

DIMENSI METRIK GRAF HASIL OPERASI JEMBATAN DARI *CATERPILLAR* HOMOGEN DAN POT BUNGA DIPERUMUM (Metric Dimension of Bridge Operation Graph from Caterpillar Homogen and Generalized Flower Pot Graphs)

Gusma Hidayanti, Amrullah^{*}), Nani Kurniati, Laila Hayati

Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Jl. Majapahit No. 62 Mataram

e-mail: hidayantigusma56@gmail.com, ^{*}amrullah@unram.ac.id

^{*})penulis korespondensi

Abstract. The metric dimension is a concept that has many applications, such as robotic navigation. This concept will distinguish each vertex of a graph based on some vertices. The distinguishing vertices are called the basis of the graph. Let G be a connected graph, the metric dimension, $dim(G)$, is the smallest cardinality of the basis of graph G . On this paper, we present the metric dimensions of the bridge graph of a homogeneous caterpillar graph $C_{m,n}$ and a generalized flower pot graph $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$. This research was conducted by the approach of structure analysis by location of the bridge vertices, the edge of the bridge, and the order of the graph. The results show that the metric dimensions of the bridge graph are at least can be reduced at most 2, and the maximum values are the same as the value of $m(n - 1) + \sum_{i=1}^p q_i - 2p$.

Keywords: Metric dimension, caterpillar, unicyclic, bridge

MSC2020: 05C12

Received: 02-03-2022, accepted: 18-03-2022

1. Pendahuluan

Penelitian dimensi graf telah banyak dilakukan dalam beberapa varians seperti dimensi partisi maupun dimensi metrik. Konsep dimensi tersebut telah digunakan dalam beberapa aplikasi. Salah satu contoh aplikasi yang menggunakan dimensi metrik yaitu navigasi robot [1]. Dalam hal navigasi robot, pergerakan robot dapat menggunakan ruang graf. Dalam ruang graf, beberapa simpul diberikan penanda sehingga simpul dalam graf terbedakan satu sama lain. Dengan kata lain, setiap simpul harus memiliki koordinat yang berbeda dan unik [2].

Kajian tentang dimensi metrik merupakan kajian yang menarik, dan pemanfaatan konsep banyak digunakan dalam kehidupan modern saat ini. Dimensi metrik pada teori graf muncul pertama kali pada tahun 1976, yaitu pada jurnal ditulis oleh F. Harary dan R.A Milter yang berjudul “*On the metric dimension of a graph*” [3]. Dimensi metrik merupakan suatu konsep yang menggunakan himpunan pembeda. Himpunan pembeda digunakan dalam penandaan untuk membedakan semua simpul pada graf. Misalkan $G(V, E)$ adalah graf terhubung, $W \subset V(G)$, dimensi metrik adalah kardinalitas minimum

dari himpunan pembeda W yang dinotasikan dengan $\dim(G)$ [4–7].

Dimensi metrik graf caterpillar telah dipublikasikan oleh beberapa peneliti diantaranya Permana [8] dan Wantika [9]. Demikian juga dimensi metrik graf *unicyclic* telah dipublikasikan oleh banyak peneliti diantaranya Poisson dan Zhang [10] dan Adawiyah [11]. Poisson dan Zhang (2002) [10] menunjukkan bahwa jika $G = T + e$ adalah graf *unicyclic*, dengan graf pohon T , maka $\dim(T) - 2 \leq \dim(T + e) \leq \dim(T) + 1$. Adapun graf T yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah graf pot bunga. Kajian dimensi metrik pada kelas graf tertentu telah dikaji oleh beberapa peneliti diantaranya graf Petersen [12], graf bipartit [13], dan graf tangga [14]. Bahkan beberapa penelitian menggunakan operasi graf seperti amalgamasi [15].

Salah satu operasi yang banyak dikaji dalam teori graf adalah *operasi jembatan* yaitu operasi yang menghubungkan dua graf G_1 dan G_2 dengan menambahkan satu sisi baru, sebut e , sebagai penghubung dua graf G_1 dan G_2 sehingga diperoleh graf jembatan $B(G_1, G_2, e)$ [16]. Dimensi graf caterpillar maupun graf *unicyclic* telah dipublikasi oleh beberapa peneliti. Kajian pada operasi jembatan pada graf caterpillar dan *unicyclic* pot bunga belum ada yang mempublikasikan. Kajian ini akan menyajikan hubungan antara dimensi metrik graf jembatan $\dim(B(G_1, G_2, e))$ dengan dimensi metrik graf sebelum melakukan operasi jembatan $\dim(G_1)$ atau $\dim(G_2)$.

2. Metodologi

Untuk mendapatkan hubungan dimensi metrik graf hasil operasi jembatan $\dim(B(G_1, G_2, e))$ dengan dimensi metrik graf sebelum melakukan operasi jembatan $\dim(G_1)$ atau $\dim(G_2)$, dilakukan pendekatan menggunakan analisis struktur graf dengan memperhatikan letak simpul dari sisi jembatan. Berikut definisi graf caterpillar yang digunakan.

Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$, graf *caterpillar* adalah graf pohon yang jika setiap simpul berderajat satu dihapus menghasilkan graf lintasan. Jika banyak simpul di graf lintasan adalah m dan selalu ada n simpul yang bertetangga dengan setiap simpul di lintasan, diperoleh graf *caterpillar* homogen, yang dinotasikan dengan $C_{m,n}$. Lintasan P_m di $C_{m,n}$ disebut *backbone* dan setiap simpul yang berderajat satu disebut *daun*. Semua daun di $C_{m,n}$ diberi label $w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}, \dots, w_{in}$ untuk $i \in [1, m]$. Sisi $v_i w_{i,j}$ dengan $j \in [1, n]$ dan $v_i v_{i+1}$ berturut-turut disebut *pandant* dan sisi *backbone* [17]. Graf *pot bunga*, dinotasikan $C_k - S_n$, adalah gabungan graf lingkaran C_k dan graf bintang S_n yang dihubungkan dengan sebuah sisi yang mengkaitkan titik pusat graf bintang dengan salah satu titik pada graf lingkaran [18]. Graf *pot bunga* diperumum, dinotasikan $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$, adalah graf yang diperoleh dari graf lingkaran C_p dengan menambahkan p

sisi yang menghubungkan simpul pusat graf bintang K_{q_i} dengan $1 \leq i \leq p$ dan $p \geq 3$.

Kajian struktur dilakukan dengan memperhatikan setiap kemungkinan sisi jembatan uv dengan u di graf caterpillar dan v di graf pot bunga diperumum. Selanjutnya analisis jarak dan representasi simpul dilakuka dengan menggunakan sifat-sifat yang telah diperoleh pada kajian kajian sebelumnya. Beberapa sifat yang digunakan dalam kajian ini, diantaranya sebagai berikut:

Teorema 1. [8] Jika $C_{m,n}$ dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ merupakan graf Caterpillar homogen maka $\dim(C_{m,n}) = m(n - 1)$.

Teorema 2. [11] Misalkan $G = C_k - S_n$ adalah graf pot bunga dengan $k \geq 3, n \geq 2$, maka $\dim(G) = n$.

Teorema 3. [4] Graf terhubung G dengan n simpul mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika $G = P_n$.

3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan himpunan titik dari graf $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, xy)$ dengan $x \in V(C_{m,n})$ dan $y \in V(C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p})$ adalah $V(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, xy)) = V(C_{m,n}) \cup V(C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p})$ dengan $V(C_{m,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \cup \{w_{j,k} | j \in [1, m], k \in [1, n]\}$ dan $V(C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}) = \{a_1, \dots, a_p\} \cup \{b_{1,1}, \dots, b_{1,q_1}, b_{2,1}, \dots, b_{2,q_2}, \dots, b_{p,1}, \dots, b_{p,q_p}\}$. Setelah dilakukan analisis dan kajian struktur dari kedua graf diperoleh lema-lema berikut.

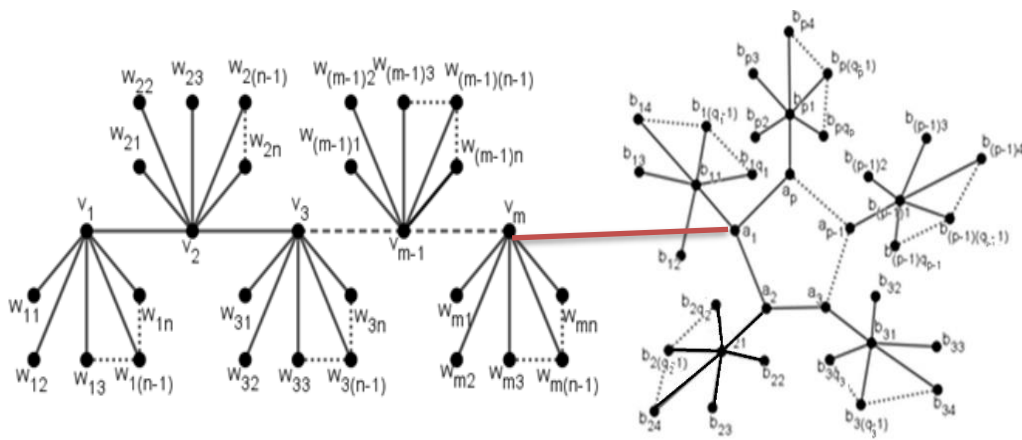
Lema berikut memberikan dimensi graf jembatan $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)$ dengan sisi jembatan $v_m a_i$ atau $v_n b_{1,j}$ dengan v_m adalah simpul dari *backbone* di $C_{m,n}$ dan a_i atau $b_{1,j}$ adalah bukan simpul daun di graf pot bunga.

Lemma 3.1 Misalkan $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)$ adalah graf hasil operasi jembatan graf *caterpillar* homogen $C_{m,n}$ dengan $m, n \geq 2$ dan graf pot bunga diperumum $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ dengan $p \geq 3, q_i \geq 2$. Jika $uz = v_j a_i$ atau $uz = v_j b_{i,1}, \forall i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ maka

$$\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2).$$

Bukti. Misalkan $x = v_j \in V(C_{m,n})$ dan $y = a_i \in V(C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p})$ atau $y = b_{i,1} \in V(C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p})$ untuk suatu $i \in \{1, \dots, p\}$. Lema ini akan dibuktikan dalam dua tahapan.

Pertama akan dibuktikan, $\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2)$. Sebagai ilustrasi graf $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)$, perhatikan Gambar 3.1.



Gambar 1. Graf $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, v_m a_1)$

Dipilih himpunan $W = \{w_{11}, \dots, w_{1(n-1)}, w_{21}, \dots, w_{2(n-1)}, \dots, w_{(m-1)1}, \dots, w_{m(n-1)}\} \cup \{b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1, q_1 - 1}\} \cup \{b_{23}, \dots, b_{2(q_2 - 1)}, \dots, b_{p2}, b_{p3}, \dots, b_{p, (q_p - 1)}\}$. Untuk setiap simpul daun di $C_{m,n}$ dipilih menjadi simpul pembeda kecuali simpul daun $w_{j,n}$ dengan $j \in [1, m]$. Oleh karena itu banyak simpul $w_{j,k}$ yang dipilih adalah $m(n - 1)$ simpul. Pada graf pot bunga, untuk setiap $b_{i,t}$ setiap simpul daun dari $b_{i,t}$ dipilih menjadi simpul pembeda ($b_{i,2}, b_{i,3}, \dots, b_{i, q_i - 1}$) kecuali simpul daun b_{i, q_i} . Oleh karena itu banyak simpul $b_{i,t}$ yang dipilih adalah $\sum_{i=1}^p (q_i - 2)$ simpul.

Akan dibuktikan bahwa $\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 1)$. Ambil sembarang $x, y \in V(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz))$.

Untuk $x, y \in C_{m,n}$, jika $x = v_i$ dan $y = v_j$ dengan $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$, maka x dan y dibedakan oleh w_{ij} . Jika $x = v_i$ dan $y = w_{j,n}$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{i,j}$. Jika $x = w_{in}$ dan $y = w_{jn}$ dengan $i \neq j$, maka x dan y dibedakan oleh w_{ij} .

Untuk $x, y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ jika $x = a_i$ dan $y = a_j$ dengan $i \neq j \in \{1, 2, \dots, p\}$ maka x dan y dibedakan oleh b_{ij} .

Untuk $x \in C_{m,n}$ dan $y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ Jika v_j dan a_i berjarak sama dengan $b_{i,t}$ maka dibedakan oleh $w_{j,1}$. Jika a_i dan $w_{j,n}$ berjarak sama dengan di $w_{j,1}$ maka dibedakan oleh $b_{i,t}$.

Selanjutnya menentukan kardinalitas dari W . Karena untuk setiap v_j setiap simpul daun dari v_j dipilih menjadi simpul pembeda kecuali simpul daun $w_{j,n}$. Oleh karena itu banyak simpul $w_{j,k}$ yang dipilih adalah $m(n - 1)$ simpul. Pada graf pot bunga, Untuk setiap $b_{i,t}$ setiap simpul daun dari $b_{i,t}$ dipilih menjadi simpul pembeda ($b_{i,2}, b_{i,3}, \dots, b_{i,q_i-1}$) kecuali simpul daun b_{i,q_i} . Oleh karena itu banyak simpul $b_{i,t}$ yang dipilih adalah $\sum_{i=1}^p (q_i - 2)$ simpul. Akibatnya, diperoleh $|W| = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) \quad (1)$$

Kedua akan dibuktikan

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \geq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2)$$

Misalkan $\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$. Pada pemilihan simpul-simpul daun dalam himpunan W , terdapat satu simpul daun ($w_{i,n}$ atau b_{i,q_i}) yang tidak dipilih. Karena pengandaian tersebut, terdapat dua simpul daun dari suatu v_j atau $b_{i,t}$ yang tidak dipilih sebagai simpul pembeda. Tanpa mengurangi keumumannya misalkan $b_{i,2}$ dan b_{i,q_i} tidak dipilih sebagai simpul pembeda. Karena $b_{i,2}$ dan b_{i,q_i} berjarak sama ke setiap simpul $z \in V(B)$ maka hal tersebut mengakibatkan $r(b_{i,2}|W) = r(b_{i,q_i}|W)$, kontradiksi. Hal serupa juga berlaku jika ada dua simpul daun $w_{i,j}$ yang tidak dipilih pada setiap v_i . Oleh karena itu, diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \geq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2). \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), maka memperlihatkan

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2). \quad \blacksquare$$

Pada Lemma 3.2 berikut ini memperlihatkan dimensi metrik dari graf jembatan

$B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)$ dengan sisi jembatan $v_j b_{i,t}$ dimana v_j adalah simpul backbone dan $b_{i,t}$ dengan $t \geq 2$ simpul dari K_i^* . Simpul $b_{i,t}$ dengan $t \geq 2$ adalah simpul daun dari graf pot bunga, dimana K_i^* adalah subgraf dari graf pot bunga $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ yang memuat pada simpul ke a_i dengan vertex $\{a_i, b_{i,1}, b_{i,2}, b_{i,3}, \dots, b_{i,q_i}\}$.

Lemma 3.2 Misalkan $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)$ adalah graf hasil operasi jembatan graf *caterpillar* homogen $C_{m,n}$ dengan $m, n \geq 2$ dan graf pot bunga diperumum $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ dengan $p \geq 3, q_i \geq 2$. Jika $uz = v_j b_{i,t} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, t \in \{2, 3, \dots, q_i\}$ maka

$$\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) = m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1.$$

Bukti. Misalkan $G_1 = C_{m,n}, G_2 = C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, B(G_1, G_2, uz)$ dengan $u \in V(G_1), z \in V(G_2)$, jika $u = v_j \in G_1, z = b_{i,t} \in V(K_i^*)$ dengan $i \in \{1, \dots, p\}, t \in \{2, 3, \dots, q_i\}$. Tanpa mengkurangi keumumannya, $b_{i,t} = b_{1,2}$. Lemma ini akan dibuktikan dalam 2 tahapan.

Pertama akan dibuktikan, $\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) \leq m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$. Misalkan sisi jembatannya adalah $v_j b_{1,2}$ dengan $b_{1,2}$ adalah simpul daun dari simpul $b_{1,1}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Dipilih himpunan

$$W = \{w_{1,1}, \dots, w_{1,(n-1)}, w_{2,1}, \dots, w_{2,(n-1)}, \dots, w_{(m-1),1}, \dots, w_{m,(n-1)}\} \cup \{b_{2,2}, b_{2,3}, \dots, b_{2,(q-1)}, \dots, b_{p,2}, b_{p,3}, \dots, b_{p,(q-1)}\} \cup \{b_{1,3}, \dots, b_{1,(q-1)}\}.$$

Pada himpunan W, simpul daun yang dipilih dari simpul $b_{1,1}$ adalah $b_{1,3}, \dots, b_{1,(q-1)}$ dengan simpul $b_{1,2}$ tidak masuk dalam W, sehingga kardinalitas W berkurang 1 dari himpunan pembeda di Lemma 3.1 sebelumnya.

Akan dibuktikan bahwa $\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) \leq m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$. Ambil sembarang $x, y \in V(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz))$. Untuk $x, y \in C_{m,n}$ atau $y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$, pembuktian serupa dengan Lemma 3.1.

Untuk $x, y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$.

Jika $x = a_i$ dan $y = a_j$ dengan $i \neq j \in \{1, 2, \dots, p\}$, maka x dan y dibedakan oleh simpul daun yang bertetangga dengan $b_{i,1}$. Jika $x = a_i$ dan $y = b_{j,q_i}$ dengan $i \neq j$, maka x dan y dibedakan oleh b_{i,q_i-1} . Jika $x = b_{i,q_i}$ dan $y = b_{j,q_j}$ dengan $i \neq j$, maka x dan y dibedakan oleh b_{i,q_i-1} .

Oleh karena itu, hal tersebut menunjukkan bahwa W adalah himpunan pembeda dengan $|W| = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$. Akibatnya, diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1. \quad (3)$$

Kedua akan dibuktikan

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \geq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1.$$

Andaikan $|W| \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2$. Misalkan $\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2$. Karena $|W| = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$ dengan himpunan W memuat setiap simpul daun $w_{j,k}$ dari v_j kecuali $w_{j,n}$ untuk setiap $j \in \{1, \dots, m\}$. Demikian juga setiap simpul daun $b_{i,s}$ dengan $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $s \in \{1, 2, \dots, q_j\}$ kecuali b_{i,q_j} . Dengan pengandaian tersebut, maka ada dua simpul daun dari suatu v_j atau $b_{i,1}$ yang bukan merupakan simpul pembeda. Tanpa mengurangi keumumannya misal b_{i3} dan b_{i5} . Karena b_{i3} dan b_{i5} berjarak sama ke setiap simpul $v \in V(B)$ maka hal tersebut mengakibatkan $r(b_{i3}|W) = r(b_{i5}|W)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \geq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1. \quad (4)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3) dan (4), maka diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1. \quad \blacksquare$$

Pada Lemma 3.3 diperlihatkan dimensi metrik dari graf jembatan $B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right)$ dengan sisi jembatan $w_{j,k}b_{i,1}$ atau $w_{j,k}a_i$ dengan $w_{j,k}$ adalah simpul daun di $C_{m,n}$, dan $b_{i,1}$ atau a_i adalah simpul bukan daun dari graf pot bunga diperumum.

Lemma 3.3 Misalkan $B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right)$ adalah graf hasil operasi jembatan graf *caterpillar* homogen $C_{m,n}$ dengan $m, n \geq 2$ dan graf pot bunga diperumum $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ dengan $p \geq 3, q_i \geq 2$. Jika $uz = w_{j,k}a_i$ atau $uz = w_{j,k}b_{i,1}, \forall i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ maka

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1.$$

Bukti. Misalkan $G_1 = C_{m,n}, G_2 = C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, G = B(G_1, G_2, uz)$ dengan $u \in V(G_1), z \in V(G_2)$, jika $u = v_j \in G_1, z \in V(K^*_i)$ untuk suatu $i \in \{1, \dots, p\}$. Lemma

ini akan dibuktikan dalam 2 tahapan.

Pertama akan dibuktikan, $dim(G) \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$.

Dipilih himpunan

$$W = \{w_{11}, \dots, w_{1(n-1)}, w_{21}, \dots, w_{2(n-1)}, \dots, w_{(m-1)1}, \dots, w_{m(n-1)}, b_{12}, \dots, b_{1(q-1)}\} \cup \{b_{22}, b_{23}, \dots, b_{2(q-1)}, \dots, b_{p2}, b_{p3}, \dots, b_{p(q-1)}\}.$$

Akan dibuktikan bahwa W adalah himpunan pembeda dari G . Ambil sembarang $x, y \in V(G)$. Pembuktian ini, akan ditunjukkan pada 3 kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $x, y \in C_{m,n} \subset G$.

Jika $d(x, v) \neq d(y, v)$, maka simpul x dan y dibedakan oleh b_{12} . Jika kedua simpul itu berjarak sama dengan simpul z maka perhatikan pemilihan simpul x dan y . Jika $x = v_j$ dan $y = v_t$ dengan $j \neq t \in \{1, 2, \dots, m\}$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{j,i}$. Jika $x = v_j$ dan $y = w_{t,n}$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{j,i}$. Jika $x = w_{j,n}$ dan $y = w_{t,n}$ dengan $j \neq t$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{j,i}$.

Kasus 2. Untuk $x, y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_r} \subset G$.

Jika $x = a_i$ dan $y = a_j$ atau $y = b_{j,i}$ dengan $i \neq j \in \{1, 2, \dots, p\}$, maka x dan y dibedakan oleh $b_{i,2}$. Jika $x = a_i$ dan $y = b_{j,i}$ dengan $i \neq j$, maka simpul x dan y dibedakan oleh $b_{j,2}$. Jika $x = b_{ij}$ dan $y = b_{ji}$ dengan $i \neq j$, maka simpul x dan y dibedakan oleh $b_{i,2}$.

Kasus 3. Untuk $x \in C_{m,n}$ dan $y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$.

Karena $d(y, b_{i,2}) \leq 2$ dan $d(x, b_{i,2}) \geq 3$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ maka kedua simpul x dan y dibedakan oleh $b_{i,2}$.

Berdasarkan kasus 1, 2, dan 3 dapat disimpulkan bahwa W adalah himpunan pembeda dengan $|W| = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$. Oleh karena itu, diperoleh

$$dim(B(C_{m,n}, C_p - rK_{q_1, q_2, \dots, q_r}, uz)) \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1. \quad (5)$$

Kedua akan dibuktikan

$$dim(B(C_{m,n}, C_p - rK_{q_1, q_2, \dots, q_r}, uz)) \geq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1.$$

Andaikan $|W| = m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2)$, misalkan $dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) = |W| \leq m(n - 1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2)$. Akibatnya terdapat paling

sedikit dua simpul daun dari suatu v_j atau a_i yang tidak dipilih sebagai simpul pembeda. Tanpa mengurangi keumumannya misalkan ada dua simpul daun dari suatu a_i yang tidak masuk sebagai simpul pembeda yaitu b_{i2} dan b_{i3} . Karena b_{i2} dan b_{i3} berjarak sama ke setiap simpul $v \in V(B)$ maka hal tersebut mengakibatkan $r(b_{i2}|W) = r(b_{i3}|W)$.

Oleh karena itu, diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \geq m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1. \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (5) dan (6), maka diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1 \quad \blacksquare$$

Lemma 3.4 Misalkan $B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right)$ adalah graf hasil operasi jembatan graf *caterpillar* homogen $C_{m,n}$ dengan $m, n \geq 2$ dan graf pot bunga diperumum $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ dengan $p \geq 3, q_i \geq 2$. Jika $uz = w_{j,k} b_{i,t}, \forall i \in \{1, \dots, p\}, t \in \{2, \dots, q_i\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, dan $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ maka

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2.$$

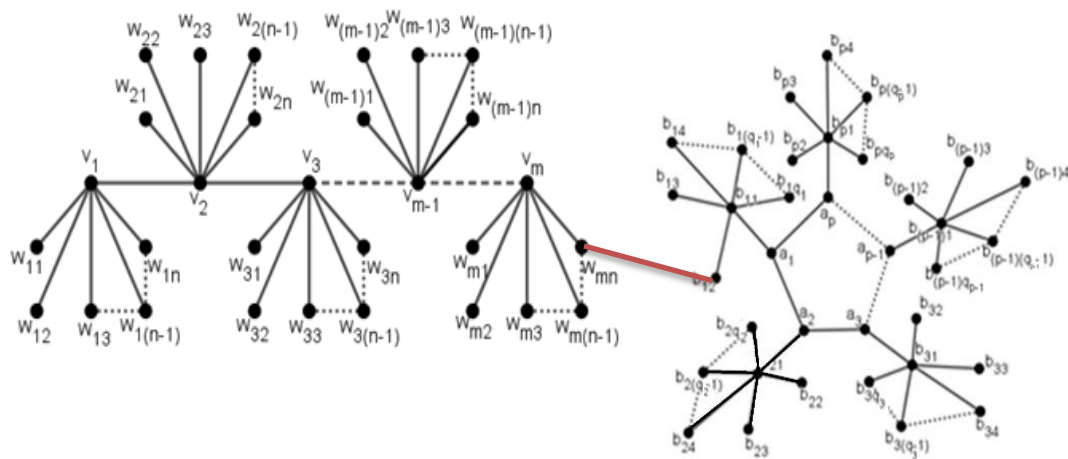
Bukti. Misalkan $G_1 = C_{m,n}, G_2 = C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, B(G_1, G_2, uz)$ dengan $u \in V(G_1), z \in V(G_2)$, dimana $u = w_{j,k} \in G_1, z = b_{i,t}$. Tanpa mengurangi keumuman $z = b_{1,2}$. Lemma ini akan dibuktikan dalam 2 tahapan.

Pertama akan dibuktikan, $\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \leq m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2$. Sebagai ilustrasi graf $B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right)$, perhatikan Gambar 3.6.

Dipilih himpunan $W = \{w_{11}, \dots, w_{1(n-1)}, w_{21}, \dots, w_{2(n-1)}, \dots, w_{m1}, \dots, w_{m(n-2)}\} \cup \{b_{13}, \dots, b_{1(q-1)}\} \cup \{b_{22}, b_{23}, \dots, b_{2(q-1)}, \dots, b_{p2}, b_{p3}, \dots, b_{p(q-1)}\}$, dengan $|W| = m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2$. Ambil sembarang $x, y \in V \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, w_{m,n} b_{1,2} \right) \right)$. Pembuktian ini, akan ditunjukkan pada 3 kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $x, y \in C_{m,n}$.

Jika $x = v_i$ dan $y = v_j$ dengan $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{i,j}$. Jika $x = v_i$ dan $y = w_{j,n}$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{i,j}$. Jika $x = w_{i,n}$ dan $y = w_{j,n}$ dengan $i \neq j$, maka x dan y dibedakan oleh $w_{i,j}$.



Gambar 2. Graf $B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, w_{mn} b_{12})$

Kasus 2. Untuk $x, y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$.

Jika $x = a_i$ dan $y = a_j$ dengan $i \neq j \in \{1, 2, \dots, p\}$, maka x dan y dibedakan oleh b_{ij} . Jika $x = a_i$ dan $y = b_{ji}$ dengan $i \neq j$, maka x dan y dibedakan oleh b_{ij} . Jika $x = b_{ij}$ dan $y = b_{ji}$ dengan $i \neq j$, maka x dan y dibedakan oleh b_{ij} .

Kasus 3. Untuk $x \in C_{m,n}$ dan $y \in C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$.

Misalkan $y = a_i$ atau $y = b_{i,j}$ dengan $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, q_i\}$, diperoleh $d(y, b_{i,t}) \leq 2$ dan $d(x, b_{i,t}) \geq 3$ untuk suatu simpul $b_{i,t}$ dengan $t \in \{3, 4, \dots, q_i\}$. Akibatnya kedua simpul x dan y dibedakan oleh $b_{i,t}$.

Berdasarkan kasus 1, 2, dan 3 dapat disimpulkan bahwa W adalah himpunan pembeda dengan $|W| = (m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\dim(B(C_{m,n}, C_p - rK_{q_1, q_2, \dots, q_r}, uz)) \leq (m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2). \quad (7)$$

Kedua akan dibuktikan

$$\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) \geq \left(m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2 \right).$$

Andaikan $\dim(B(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz)) = m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 1$.

Akibatnya terdapat dua simpul daun dari suatu v_i atau a_i yang tidak dipilih sebagai simpul pembeda, tanpa mengurangi keumumannya misal b_{i3} dan b_{i4} . Karena b_{i3} dan b_{i4} berjarak sama ke setiap simpul $v \in V(B)$ maka hal tersebut mengakibatkan $r(b_{i3}|W) = r(b_{i4}|W)$. Pembuktian ini kontradiksi, oleh karena itu diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) \geq m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2. \quad (8)$$

Berdasarkan persamaan (7) dan (8), maka diperoleh

$$\dim \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right) = m(n-1) + \sum_{i=1}^p (q_i - 2) - 2.$$

Berdasarkan **Lemma 3.1** sampai **Lemma 3.4** maka diperoleh Teorem 3.1 sebagai berikut.

Teorema 3.1 Misalkan $C_{m,n}$ adalah caterpillar homogen, $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ adalah graf pot bunga diperumum dan $G^* = \left(B \left(C_{m,n}, C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}, uz \right) \right)$. Jika dengan $m, n \geq 2$ dan $p \geq 3, q_i \geq 2, i \in \{1, 2, \dots, p\}$ maka

$$\dim(G^*) = \begin{cases} S & \text{jika } uz = v_j a_i \text{ atau } uz = v_j b_{i,1}, \\ S - 1 & \text{jika } uz = v_j b_{i,t} \text{ atau} \\ & uz = w_{j,k} a_i \text{ atau } uz = w_{j,k} b_{i,1}, \\ S - 2 & \text{jika } uz = w_{j,k}. \end{cases}$$

dengan $S = m(n-1) + \sum_{i=1}^p q_i - 2p, j \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $t \in \{2, 3, \dots, q_i\}$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil utama yang diperoleh dari penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa bahwa dimensi metrik graf jembatan dari graf caterpillar homogen $C(m, n)$ dan pot bunga diperumum $C_p - K_{q_1, q_2, \dots, q_p}$ adalah paling kecil berkurang dua dari nilai $m(n-1) + \sum_{i=1}^p q_i - 2p$. Dimensi metrik terbesar graf jembatan tersebut adalah sama dengan $m(n-1) + \sum_{i=1}^p q_i - 2p$.

Daftar Pustaka

[1] Franz, M.O., Schölkopf, B., Mallot, H.A., Bühlhoff, H.H., (1998), Learning view graphs for robot navigation, *Autonomous Robots* **5**, 111-125.

[2] Khuller, S., Raghavachari, B., Rosenfeld, A., (1996), Landmark in graphs, *Discrete Applied Mathematics* **70(3)**, 217-229. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(95\)00106-2](https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00106-2)

- [3] Harary, F., Melter, R. A., (1976), On the metric dimension of a graph, *Ars Comb* **2**, 191-195.
- [4] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., Oellermann, O. R., (2000), Resolvability in graphs and the metrik dimension of a graph, *Discrete Applied Mathematics* **105**, 99-113. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(00\)00198-0](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(00)00198-0)
- [5] Chartrand, G., Salehi, E., Zhang, P., (2000), The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae* **59(1)**, 45-54. <https://doi.org/10.1007/PL00000127>
- [6] Sandika, K. G., (2015). Penentuan Banyaknya Graf Berlabel Tak Terhubung Tanpa Loop Dengan Lima Titik, *Skrpsi*, Lampung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
- [7] Sulistio, W., Slamini, S., (2017), Analisis dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon dikaitkan keterampilan berpikir tingkat tinggi, *Kadikma* **6(3)**, 26-35.
- [8] Permana, A. B., Darmaji., (2012), Dimensi metrik graf pohon bentuk tertentu, *Jurnal Teknik Pomits* **1**, 1-4. <http://digilib.its.ac.id/public/ITS-paper-24031-1207100008-Paper.pdf>
- [9] Wantika, R.R., (2016), Dimensi metrik dan diameter dari graf ulat $C_{m,n}$, *Jurnal Buana Matematika* **6(1)**, 57-62.
- [10] Poisson, C., Zhang, P., (2002), The metric dimension of unicyclic graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **40**, 17-32.
- [11] Estrada-Moreno, A., (2021), The k -metric dimension of a unicyclic graph, *Mathematics* **9(21)**, 2789. <https://doi.org/10.3390/math9212789>
- [12] Asmiati, A., Aldino, A. A., Notiragayu, N., Zakaria, L., Muslim Ansori, M., (2019), Dimensi metrik hasil operasi tertentu pada graf Petersen diperumum. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications* **16(2)**, 87-93. <http://dx.doi.org/10.12962/limits.v16i2.5594>
- [13] Bača, M., Baskoro, E. T., Salman, A. N. M., Saputro, S. W., Suprijanto, D., (2011), The metric dimension of regular bipartite graphs, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie* **54(1)**, 15-28.
- [14] Angraini, F., Welyyanti, D., (2018), Dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga Tr_n untuk $n = 2; 3$, *Jurnal Matematika UNAND* **7(2)**, 46-52. <https://doi.org/10.25077/jmu.7.2.46-52.2018>
- [15] Febrianti, F., Yulianti, L., Narwen, N., (2019), Dimensi metrik pada graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen, *Jurnal Matematika UNAND* **8(1)**, 84-90. <https://doi.org/10.25077/jmu.8.1.84-90.2019>

- [16] Amrullah, A., Syahrul, A., Turmuzi, M., Nani, K., (2021), The bridge graphs partition dimension, *In Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing* **1779(1)**, 012086. DOI: 10.1088/1742-6596/1779/1/012086
- [17] Amrullah, Assiyatun, H., Baskoro, E. T., Uttungadewa, S., Simanjuntak, R., (2013), The partition dimension for a subdivision of homogeneous caterpillars, *AKCE Int. J. Graph Comb*, 317-325.
- [18] Ahmad, M., (2012), Pelabelan Graceful dan Pelabelan ρ Pada Graf Pot Bunga dan Graf Pohon Palembang, *Tesis*, Depok: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.