *Laplace*-nya adalah

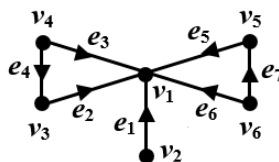
$$L(Q_1^3) = N(Q_1^3) \times N(Q_1^3)^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah Q_1^3 adalah

$$p(Q_1^3, \mu) = \mu (\mu - 1) (\mu - 3) (\mu - 4) = 0. \tag{1}$$

B. Graf Kincir Angin Berarah Q_2^3

Graf kincir angin berarah Q_2^3 dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf kincir angin berarah (Q_2^3)

Berdasarkan Gambar 4, matriks bersisian dari graf kincir angin berarah Q_2^3

sebagai berikut

$$N(Q_2^3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh matriks *Laplace*-nya adalah

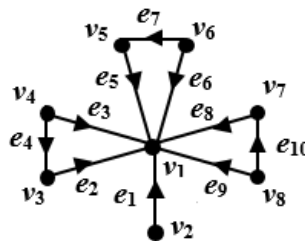
$$L(Q_2^3) = N(Q_2^3) \times N(Q_2^3)^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah Q_2^3 adalah

$$p(Q_2^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^2 (\mu - 3)^2 (\mu - 6) = 0. \tag{2}$$

C. Graf Kincir Angin Berarah Q_3^3

Graf kincir angin berarah Q_3^3 dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Graf kincir angin berarah (Q_3^3)

Berdasarkan Gambar 5, matriks bersisian dari graf kincir angin berarah Q_3^3 sebagai berikut

$$N(Q_3^3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh matriks *Laplace*-nya adalah

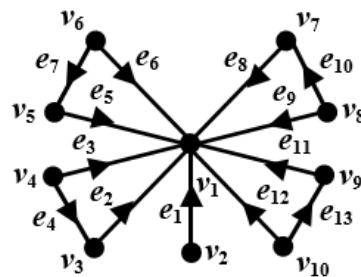
$$L(Q_3^3) = N(Q_3^3) \times N(Q_3^3)^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah Q_3^3 adalah

$$p(Q_3^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^3 (\mu - 3)^3 (\mu - 8) = 0. \tag{3}$$

D. Graf Kincir Angin Berarah Q_4^3

Graf kincir angin berarah Q_4^3 dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6. Graf kincir angin berarah (Q_4^3)

Berdasarkan Gambar 6, matriks bersisian dari graf kincir angin berarah Q_4^3 sebagai berikut

$$N(Q_4^3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh matriks *Laplace*-nya adalah

$$L(Q_4^3) = N(Q_4^3) \times N(Q_4^3)^T = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah Q_4^3 adalah

$$p(Q_4^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^4 (\mu - 3)^4 (\mu - 10) = 0. \tag{4}$$

Berdasarkan persamaan (1), (2), (3), dan (4), polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah Q_k^3 terlihat pola seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Polinomial karakteristik matriks *Laplace* graf kincir angin berarah (Q_k^3)

Graf Kincir Angin Berarah (Q_k^3)	Polinomial Karakteristik Matriks <i>Laplace</i>
Q_1^3	$\mu (\mu - 1) (\mu - 3) (\mu - 4)$
Q_2^3	$\mu (\mu - 1)^2 (\mu - 3)^2 (\mu - 6)$
Q_3^3	$\mu (\mu - 1)^3 (\mu - 3)^3 (\mu - 8)$
Q_4^3	$\mu (\mu - 1)^4 (\mu - 3)^4 (\mu - 10)$
\vdots	\vdots
Q_k^3	$\mu (\mu - 1)^k (\mu - 3)^k (\mu - (2k + 2))$

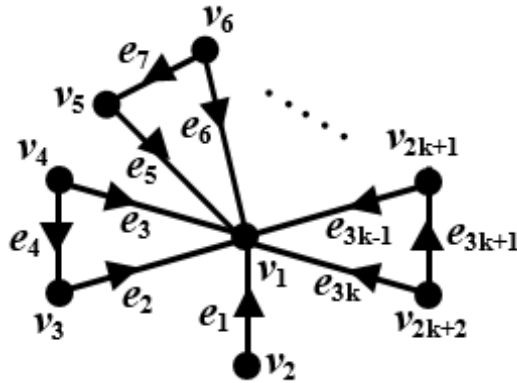
3.2 Bentuk Umum Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace* pada Graf Kincir Angin Berarah (Q_k^3)

Lema 3.1 Polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah

$$p(Q_k^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^k (\mu - 3)^k (\mu - (2k + 2)).$$

Bukti. Graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah graf berarah hasil modifikasi dari graf *Dutch Windmill*, untuk $n = 3$ menyatakan banyaknya simpul dari graf sikel C_3

dan k menyatakan banyaknya graf siklus C_3 yang berimpit pada titik pusat kincir angin. Graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Graf kincir angin berarah (Q_k^3)

Berdasarkan pada Gambar 7, diperoleh matriks bersisian dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ berukuran $(2k + 2) \times (3k + 1)$, dengan $2k + 2$ menyatakan banyaknya simpul dan $3k + 1$ menyatakan banyaknya sisi pada graf. Matriks bersisiannya dimisalkan $N(Q_k^3) = [n_{ij}]$, didefinisikan sebagai berikut:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 2; j = 1, \\ & i = 2t + 1; j = 3t - 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 2t + 2; j = 3t; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 2t + 2; j = 3t + 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ -1, & i = j = 1, \\ & i = 1; j = 3t - 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 1; j = 3t; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 2t + 1; j = 3t + 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{lainnya,} \end{cases}$$

$$N(Q_k^3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks *tranpose* dari $N(Q_k^3)$ dimisalkan $N(Q_k^3)^T = [m_{ij}]$, didefinisikan sebagai berikut:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1; j = 2, \\ & i = 3t - 1; j = 2t + 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 3t; j = 2t + 2; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 3t + 1; j = 2t + 2; t = 1, 2, \dots, k, \\ -1, & i = j = 1, \\ & i = 3t - 1; j = 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 3t; j = 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 3t + 1; j = 2t + 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{yang lainnya,} \end{cases}$$

$$N(Q_k^3)^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks *Laplace* yang berukuran $(2k + 2) \times (2k + 2)$ dari perkalian $N(Q_k^3)$ dengan $N(Q_k^3)^T$ yang dimisalkan $L(Q_k^3) = [l_{ij}]$, didefinisikan sebagai berikut:

$$l_{ij} = \begin{cases} 2k + 1, & i = j = 1, \\ 1, & i = j = 2, \\ 2, & i = j; i \geq 3, \\ -1, & i = 1; 2 \leq j \leq 2k + 2, \\ & 2 \leq i \leq 2k + 2; j = 1, \\ & i = 2t + 1; j = 2t + 2; t = 1, 2, \dots, k, \\ & i = 2t + 2; j = 2t + 1; t = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{yang lainnya,} \end{cases}$$

$$L(Q_k^3) = \begin{bmatrix} 2k+1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dicari polinomial karakteristik menggunakan eliminasi Gaussian untuk mereduksi matriks $\mu I_n - L(Q_k^3)$ menjadi matriks segitiga atas.

$$\mu I_n - L(Q_k^3) = \begin{bmatrix} \mu - (2k+1) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \mu - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mu - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \mu - 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mu - 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mu - 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mu - 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \mu - 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \mu - 2 \end{bmatrix}$$

Operasi baris elementer dilakukan untuk mereduksi matriks $\mu I_n - L(Q_k^3)$ sehingga diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut:

$$\mu I_n - L(Q_k^3) = \begin{bmatrix} 1 & \mu - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mu & \mu - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \mu & \mu - 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \mu & \mu - 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 - \mu & \mu - 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \mu & \mu - 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 - \mu & \mu - 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \mu & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 3 - \mu & \mu - 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\mu - (2k+2))\mu \end{bmatrix}$$

Setelah matriks segitiga atas diperoleh, polinomial karakteristik matriks Laplace dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \det(\mu I_n - L(Q_k^3)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1)(1 - \mu)^k (3 - \mu)^k (-(\mu - (2k+2))\mu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu (\mu - 1)^k (\mu - 3)^k (\mu - (2k+2)) = 0. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah

$$p(Q_k^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^k (\mu - 3)^k (\mu - (2k + 2)). \quad \square$$

Akibat 3.2 Spektrum *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah

$$Spec_L Q_k^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2k + 2 \\ 1 & k & k & 1 \end{bmatrix}.$$

Bukti. Berdasarkan pada Lema 3.1, telah diketahui bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ yaitu

$$p(Q_k^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^k (\mu - 3)^k (\mu - (2k + 2))$$

yang dihasilkan dari $\det(\mu I_n - L(Q_k^3)) = 0$, maka diperoleh nilai eigennya $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, dan $\mu_3 = 2k + 2$ dengan multiplisitasnya $m(\mu_0) = 1$, $m(\mu_1) = k$, $m(\mu_2) = k$, dan $m(\mu_3) = 1$. Jadi, terbukti bahwa nilai spektrum *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah

$$Spec_L Q_k^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2k + 2 \\ 1 & k & k & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan pada bagian sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah

$$p(Q_k^3, \mu) = \mu (\mu - 1)^k (\mu - 3)^k (\mu - (2k + 2)).$$

Nilai eigen dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, dan $\mu_3 = 2k + 2$ dengan multiplisitasnya $m(\mu_0) = 1$, $m(\mu_1) = k$, $m(\mu_2) = k$, dan $m(\mu_3) = 1$. Jadi, diperoleh bentuk umum spektrum *Laplace* dari graf kincir angin berarah (Q_k^3) dengan $k \geq 1$ adalah

$$Spec_L Q_k^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2k + 2 \\ 1 & k & k & 1 \end{bmatrix}.$$

Daftar Pustaka

- [1] S. Arumugam, A. Brandstädt, and T. Nishizeki, *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*. New York: CRC Press, 2016.
- [2] O.R. Oellermann, A.J. Schwenk, and B. Mohar, “The Laplacian spectrum of graphs,” Wiley, 1991. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/233407318>
- [3] F.R.K. Chung and F.C. Graham, *Spectral Graph Theory*. American Mathematical Soc., 1997.
- [4] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Second. New York: Cambridge University Press, 1993.
- [5] M. Fiedler, “Algebraic connectivity of graphs,” 1973. Accessed: May 24, 2022. [Online]. Available: <http://dml.cz/dmlcz/101168>
- [6] Z. Du and B. Zhou, “Upper bounds for the sum of Laplacian eigenvalues of graphs,” *Linear Algebra Appl*, vol. 436, no. 9, pp. 3672–3683, May 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.01.007>
- [7] S. Pirzada and H.A. Ganie, “On the Laplacian eigenvalues of a graph and Laplacian energy,” *Linear Algebra Appl*, vol. 486, pp. 454–468, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.08.032>
- [8] H.A. Ganie, S. Pirzada, and E.T. Baskoro, “On energy, Laplacian energy and p-fold graphs,” *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, vol. 3, no. 1, pp. 94–107, Apr. 2015, doi: <https://doi.org/10.5614/ejgta.2015.3.1.10>
- [9] K.C. Das and S.A. Mojallal, “On Laplacian energy of graphs,” *Discrete Math*, vol. 325, no. 1, pp. 52–64, Jun. 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.02.017>
- [10] Y.-L. Pan, “Sharp upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues,” 2002. doi: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00353-1](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00353-1)
- [11] A. Yahya and Y. Soeharyadi, “Spektrum operator Laplace diskret pada graf torus,” *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 35–49, 2020, Accessed: May 21, 2022. [Online]. Available: <https://journal.unesa.ac.id/index.php/jram>
- [12] K. Umam, “Spectrum dan spectrum Laplacian pada graf mahkota,” *KALBISCIENTIA Jurnal Sains dan Teknologi*, vol. 6, no. 2, p. 161, 2020, doi: 10.53008/kalbiscientia.v6i2.50.
- [13] S.Y. Cui and G.X. Tian, “The spectrum and the signless Laplacian spectrum of coroneae,” *Linear Algebra Appl*, vol. 437, no. 7, pp. 1692–1703, Oct. 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.05.019>

- [14] S. Barik and G. Sahoo, "On the Laplacian spectra of some variants of corona," *Linear Algebra Appl*, vol. 512, pp. 32–47, Jan. 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.09.030>
- [15] H. Sayama, "Estimation of Laplacian spectra of direct and strong product graphs," *Discrete Appl Math (1979)*, vol. 205, pp. 160–170, 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.12.006>
- [16] F.R. Andrari, "Polinomial karakteristik pada graf kincir angin berarah," vol. 10, no. 2, pp. 111–117, 2017, doi: <http://dx.doi.org/10.30998/faktorexacta.v10i2.1306>
- [17] Abdussakir, D.A. Akhadiyah, A. Layali, and A.T. Putra, "Spektrum graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral," *Laporan Penelitian*, pp. 18–19, 2017, [Online]. Available: <http://lib.uin-malang.ac.id/thesis/fullchapter/06410121-aarifatunnisaa.ps>
- [18] S.M. Selvia, N. Narwen, and Z. Zulakmal, "Spektrum graf bintang S_n dan graf lengkap K_n untuk $n \geq 2$," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 4, no. 4, p. 129, 2019, doi: <https://doi.org/10.25077/jmu.4.4.129-136.2015>
- [19] M.R.R. Kanna, R.P. Kumar, and R. Jagadeesh, "Computation of topological indices of Dutch windmill graph," *Open Journal of Discrete Mathematics*, vol. 06, no. 02, pp. 74–81, 2016, doi: <https://doi.org/10.4236/ojdm.2016.62007>