Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 22 (1) (2022), 30 – 42
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

PELABELAN *ODD-GRACEFUL* PADA GRAF PRODUK SISIR

(*Odd Graceful Labelling on Comb Product Graph*)

Juan Daniel, Zeveliano Zidane Barack, Pandu Setya Ilham, Kiki Ariyanti Sugeng*)

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia, Depok, 16424, Indonesia
e-mail: juan.daniel@sci.ui.ac.id, zeveliano.zidane@sci.ui.ac.id
pandu.setya@sci.ui.ac.id, *)kiki@sci.ui.ac.id
*)penulis korespondensi

Abstract. Gnanajothi defined a graph G with q edges to be odd-graceful if there is an injective function $f: V(G) \to \{0,1,\dots,2q-1\}$ such that if every edge xy is labelled with $|f(x) - f(y)|$ the resulting edge labels are $\{1, 3, 5, \dots, 2q-1\}$. She proved that the graph obtained by joining one pendant to every vertex in C_n is odd-graceful if and only if n is even. In this paper, we extend her results by proving that $C_n \rhd_v P_3$ is odd-graceful if and only if n is even.

Keywords: Vertex-labelling, odd-graceful, cycle
MSC 2020: 05C78

Received: 15-02-2022, accepted: 07-03-2022

1. Pendahuluan

Pada [1], Rosa memperkenalkan pelabelan *graceful*. Suatu graf G dengan q busur disebut *graceful* jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian sehingga himpunan semua label busur yang dihasilkan adalah $\{1, 2, \dots, q\}$ apabila setiap busur xy dilabeli $|f(x) - f(y)|$. Banyak hasil yang diperoleh terkait dengan konjektur terkait dengan keberadaan pelabelan *graceful* pada graf pohon. Brankovic dan Wanless membuat survey pelabelan *graceful* yang sudah ditemukan pada tahun 2011 [2]. Suparta dan Ariawan [3–4] menunjukkan beberapa konstrusi untuk membangun pohon *graceful*. Catell [5] menunjukkan untuk graf lintasan dapat dibuat palabelan *graceful* yang tak unik. Barientos membuktikan pelabelan graceful pada graf yang diberi pendan [6–7]. Truszcynski [8] memberikan konjektur bahawa graf unisiklik adalah *graceful*. Biatch dkk. [9] melakukan survey dari graf unisiklik yang *graceful*. Pada 1991, Gnanajothi [10] memperkenalkan pelabelan busur yang merupakan hasil modifikasi pelabelan *graceful*, yaitu pelabelan *odd-graceful*.

Graf G dengan q busur disebut *odd-graceful* jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \dots, 2q-1\}$ sedemikian sehingga jika setiap busur xy dilabeli $|f(x) - f(y)|$ diperoleh hasil pelabelan busur adalah $\{1, 3, 5, \dots, 2q-1\}$. Fungsi f yang memiliki sifat seperti ini disebut pelabelan *odd-graceful*. Gnanajothi [10] telah membuktikan bahwa P_m

adalah graf yang *odd-graceful* dan C_n adalah graf yang *odd-graceful* jika dan hanya jika n adalah bilangan genap. Gnanajothi juga telah menunjukkan bahwa setiap graf yang memiliki subgraph lingkaran ganjil tidaklah *odd-graceful*. Gnanajothi telah membuktikan bahwa $C_n \odot K_1$ adalah graf yang *odd-graceful* jika dan hanya jika n bilangan genap. Moussa dan Badr [11] memperluas hasil ini, dengan menunjukkan bahwa $C_n \odot mK_1$ adalah graf yang *odd-graceful* jika dan hanya jika n bilangan genap. Pada penelitian lain, Badr, Moussa, dan Kathiresan [12] telah menunjukkan bahwa graf subdivisi dari graf *ladder* L_n, $S(L_n)$, adalah graf yang *odd-graceful*. Pada [13], Moussa membuktikan bahwa $C_m \cup P_n$ adalah graf yang *odd-graceful* untuk beberapa nilai m dan n. Perkembangan terbaru penelitian pelabelan *odd-graceful* lainnya dapat dilihat pada survei yang dilakukan oleh Gallian [14]. Terkait dengan konjektur dari Truszcynski [8] untuk graf unisiklik dalam kasus pelabelan *graceful*, maka dalam paper ini dibahas salah satu graf unisiklik yang akan dibuktikan *odd-graceful*.

Misalkan H_1 dan H_2 adalah dua graf terhubung. Misalkan v adalah simpul di H_1. Produk sisir (*comb product)* antara H_1 dan H_2, dinotasikan sebagai by $H_1 \rhd_v H_2$, merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf H_1 dan $|V(H_1)|$ salinan graf H_2 serta menempelkan simpul v pada salinan ke- i dari H_2 dengan simpul ke -i dari H_1. Menggunakan definisi graf sisir, maka $V(H_1 \rhd_v H_2) = \{(a,x) | a \in V(H_1), x \in V(H_2)\}$ dan $(a,x)(b,y) \in E(H_1 \rhd_v H_2)$ apabila $a = b$ dan $xy \in E(H_2)$, atau $ab \in E(H_1)$ dan $x = y = v$ [15]. Pada penelitian ini, akan ditunjukkan bahwa $C_n \rhd_v P_3$ adalah graf yang *odd-graceful* jika dan hanya jika n adalah bilangan genap.

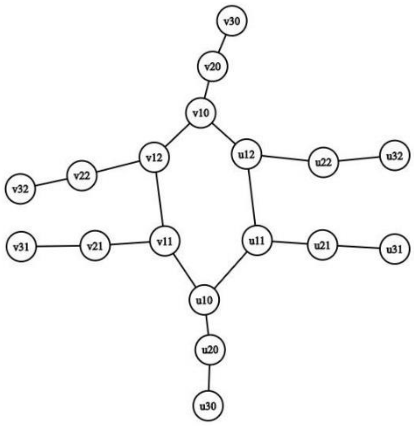
2. Hasil dan Pembahasan

Teorema 2.1. Untuk $n \geq 3$ dan v adalah simpul berderajat satu di P_3, graf $C_n \rhd_v P_3$ adalah *odd-graceful* jika dan hanya jika n bilangan genap.

Bukti. Untuk bagian "hanya jika", jika $C_n \rhd_v P_3$ memiliki pelabelan yang *odd-graceful*, maka graf tersebut tidak memiliki subgraf lingkaran ganjil. Jika n ganjil, maka $C_n \rhd_v P_3$ memiliki subgraf lingkaran ganjil, sehingga $C_n \rhd_v P_3$ tidak memiliki pelabelan *odd-graceful*. Akibatnya, n harus merupakan bilangan genap.

Untuk bagian "jika", pertama-tama dikonstruksi graf $C_n \rhd_v P_3$. Bagi simpul-simpul di C_n menjadi dua lintasan terpisah, lintasan pertama dilalui $\frac{n}{2}$ simpul berikut: $v_1, \ldots, v_{\frac{n}{2}-1}, v_0$ dan lintasan kedua dilalui $\frac{n}{2}$ simpul berikut: $u_0, u_1,, \ldots, u_{\frac{n}{2}-1}$. Simpul u_0 bertetangga dengan v_1 dan simpul $u_{\frac{n}{2}-1}$ bertetangga dengan v_0. Jadi $V(C_n) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{\frac{n}{2}-1}, v_1, \ldots, v_{\frac{n}{2}-1}, v_0\}$. Notasi simpul-simpul dari $\frac{n}{2}$ lintasan P_3 adalah u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} dengan $i = 0,1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$. Notasi simpul-simpul dari $\frac{n}{2}$ lintasan P_3 lainnya adalah v_{1j}, v_{2j}, v_{3j} dengan $j = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$. Kemudian, tempelkan simpul v_0 dengan simpul v_{10} dan simpul u_0 dengan simpul u_{10}. Lalu, tempelkan setiap simpul u_i di lingkaran dengan u_{1i} pada lintasan P_3 dan setiap simpul v_i di lingkaran dengan v_{1i} pada lintasan P_3. Namakan simpul-simpul di lingkaran dengan nama simpul P_3 yang ditempelkan.

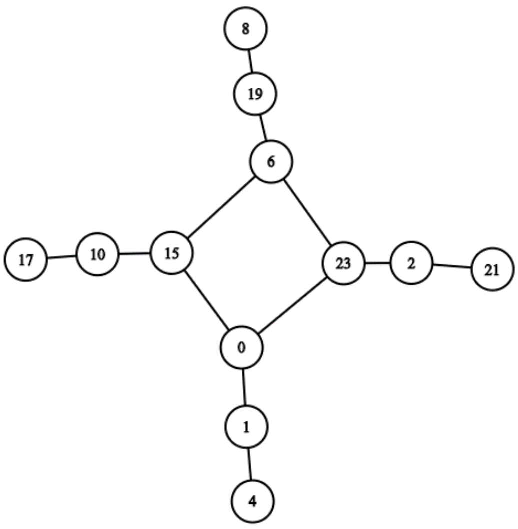
Sebagai ilustrasi, pada Gambar 1, ditampilkan graf $C_6 \rhd_v P_3$ dengan penamaan simpul seperti yang dijelaskan pada paragraf sebelumnya.



Gambar 1. Graf $C_6 \rhd_v P_3$

Untuk n genap, pembuktian $C_n \rhd_v P_3$ memiliki pelabelan *odd-graceful* dibagi menjadi tiga kasus, yaitu $n = 4$, $n \equiv 0 \pmod 4$ dengan $n > 4$, dan $n \equiv 2 \pmod 4$.

Kasus 1. Untuk $n = 4$, dapat dilihat bahwa skema pelabelan pada Gambar 2 adalah pelabelan *odd-graceful* pada $C_4 \rhd_v P_3$



Gambar 2. Pelabelan *odd-graceful* pada $C_4 \rhd_v P_3$

Kasus 2. Untuk $n > 4, n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, perhatikan pelabelan simpul f berikut:

$$f(u_{1i}) = \begin{cases} 0 & , i = 0, \\ 6n - 3i + 2 & , i \text{ ganjil}, \\ 3i + 2 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(u_{2i}) = \begin{cases} 1 & , i = 0, \\ 2 & , i = 1, \\ 1 + 3i & , i \text{ ganjil dan } i > 1, \\ 6n - 3i + 1 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(u_{3i}) = \begin{cases} 6n - 6 & , i = 0, \\ 6n - 3i & , i \text{ ganjil}, \\ 3i & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(v_{1i}) = \begin{cases} \frac{3n}{2} + 2 & , i = 0, \\ 3n + 1 & , i = 1, \\ 3n + 3i & , i \text{ ganjil dan } i > 1, \\ 3n - 3i + 2 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(v_{2i}) = \begin{cases} \frac{9n}{2} + 1 & , i = 0, \\ 3n + 4 & , i = 1, \\ 3n - 3i + 3 & , i \text{ ganjil dan } i > 1, \\ 3n + 3i + 1 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(v_{3i}) = \begin{cases} \frac{3n}{2} + 4 & , i = 0, \\ 3n - 3 & , i = 1, \\ 3n + 3i + 2 & , i \text{ ganjil dan } i > 1, \\ 3n - 3i + 4 & , i \text{ genap dan } i > 0. \end{cases}$$

Untuk membuktikan pelabelan f menghasilkan pelabelan *odd-graceful*, akan dibuktikan bahwa $\max_{x \in V(G)} f(x) = 6n - 1$, f adalah pemetaan satu-satu, dan hasil pelabelan busur adalah himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, \dots, 6n - 1\}$.

Pertama, akan ditunjukan bahwa $\max_{x \in V(G)} f(x) = 6n - 1$. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar, perhatikan bahwa

$$\max_{x \in V} f(x) = \max \left\{ \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{1i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{2i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{3i}), \right.$$
$$\left. \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(v_{1i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(v_{2i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(v_{3i}) \right\}.$$

Karena $n > 4, n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ dan $0 \le i \le \frac{n}{2} - 1$ diperoleh

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(u_{1i}) = \max\left\{0, \max_{\substack{1\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{6n-3i+2\}, \max_{\substack{1\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3i+2\}\right\} = 6n-1,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(u_{2i}) = \max\left\{1, 2, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{1+3i\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{6n-3i+1\}\right\} = 6n-5,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(u_{3i}) = \max\left\{6n-6, \max_{\substack{1\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{6n-3i\}, \max_{\substack{1\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3i\}\right\} = 6n-3,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(v_{1i}) = \max\left\{\frac{3n}{2}+2, 3n+1, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{3n+3i\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3n-3i+2\}\right\}$$
$$= 3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(v_{2i}) = \max\left\{\frac{9n}{2}+1, 3n+4, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{3n-3i+3\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3n+3i+1\}\right\}$$
$$= \frac{9n}{2}+1,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(v_{3i}) = \max\left\{\frac{3n}{2}+4, 3n-3, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{3n+3i+2\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3n-3i+4\}\right\}$$
$$= 3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right)+2,$$

sehingga $\max_{x\in V(G)} f(x) = 6n-1$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa f adalah pemetaan satu-satu ke $\{0,1,\dots,2q-1\}$. Akan ditinjau daerah hasil dari $f(u_{1i}), f(u_{2i}), f(u_{3i}), f(v_{1i}), f(v_{2i})$, dan $f(v_{3i})$.

- Untuk $f(u_{1i})$, daerah hasilnya adalah $\{0\}\cup\{6n-1\}\cup\{6n-3(2k+1)+2\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1}\cup\{3(2k)+2\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} = \{0, 8, 14, \dots, \frac{3n}{2}-10, \frac{3n}{2}-4, 6n-\left(\frac{3n}{2}-3\right), 6n-\left(\frac{3n}{2}-9\right), \dots, 6n-13, 6n-7, 6n-1\}$.
- Untuk $f(u_{2i})$, daerah hasilnya adalah $\{1\}\cup\{2\}\cup\{1+3(2k+1)\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1}\cup\{6n-3(2k)+1\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} = \left\{1, 2, 10, 16, \dots, \frac{3n}{2}-8, \frac{3n}{2}-2, \frac{9n}{2}+7, \frac{9n}{2}+13, \dots, 6n-11, 6n-5\right\}$.

- Untuk, $f(u_{3i})$, daerah hasilnya adalah $\{6n-6\} \cup \{6n-3\} \cup \{6n-3(2k+1)\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} \cup \{3(2k)\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} = \{6, 12, 18, \dots, \frac{3n}{2}-12,\ \frac{3n}{2}-6,\ \frac{9n}{2}+9, \frac{9n}{2}+15, \dots, 6n-15, 6n-9, 6n-6, 6n-3\}$.
- Untuk $f(v_{1i})$, daerah hasilnya adalah $\left\{\frac{3n}{2}+2\right\} \cup \{3n+1\} \cup \{3n+3(2k+1)\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} \cup \{3n-3(2k)+2\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} = \left\{\frac{3n}{2}+2, \frac{3n}{2}+8, \frac{3n}{2}+14,\ \dots, 3n-10, 3n-4, 3n+1, 3n+9, 3n+15, \dots, \frac{9n}{2}-3\right\}$.
- Untuk $f(v_{2i})$, daerah hasilnya adalah $\left\{\frac{9n}{2}+1\right\} \cup \{3n+4\} \cup \{3n-3(2k+1)+3\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} \cup \{3n+3(2k)+1\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} = \left\{\frac{3n}{2}+6, \frac{3n}{2}+12, \dots, 3n-12, 3n-6, 3n+4, 3n+7,\ 3n+13, \dots., \frac{9n}{2}-11. \frac{9n}{2}-5, \frac{9n}{2}+1\right\}$.
- Untuk $f(v_{3i})$, daerah hasilnya adalah $\left\{\frac{3n}{2}+4\right\} \cup \{3n-3\} \cup \{3n+3(2k+1)+2\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} \cup \{3n-3(2k)+4\}_{k=1}^{\frac{n}{4}-1} = \left\{\frac{3n}{2}+4, \frac{3n}{2}+10, \frac{3n}{2}+16, \dots,\ 3n-8, 3n-2, 3n-3, 3n+11, 3n+17, \dots, \frac{9n}{2}-7, \frac{9n}{2}-1\right\}$.

Dari uraian di atas, terbukti bahwa f adalah pemetaan satu-satu ke $\{0,1, \dots, 2q-1\}$.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa label busur yang dihasilkan oleh pemetaan f adalah himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, \dots, 6n-1\}$.

Tinjau label busur $u_{1i}u_{1i+1}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2}-1$:

- untuk $i=0$, $|0-(6n-3+2)| = 6n-1$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i genap, $|3i+2-(6n-3(i+1)+2)| = 6n-6i-3$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i ganjil, $|6n-3i+2-(3(i+1)+2)| = 6n-6i-3$.

Dengan demikian, diperoleh label busur $u_{1i}u_{1i+1}$ adalah $\{6n-1, 6n-9, 6n-15, 6n-21, 6n-27, \dots, 3n+9\}$,

Tinjau label busur $u_{1i}u_{2i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2}-1$:

- untuk $i=0$, $|0-1| = 1$;
- untuk $i=1$, $|6n-3+2-2| = 6n-3$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i genap, $|3i+2-(6n-3i+1)| = 6n-6i-1$; dan
- untuk $1 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i ganjil, $|6n-3i+2-(3i+1)| = 6n-6i+1$.

Dengan demikian, diperoleh label busur $u_{1i}u_{2i}$ adalah $\{1, 6n-3, 6n-13, 6n-17, 6n-25, 6n-29, \dots, 3n+11, 3n+7\}$.

Tinjau label busur $u_{2i}u_{3i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2}-1$:

- untuk $i = 0$, $|1-(6n-6)| = 6n-7$;
- untuk $i = 1$,$|6n-3-2| = 6n-5$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i genap, $|6n-3i+1-3i| = 6n-6i+1$; dan
- untuk $1 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i ganjil, $|6n-3i-(3i+1)| = 6n-6i-1$.

Dengan demikian, diperoleh label busur $u_{2i}u_{3i}$ adalah $\{6n-5,6n-7,6n-11,6n-19,6n-23,6n-31,\ldots,3n+13,3n+5\}$.

Tinjau label busur $v_{1i}v_{1i+1}$ untuk $1 \le i < \frac{n}{2}-1$:

- untuk $i = 0$, $|1-(6n-6)| = 6n-7$;
- untuk $i = 1$, $|6n-3-2| = 6n-5$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i genap, $|6n-3i+1-3i| = 6n-6i+1$; dan
- untuk $1 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i ganjil, $|6n-3i-(3i+1)| = 6n-6i-1$.

Dengan demikian, diperoleh label busur $v_{1i}v_{1(i+1)}$ adalah $\{5,13,19,25,\ldots,3n-11\}$.

Tinjau label busur $v_{1i}v_{2i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2}-1$:

- untuk $i = 0$, $\left|\frac{3n}{2}+2-\left(\frac{9n}{2}+1\right)\right| = 3n-1$;
- untuk $i = 1$,$|3n+4-(3n+1)| = 3$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i genap, $|(3n-3i+2)-(3n+3i+1)| = 6i-1$;
- untuk $1 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i ganjil, $|3i+3n-(3n-3i+3)| = 6i-3$.

Dengan demikian, diperoleh label busur $v_{1i}v_{2i}$ adalah $\{3,11,15,23,27,\ldots,3n-13,3n-9,3n-1\}$.

Tinjau label busur $v_{2i}v_{3i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2}-1$:

- untuk $i = 0$, $\left|\frac{3n}{2}+4-\left(\frac{9n}{2}+1\right)\right| = 3n-3$;
- untuk $i = 1$, $|3n+4-(3n-3)| = 7$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i genap, $|(3n-3i+4)-(3n+3i+1)| = 6i-3$;
- untuk $1 < i < \frac{n}{2}-1$ dan i ganjil, $|3n-3i+3-(3n+3i+2)| = 6i-1$.

Dengan demikian, diperoleh label busur $v_{2i}v_{3i}$ adalah $\{7,9,17,21,\ldots,3n-15,3n-7,3n-3\}$.

Perhatikan pula label busur $u_{10}v_{11}$ adalah $|0-3n-1| = 3n+1$. Label busur $v_{10}u_{1\left(\frac{n}{2}-1\right)}$ adalah $\left|\frac{3n}{2}+2-\left(\frac{9n}{2}-1\right)\right| = 3n+3$. Label busur $v_{1\left(\frac{n}{2}-1\right)}v_{10}$ adalah $\left|3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right)-\frac{3n}{2}-2\right| = 3n-5$. Akibatnya, terbukti bahwa label busur yang dihasilkan oleh pemetaan f adalah himpunan bilangan ganjil $\{1,3,5,\ldots,6n-1\}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk $n \equiv 0(\text{mod } 4)$, $C_n \rhd_v P_3$ *odd-graceful*.

Kasus 3. Untuk $n > 4, n \equiv 2 (\text{mod } 4)$, perhatikan pelabelan simpul f berikut:

$$f(u_{1i}) = \begin{cases} 0 & , i = 0, \\ 6n - 3i + 2 & , i \text{ ganjil}, \\ 3i + 2 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(u_{2i}) = \begin{cases} 1 & , i = 0, \\ 2 & , i = 1, \\ 1 + 3i & , i \text{ ganjil dan } i > 1, \\ 6n - 3i + 1 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(u_{3i}) = \begin{cases} 6n - 6 & , i = 0, \\ 6n - 3i & , i \text{ ganjil}, \\ 3i & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(v_{1i}) = \begin{cases} \frac{9n}{2} & , i = 0, \\ 3n + 3i & , i \text{ ganjil}, \\ 3n - 3i + 2 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(v_{2i}) = \begin{cases} \frac{3n}{2} + 1 & , i = 0, \\ 3n - 3i + 1 & , i \text{ ganjil}, \\ 3n + 3i - 1 & , i \text{ genap dan } i > 0, \end{cases}$$

$$f(v_{3i}) = \begin{cases} \frac{9n}{2} - 2 & , i = 0, \\ 3n + 3i - 2 & , i \text{ ganjil}, \\ 3n - 3i & , i \text{ genap dan } i > 0. \end{cases}$$

Serupa dengan kasus 2, untuk membuktikan pelabelan f menghasilkan pelabelan *odd-graceful*, akan dibuktikan bahwa $\max_{x \in V(G)} f(x) = 6n - 1$, f adalah pemetaan satu-satu, dan hasil pelabelan busur adalah himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, \dots, 6n - 1\}$.

Pertama, akan ditunjukan bahwa $\max_{x \in V(G)} f(x) = 6n - 1$. Dengan cara yang serupa, perhatikan bahwa

$$\max_{x \in V} f(x) = \max \left\{ \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{1i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{2i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{3i}), \right.$$
$$\left. \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(v_{1i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(v_{2i}), \max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(v_{3i}) \right\}.$$

Karena $n > 4, n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ dan $0 \le i \le \frac{n}{2} - 1$ didapat

$$\max_{0 \le i \le \frac{n}{2} - 1} f(u_{1i}) = \max \left\{ 0, \max_{\substack{1 \le i \le \frac{n}{2} - 1 \\ i \text{ ganjil}}} \{6n - 3i + 2\}, \max_{\substack{1 \le i \le \frac{n}{2} - 1 \\ i \text{ genap}}} \{3i + 2\} \right\}$$
$$= \max \left\{ 0, 6n - 1, 3\left(\frac{n}{2} - 2\right) + 2 \right\} = 6n - 1,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(u_{2i}) = \max\left\{1, 2, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{1+3i\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{6n-3i+1\}\right\}$$
$$= \max\left\{1, 2, 1+3\left(\frac{n}{2}-1\right), 6n-5\right\} = 6n-5,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(u_{3i}) = \max\left\{6n-6, \max_{\substack{1\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{6n-3i\}, \max_{\substack{1\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3i\}\right\}$$
$$= \max\left\{6n-6, 6n-3, 3\left(\frac{n}{2}-2\right)\right\} = 6n-3,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(v_{1i}) = \max\left\{\frac{9n}{2}, \max_{\substack{0\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{3n+3i\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3n-3i+2\}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{9n}{2}, 3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right), 3n-4\right\} = \frac{9n}{2},$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(v_{2i}) = \max\left\{\frac{3n}{2}+1, \max_{\substack{0\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{3n-3i+1\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3n+3i-1\}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{3n}{2}+1, 3n-2, 3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right)-1\right\}$$
$$= 3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right)-1,$$

$$\max_{0\le i\le \frac{n}{2}-1} f(v_{3i}) = \max\left\{\frac{9n}{2}-2, \max_{\substack{0\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ ganjil}}}\{3n+3i-2\}, \max_{\substack{2\le i\le \frac{n}{2}-1\\ i \text{ genap}}}\{3n-3i\}\right\}$$
$$= \max\left\{\frac{9n}{2}-2, 3n+3\left(\frac{n}{2}-1\right)-2, 3n-6\right\} = \frac{9n}{2}-2,$$

sehingga $\max_{x\in V(G)} f(x) = 6n-1$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa f adalah pemetaan satu-satu ke $\{0,1,\ldots,2q-1\}$. Akan ditinjau daerah hasil dari $f(u_{1i}), f(u_{2i}), f(u_{3i}), f(v_{1i}), f(v_{2i})$, dan $f(v_{3i})$.

- Untuk $f(u_{1i})$, daerah hasilnya adalah $\{0\} \cup \{6n-1\} \cup \{6n-3(2k+1)+2\}_{k=1}^{\frac{n-6}{4}} \cup \{3(2k)+2\}_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} = \left\{0, 8, 14, \ldots, \frac{3n}{2}-1, 6n-\left(\frac{3n}{2}-8\right), 6n-\left(\frac{3n}{2}-14\right), \ldots, 6n-13, 6n-7, 6n-1\right\}$.
- Untuk $f(u_{2i})$, daerah hasilnya adalah $\{1\} \cup \{2\} \cup \{1+3(2k+1)\}_{k=1}^{\frac{n-6}{4}} \cup \{6n-$

$3(2k)+1\}_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} = \left\{1, 2, 10, 16, \dots, \frac{3n}{2} - 11, \frac{3n}{2} - 5, 6n - \left(\frac{3n}{2} - 4\right), 6n - \left(\frac{3n}{2} - 10\right), \dots, 6n - 11, 6n - 5\right\}$.

- Untuk $f(u_{3i})$, daerah hasilnya adalah $\{6n-6\} \cup \{6n - 3(2k+1)\}_{k=0}^{\frac{n-6}{4}} \cup \{3(2k)\}_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} = \left\{6, 12, 18, \dots, \frac{3n}{2} - 9, \frac{3n}{2} - 3, 6n - \left(\frac{3n}{2} - 6\right), 6n - \left(\frac{3n}{2} - 12\right), \dots, 6n - 9, 6n - 3\right\}$.
- Untuk $f(v_{1i})$, daerah hasilnya adalah $\left\{\frac{9n}{2}\right\} \cup \{3n + 3(2k+1)\}_{k=0}^{\frac{n-6}{4}} \cup \{3n - 3(2k) + 2\}_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} = \left\{3n - \left(\frac{3n}{2} - 5\right), 3n - \left(\frac{3n}{2} + 11\right), \dots, 3n - 10, 3n - 4, 3n + 3, 3n + 9, \dots, 3n + \left(\frac{3n}{2} - 12\right), 3n + \left(\frac{3n}{2} - 6\right), \frac{9n}{2}\right\}$.
- Untuk $f(v_{2i})$, daerah hasilnya adalah $\left\{\frac{3n}{2} + 1\right\} \cup \{3n - 3(2k+1) + 1\}_{k=0}^{\frac{n-6}{4}} \cup \{3n + 3(2k) - 1\}_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} = \left\{\frac{3n}{2} + 1, 3n - \left(\frac{3n}{2} - 7\right), 3n - \left(\frac{3n}{2} - 13\right), \dots, 3n - 8, 3n - 2, 3n + 5, 3n + 11, 3n + 17, \dots, 3n + \left(\frac{3n}{2} - 10\right), 3n + \left(\frac{3n}{2} - 4\right)\right\}$.
- Untuk $f(v_{3i})$, daerah hasilnya adalah $\left\{\frac{9n}{2} - 2\right\} \cup \{3n+1\} \cup \{3n + 3(2k+1) - 2\}_{k=1}^{\frac{n-6}{4}} \cup \{3n - 3(2k)\}_{k=1}^{\frac{n-2}{4}} = \left\{3n - \left(\frac{3n}{2} - 3\right), 3n - \left(\frac{3n}{2} - 9\right), \dots, 3n - 12, 3n - 6, 3n + 1, 3n + 7, 3n + 13, \dots, 3n + \left(\frac{3n}{2} - 14\right), 3n + \left(\frac{3n}{2} - 8\right), \frac{9n}{2} - 2\right\}$.

Dari uraian di atas, terlihat bahwa fungsi f adalah pemetaan injektif ke $\{0,1,\dots,2q-1\}$.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa label busur yang dihasilkan oleh pemetaan f adalah himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, \dots, 6n-1\}$.

Tinjau label busur $u_{1i}u_{1i+1}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2} - 1$:

- untuk $i = 0$, $|0 - (6n - 3 + 2)| = 6n - 1$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i genap, $|3i + 2 - (6n - 3(i+1) + 2)| = 6n - 6i - 3$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i ganjil, $|6n - 3i + 2 - (3(i+1) + 2)| = 6n - 6i - 3$.

Dengan demikian, diperoleh labelnya adalah $\{6n-1, 6n-9, 6n-15, 6n-21, 6n-27, \dots, 3n+9\}$.

Tinjau label busur $u_{1i}u_{2i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2} - 1$:

- untuk $i = 0$, $|0 - 1| = 1$;
- untuk $i = 1$, $|6n - 3 + 2 - 2| = 6n - 3$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i genap, $|3i + 2 - (6n - 3i + 1)| = 6n - 6i - 1$; dan
- untuk $1 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i ganjil, $|6n - 3i + 2 - (3i + 1)| = 6n - 6i + 1$.

Dengan demikian, diperoleh labelnya adalah $\{1, 6n-3, 6n-13, 6n-17, 6n-25, 6n-29, \ldots, 3n+11, 3n+7\}$.

Tinjau label busur $u_{2i}u_{3i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2} - 1$:

- untuk $i = 0$, $|1-(6n-6)| = 6n-7$;
- untuk $i = 1$, $|6n-3-2| = 6n-5$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i genap, $|6n-3i+1-3i| = 6n-6i+1$; dan
- untuk $1 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i ganjil, $|6n-3i-(3i+1)| = 6n-6i-1$.

Dengan demikian, diperoleh labelnya adalah $\{6n-5, 6n-7, 6n-11, 6n-19, 6n-23, 6n-31, \ldots, 3n+13, 3n+5\}$.

Tinjau label busur $v_{1i}v_{1i+1}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2} - 1$:

- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i genap, $\left|3n-3i+2-\left(3n+3(i+1)\right)\right| = 6i+1$;
- untuk $1 \le i < \frac{n}{2} - 1$ dan i ganjil, $|3n+3i-(3n-3(i+1)+2| = 6i+1$.

Dengan demikian, diperoleh labelnya adalah $\{7, 13, 19, \ldots, 3n-17, 3n-11\}$.

Tinjau label busur $v_{1i}v_{2i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2} - 1$:

- untuk $i = 0$, $\left|\frac{9n}{2} - \frac{3n}{2} - 1\right| = 3n-1$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i genap, $|(3n-3i+2)-(3n+3i-1)| = 6i-3$;
- untuk $1 \le i < \frac{n}{2} - 1$ dan i ganjil, $|3i+3n-(3n-3i+3)| = 6i-3$.

Dengan demikian, diperoleh labelnya adalah $\{5, 9, 17, 21, 29, 33, \ldots, 3n-13, 3n-9, 3n-1\}$.

Tinjau label busur $v_{2i}v_{3i}$ untuk $0 \le i < \frac{n}{2} - 1$:

- untuk $i = 0$, $\left|\frac{3n}{2} + 1 - \left(\frac{9n}{2} - 2\right)\right| = 3n-3$;
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i genap, $|(3n+3i-1)-(3n-3i)| = 6i-1$; dan
- untuk $0 < i < \frac{n}{2} - 1$ dan i ganjil, $|3n-3i+1-(3n+3i-2)| = 6i-3$.

Dengan demikian, diperoleh labelnya adalah $\{3,11,15,23, \ldots ,3n-15,3n-7,3n-3\}$.

Label busur $u_{10}v_{11}$ adalah $|0-3n-1| = 3n+1$. Label busur $v_{10}u_{1\left(\frac{n}{2}-1\right)}$ adalah $\left|\frac{9n}{2} - (\frac{3n}{2} - 3)\right| = 3n+3$. Label busur $v_{1\left(\frac{n}{2}-1\right)}v_{10}$ adalah $\left|3n-3(\frac{n}{2}-1)+2-\frac{9n}{2}\right| = 3n-5$. Akibatnya, terbukti bahwa label busur yang dihasilkan oleh pemetaan f adalah himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, \ldots, 6n-1\}$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, $C_n \rhd_v P_3$ *odd-graceful*. □

3. Kesimpulan

Pada penelitian ini, telah diperlihatkan bahwa graf $C_n \rhd_v P_3$ adalah graf yang *odd-graceful*. Ke depannya, dapat diselidiki apakah graf $C_n \rhd_v P_n$ memiliki pelabelan *odd-graceful* atau tidak.

Daftar Pustaka

[1] Rosa, A., (1996), On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966), Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris*, 349-355.

[2] Brankovic, L., Wanless, I.M., (2011), Graceful labelling: State of the art, applications and future directions, *Math. Comput. Sci.* **5**, 11-20.

[3] Suparta, I.N., Ariawan, I.D.M.A., (2018), Some methods for constructing some classes of graceful uniform trees, *Indonesian Journal of Combinatorics* **2(2)**, 123-135. https://doi.org/10.19184/ijc.2018.2.2.7

[4] Suparta, I.N., Ariawan, I.D.M.A., (2020), Expanding graceful trees, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* **8(2)**, 217-232. http://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2020.8.2.2

[5] Cattell, R., (2007), Graceful labellings of paths, *Discrete Mathematics* **307**, 3161-3176. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.03.046

[6] Barrientos, C., (2005), Graceful graphs with pendant edges, *Australasian Journal of Combinatorics* **33**, 99-107.

[7] Barrientos, C., (2020), Alpha graphs with different pendant paths, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* **8(2)**, 301-317. https://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2020.8.2.8

[8] Truszczynski, M., (1984), Graceful unicyclic graphs, *Demonstratio Mathematica* **17(2)**, 377-387.

[9] Biatch, M.P., Bagga, J.S., Arumugam, S., (2020), A survey and a new class of graceful unicylic graphs, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* **17(2)**, 673-678. https://doi.org/10.1080/09728600.2020.1832853

[10] Gnanajothi, R., (1991), Topics in Graph Theory, *Ph.D. Thesis*, Madurai Kamaraj University, p. 182.

[11] Moussa, M.I., Badr, E., (2009), Odd graceful labelings of crown graphs, 1st *Internat. Conf. Comp. Sci. Algor. Appl.*, 1-5.

[12] Badr, E., Moussa, M.I., Kathiresan, K., (2011), Crown graphs and subdivision of ladders are odd graceful, *Internat. J. Computer Math.* **88(17)**, 3570-3576. https://doi.org/10.1080/00207160.2011.610893

[13] Moussa, M.I., (2010), An algorithm for odd graceful labeling of the union of paths and cycles, *Internat. J. Appl. Graph Theory in Wireless ad hoc Networks (Graph Hoc)* **2(1)**, 112-119. DOI:10.5121/jgraphhoc.2010.2108 https://zenodo.org/record/1324619#.Yi4R53pBw2w

[14] Gallian, J., (2020), A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* **19 #DS6**, 73-76. https://doi.org/10.37236/27

[15] Saputro, S.W., Mardiana, N., Purwasih, I.A., (2017), The metric dimension of comb product graphs, *Math. Vesnik* **69(4)**, 248-258.