

# ANALISIS KESTABILAN LOKAL TITIK EKUILIBRIUM MODEL EPIDEMI SEIV DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK

*(Local Stability Analysis of the SEIV Epidemic Model with Logistic Growth)*

Joko Harianto<sup>1\*</sup>, Inda Puspita Sari<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Fakultas MIPA, Universitas Cenderawasih

<sup>2)</sup>Fakultas Kedokteran, Universitas Cenderawasih

*Jl. Kampwolker, Kota Jayapura 99358, Papua*

e-mail: \*)joharijpr88@gmail.com, indasarira@yahoo.co.id

\*)penulis korespondensi

**Abstract.** The SEIV model uses population growth which is assumed to follow logistical growth. The model is studied then analyzed. The analysis shows that the non-endemic (disease-free) equilibrium point is locally asymptotically stable when the basic reproduction number less than one, while the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable when the basic reproduction number greater than one. Then a numerical simulation was carried out using Maple software to support the results of the local stability analysis of the equilibrium point. Based on numerical simulations, it shows that a disease will disappear from the population when the basic reproduction number less than one and for a long time a disease will remain in the population (still an epidemic) when the basic reproduction number greater than one.

**Keywords:** SEIV model, logistical growth, equilibrium point, basic reproduction number

**MSC2020:** 92C60

---

Received: 13-02-2022, accepted: 19-03-2022

## 1. Pendahuluan

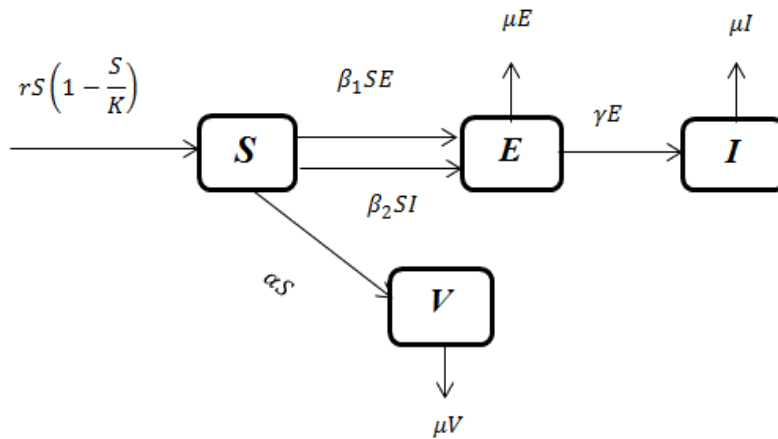
Vaksinasi saat ini merupakan tindakan yang sering digunakan untuk mengendalikan penyebaran suatu penyakit di wilayah tertentu [1]. Moghadas dan J. Hui telah membahas model dengan melibatkan vaksinasi [2–3]. Model yang melibatkan vaksinasi terus dikembangkan untuk lebih memahami perilaku dinamis penyebaran penyakit menular secara kualitatif dan kuantitatif [4–14]. Namun, populasi pada semua model yang telah dibahas tersebut diasumsikan tumbuh secara eksponensial. Kenyataannya, Verhulst mengemukakan bahwa populasi tidak selamanya naik secara eksponensial. Pertumbuhan logistik perlu dilibatkan dalam model agar model tersebut lebih representatif dalam mendeskripsikan penyebaran penyakit yang terjadi baik secara kuantitatif maupun kualitatif. Dengan demikian, analisis model epidemi SEIV yang melibatkan pertumbuhan populasi secara logistik perlu dipelajari. Pembahasan model epidemi SEIV yang melibatkan pertumbuhan logistik pada populasinya hingga saat ini belum pernah dibahas. Oleh karena itu, tujuan dari pembahasan ini adalah menganalisis kestabilan lokal model epidemi SEIV yang melibatkan pertumbuhan logistik pada populasinya.

## 2. Metodologi

Pembahasan ini dilakukan dengan menggunakan metode literature review. Parameter yang digunakan dalam model bersumber dari beberapa jurnal ilmiah internasional. Landasan teori yang digunakan yaitu teori kestabilan sistem dinamik dan formulasi *the basic reproduction number* pada sistem dinamik [15–16]. Alur pembahasan dimulai dari mempelajari model epidemi SEIV dalam [5], kemudian model tersebut dimodifikasi dengan asumsi populasinya tumbuh secara logistik. Verhulst mengemukakan bahwa populasi tidak selamanya naik secara eksponensial. Pertumbuhan logistik perlu dilibatkan dalam model agar model tersebut lebih representatif dalam mendeskripsikan penyebaran penyakit yang terjadi baik secara kuantitatif maupun kualitatif. Dengan demikian, analisis model epidemi SEIV yang melibatkan pertumbuhan populasi secara logistik perlu dipelajari. Model yang dibentuk merupakan sistem persamaan diferensial non linier. Kemudian sistem tersebut dianalisis kestabilan titik ekuilibriumnya. Simulasi numerik model juga diberikan dalam pembahasan ini untuk mendukung hasil analisis yang telah diperoleh.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Pada model epidemi SEIV, populasi dalam suatu lingkungan diklasifikasikan kedalam empat subpopulasi antara lain subpopulasi rentan (*Susceptible*), subpopulasi terpapar (*Exposed*), subpopulasi terinfeksi (*Infected*) dan subpopulasi vaksinasi (*Vaccination*). Jumlah individu dalam populasi bergantung pada waktu. Oleh karena itu, Jumlah individu dalam populasi merupakan suatu fungsi terhadap waktu. Waktu dinyatakan sebagai variabel  $t$ . Jumlah subpopulasi rentan pada saat  $t$  dinotasikan dengan  $S(t)$ , jumlah subpopulasi terpapar pada saat  $t$  dinotasikan dengan  $E(t)$ , jumlah subpopulasi terinfeksi pada saat  $t$  dinotasikan dengan  $I(t)$  dan jumlah subpopulasi vaksinasi pada saat  $t$  dinotasikan dengan  $V(t)$ . Populasi dalam pembahasan ini diasumsikan tertutup, populasi bertambah karena terjadi kelahiran, kematian alami terjadi pada semua subpopulasi, pasien yang telah sembuh dari penyakit memperoleh kekebalan secara permanen, adanya kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu yang rentan, ataupun dengan individu yang terpapar menjadi pemicu penyebaran penyakit, kelahiran terjadi di setiap subpopulasi dan rentan terhadap penyakit. Secara skematik proses perubahan jumlah populasi karena epidemi disajikan dalam Gambar 1. Parameter  $r$  menyatakan koefisien laju pertumbuhan intrinsik yang masuk pada subpopulasi rentan,  $K$  menyatakan koefisien kapasitas lingkungan,  $\mu$  menyatakan koefisien laju kematian alami pada masing-masing subpopulasi,  $\beta_1$  menyatakan koefisien laju transmisi (laju kontak) oleh individu terpapar,  $\beta_2$  menyatakan koefisien laju transmisi (laju kontak) oleh individu terinfeksi penyakit,  $\gamma$  menyatakan koefisien laju individu dari kondisi terpapar menjadi terinfeksi penyakit dan  $\alpha$  menyatakan koefisien laju pemberian vaksin pada individu yang rentan pada penyakit.



Gambar 1. Diagram skematik model epidemi SEIV

Model epidemi *SEIV* secara matematis dirumuskan sebagai sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha S - \beta_1 SE - \beta_2 SI, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta_1 SE + \beta_2 SI - \gamma E - \mu E, \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - \mu I, \\ \frac{dV}{dt} &= \alpha S - \mu V, \end{aligned} \tag{1}$$

dengan  $S, E, I, V \geq 0$ , untuk setiap  $t \geq t_0$ . Jika  $I = 0$ , maka diperoleh titik ekuilibrium non-endemik yaitu

$$P_0(S^*, E^*, I^*, V^*) = P_0\left(\frac{K(r - \alpha)}{r}, 0, 0, \frac{\alpha K(r - \alpha)}{r\mu}\right)$$

dan jika  $I$  bernilai positif maka diperoleh titik ekuilibrium endemik, yaitu  $P_1(S^{**}, E^{**}, I^{**}, V^{**})$ , dengan  $S^{**} = \frac{(\gamma + \mu)\mu}{(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)}$ ;  $E^{**} = \frac{\mu(K(\mu\beta_1 + \beta_2\gamma)(r - \alpha) - r\mu(\gamma + \mu))}{K(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)^2}$ ;  $I^{**} = \frac{\gamma(K(\mu\beta_1 + \beta_2\gamma)(r - \alpha) - r\mu(\gamma + \mu))}{K(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)^2}$ ; dan  $V^{**} = \frac{\alpha(\gamma + \mu)}{\mu\beta_1 + \gamma\beta_2}$ .

Dengan menggunakan ide dari Driessche [15], diperoleh bilangan reproduksi dasar untuk Sistem (1), adalah:

$$R_0 = \frac{\gamma\beta_2 K(r - \alpha)}{\mu(\gamma r + \mu r - \beta_1 K r + \beta_1 K \alpha)}.$$

Nilai  $R_0$  selanjutnya digunakan sebagai syarat cukup eksistensi titik ekuilibrium sekaligus kestabilan titik ekuilibrium Sistem (1).

**Teorema 1.** Jika  $R_0 \leq 1$  dan  $r > \alpha$  maka terdapat satu (tunggal) titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$ . Selanjutnya, jika  $r\gamma + r\mu > \beta_1 K(r - \alpha)$  dan  $R_0 > 1$ , maka diperoleh dua titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$  dan endemik  $P_1$ .

**Bukti.** Saat  $I = 0$  diperoleh titik ekuilibrium non-endemik  $P_0 = (S^*, E^*, I^*, V^*)$ . Selanjutnya, perhatikan bahwa  $S^*$  dan  $V^*$  merupakan jumlah subpopulasi yang bernilai positif dengan  $r > \alpha$ . Eksistensi titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$  tidak bergantung pada  $R_0$ , sehingga untuk setiap kondisi yang melibatkan  $R_0$  titik ekuilibrium non-endemik selalu ada. Selanjutnya dari Sistem (1) diperoleh titik ekuilibrium endemik yaitu  $P_1(S^{**}, E^{**}, I^{**}, V^{**})$  dengan  $S^{**} = \frac{(\gamma + \mu)\mu}{(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)}$ ;  $E^{**} = \frac{\mu(K(\mu\beta_1 + \beta_2\gamma)(r - \alpha) - r\mu(\gamma + \mu))}{K(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)^2}$ ;  $I^{**} = \frac{\gamma(K(\mu\beta_1 + \beta_2\gamma)(r - \alpha) - r\mu(\gamma + \mu))}{K(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)^2}$ ; dan  $V^{**} = \frac{\alpha(\gamma + \mu)}{\mu\beta_1 + \gamma\beta_2}$ .

Perhatikan bahwa  $S^{**}$  dan  $V^{**}$  bernilai positif karena semua parameter model bernilai positif. Nilai  $E^{**}$  dan  $I^{**}$  ekuivalen dengan  $E^{**} = \frac{\mu(r\gamma + r\mu - \beta_1 K(r - \alpha))}{K(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)^2} (R_0 - 1)$  dan  $I^{**} = \frac{\gamma(r\gamma + r\mu - \beta_1 K(r - \alpha))}{K(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2)^2} (R_0 - 1)$ . Nilai  $E^{**}$  dan  $I^{**}$  positif jika  $r\gamma + r\mu > \beta_1 K(r - \alpha)$  dan  $R_0 > 1$ . Dengan kata lain, jika  $r\gamma + r\mu > \beta_1 K(r - \alpha)$  dan  $R_0 > 1$  dipenuhi maka diperoleh satu titik ekuilibrium endemik, yaitu  $P_1(S^{**}, E^{**}, I^{**}, V^{**})$  pada Sistem (1). Akibatnya, secara keseluruhan diperoleh dua titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$  dan endemik  $P_1$ .

**Teorema 2.** Jika  $R_0 \leq 1$ ,  $r > \alpha$  dan  $\gamma + \mu > \frac{\beta_1 K(r - \alpha)}{r}$  maka titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$  tidak stabil.

**Bukti.** Persamaan terakhir pada Sistem (1) tidak berpengaruh terhadap persamaan lainnya sehingga matriks Jacobian Sistem (1) dapat direduksi menjadi

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{S^*}{K}\right) - \frac{rS^*}{K} - \alpha & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ 0 & \beta_1 S^* - \gamma - \mu & \beta_2 S^* \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari  $J(P_0)$  adalah

$$\left[\lambda - r + \frac{2rS^*}{K} + \alpha\right][(\lambda - \beta_1 S^* + \gamma + \mu)(\lambda + \mu) - \gamma\beta_2 S^*] = 0,$$

sehingga diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = \alpha - r$ . Karena syarat  $r > \alpha$  maka  $\lambda_1$  bernilai negatif. Selanjutnya dari persamaan  $(\lambda - \beta_1 S^* + \gamma + \mu)(\lambda + \mu) - \gamma\beta_2 S^*$  diperoleh persamaan karakteristik  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$  dengan  $a_1 = -\beta_1 S^* + \gamma + 2\mu$  dan  $a_0 = (\gamma + \mu - \beta_1 S^*)\mu - \gamma\beta_2 S^*$ . Jika dilibatkan  $R_0$ , maka

$$a_1 = \mu + (\gamma + \mu - \beta_1 S^*)(1 - R_0) + \frac{\gamma\beta_2 S^*}{\mu} \text{ dan } a_0 = (\gamma + \mu - \beta_1 S^*)\mu(1 - R_0).$$

Karena  $R_0 < 1$  dan  $\gamma + \mu > \frac{\beta_1 K(r - \alpha)}{r}$  maka  $a_1 > 0$  dan  $a_0 > 0$ . Dengan demikian, seluruh akar persamaan karakteristik tersebut bernilai negatif berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz. Jadi disimpulkan bahwa titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal karena seluruh nilai eigen dari matriks  $J(P_0)$  bernilai negatif.

**Teorema 3.** Jika  $R_0 > 1$ ,  $\gamma + \mu > \beta_1 S^{**}$  atau  $(\gamma + \mu)(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2) > \beta_2$  dan  $\beta_1\mu + \beta_2\gamma < 1$  maka titik ekuilibrium endemik  $P_1$  stabil asimtotik secara lokal.

**Bukti.** Jelas bahwa titik ekuilibrium endemik  $P_1$  ada saat  $R_0 > 1$ , maka matriks Jacobian dari  $J(P_1)$  adalah

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rs}{K} - \alpha - \beta_1 E^{**} - \beta_2 I^{**} & -\beta_1 S^{**} & -\beta_2 S^{**} \\ \beta_1 E^{**} + \beta_2 I^{**} & \beta_1 S^{**} - \gamma - \mu & \beta_2 S^{**} \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik  $J(P_1)$  yaitu  $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$  dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu + \gamma + \mu - \beta_1 S^{**} + \frac{rS^{**}}{K}, \\ b_2 &= \frac{rS^{**}}{K}(\mu + \gamma + \mu - \beta_1 S^{**}) + (\beta_1 E^{**} + \beta_2 I^{**})\beta_1 S^{**}, \\ b_3 &= (\beta_1 E^{**} + \beta_2 I^{**})(\beta_1 S^{**}\mu + \beta_2 \gamma S^{**}) > 0, \\ b_1 b_2 - b_3 &= \left(\mu + \frac{\beta_2 \gamma S^{**}}{\mu} + \frac{rS^{**}}{K}\right) \left(\frac{rS^{**}}{K} \left(\mu + \frac{\beta_2 \gamma S^{**}}{\mu}\right)\right) + (\gamma + \mu)E^{**}(1 - (\beta_1\mu + \beta_2\gamma)). \end{aligned}$$

Nilai  $b_1$  dan  $b_2$  positif karena  $\gamma + \mu > \beta_1 S^{**}$  atau  $(\gamma + \mu)(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2) > \beta_2(\gamma + \mu)\mu$ . Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, semua akar persamaan karakteristiknya bernilai negatif jika dipenuhi  $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$  dan  $b_1 b_2 - b_3 > 0$ . Kemudian,  $b_1 b_2 - b_3$  bernilai positif karena  $\beta_1\mu + \beta_2\gamma < 1$ . Dengan demikian syarat  $b_1 b_2 - b_3 > 0$  dipenuhi. Jadi, titik ekuilibrium  $P_1(S^{**}, E^{**}, I^{**})$  stabil asimtotik secara lokal.

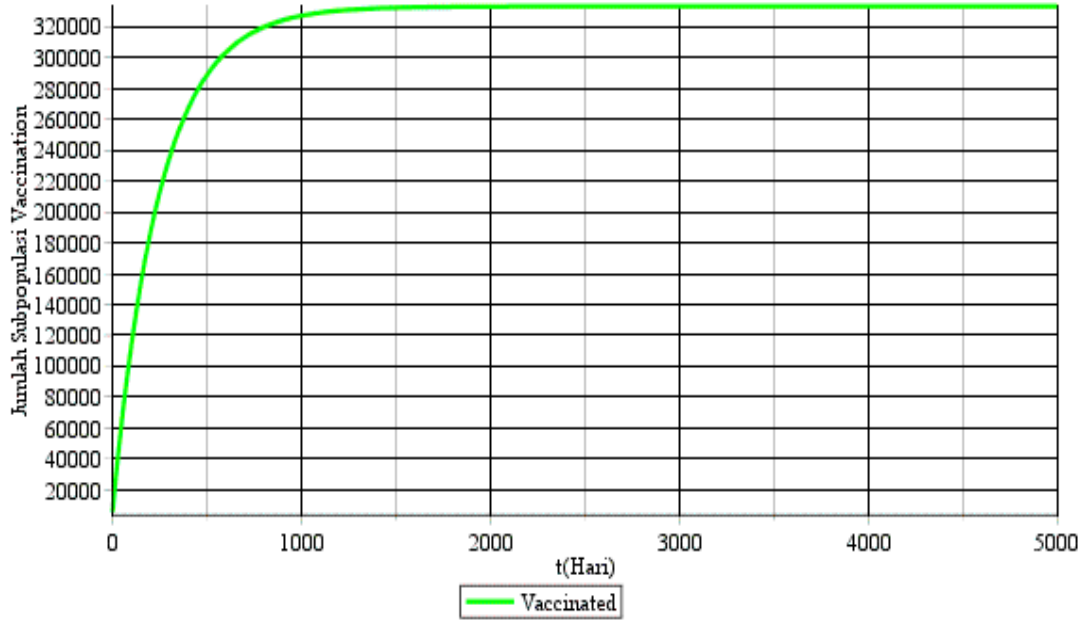
Berikut ini digambarkan solusi numerik Sistem (1) menggunakan *Maple*. Simulasi ini diberikan untuk mendukung hasil analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium  $P_0$  dan  $P_1$  yang telah diperoleh. Simulasi numerik Sistem (1) diuraikan berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar.

Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi numerik saat  $R_0 < 1$

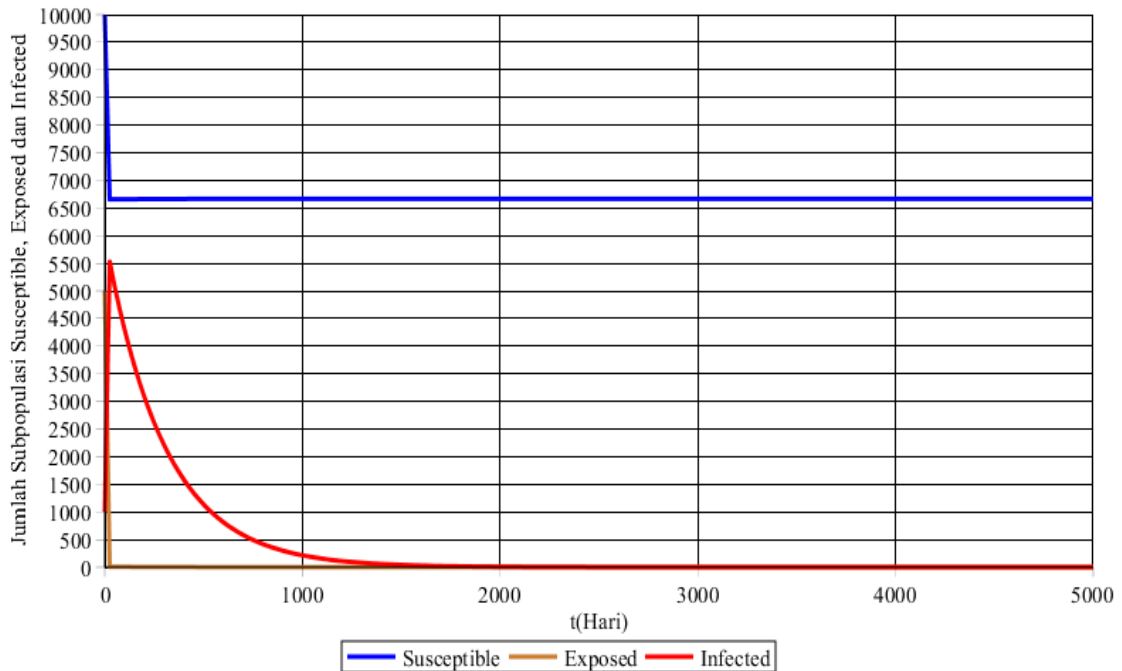
Parameter	Estimasi
$r$	0,6 per hari
$K$	10.000 jiwa
$\alpha$	0,2 per hari
$\gamma$	0,5 per hari
$\beta_1$	0,0000002 per hari
$\beta_2$	0,0000001 per hari
$\mu$	0,004 per hari

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1 didapatkan bilangan reproduksi dasarnya sebesar 0.17 ( $R_0 < 1$ ). Jumlah awal masing-masing subpopulasi, yaitu  $S(0) = 10.000, E(0) = 5.000, I(0) = 1.000$  dan  $V(0) = 5.500$ . Dari hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium secara analitik diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0(6.666; 0; 0; 333.333)$ . Dari hasil simulasi numerik dengan menggunakan *software*

Maple diperoleh grafik yang menunjukkan hubungan jumlah subpopulasi yang rentan, subpopulasi terpapar, subpopulasi yang terinfeksi dan subpopulasi yang telah mengalami proses vaksinasi terhadap variabel waktu sebagai berikut.



Gambar 2. Grafik jumlah subpopulasi  $V$  terhadap waktu ( $t$ ) saat  $R_0 < 1$



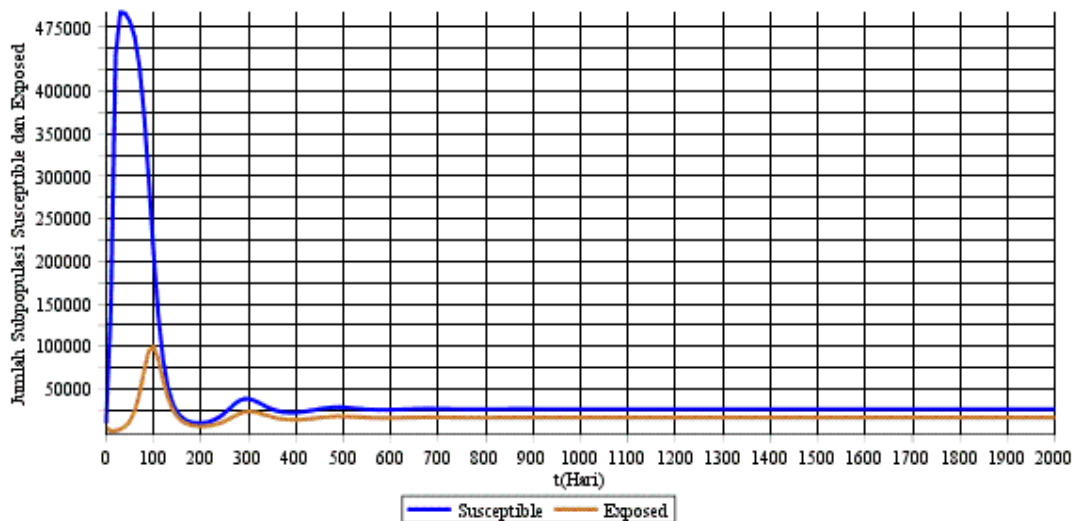
Gambar 3. Grafik jumlah subpopulasi  $S$ ,  $E$  dan  $I$  terhadap waktu ( $t$ ) saat  $R_0 < 1$

Gambar 2 menunjukkan bahwa dalam waktu kurang dari 1.000 hari, jumlah individu yang telah mengalami proses vaksinasi mengalami peningkatan dari yang awalnya 5.500 naik mendekati angka 333.333 dan sampai waktu yang tak terhingga jumlah individu relatif stabil di angka 333.333. Gambar 3 menunjukkan bahwa dalam waktu kurang dari 100 hari, jumlah individu yang rentan mengalami penurunan dari yang awalnya 10.000 turun mendekati angka 6.666 dan sampai waktu yang tak terhingga jumlah individu relatif stabil di angka 6.666. Jumlah individu yang menunjukkan gejala-gejala penyakit akan mengalami penurunan menuju 0. Jumlah individu yang terinfeksi yang awalnya 1.000 mengalami peningkatan yang signifikan dalam kurun waktu 100 hari, kemudian jumlahnya akan turun menuju 0. Ini dikarenakan pengaruh vaksinasi. Hal ini berarti bahwa pergerakan solusi semakin lama akan mendekati titik  $P_0$  atau dengan kata lain saat  $R_0 < 1$  maka jumlah setiap subpopulasi relatif stabil pada titik  $P_0$ .

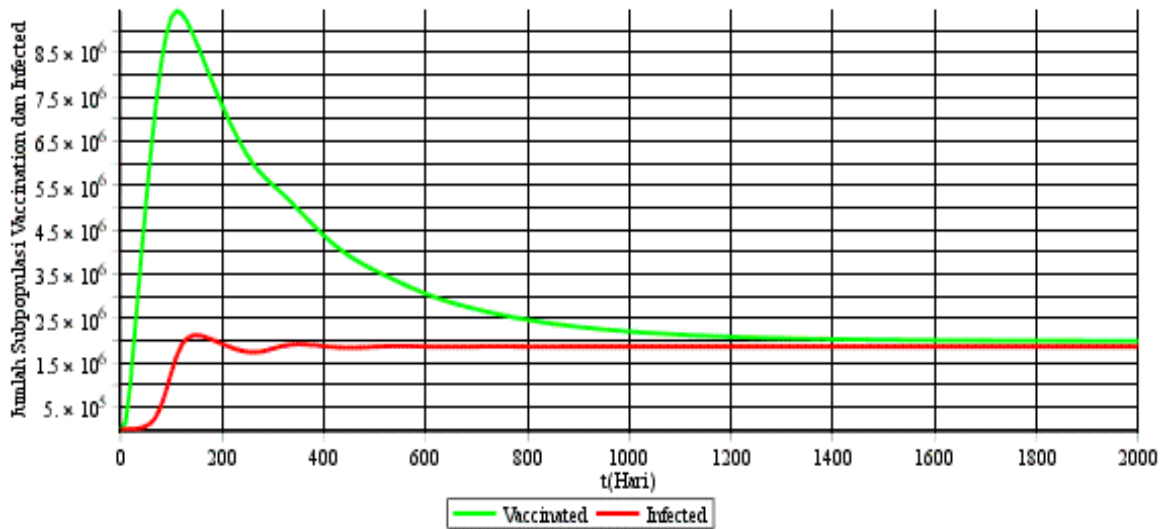
Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi numerik saat  $R_0 > 1$

Parameter	Estimasi
$r$	0,6 per hari
$K$	1.000.000 jiwa
$\alpha$	0,3 per hari
$\gamma$	0,45 per hari
$\beta_1$	0,0000002 per hari
$\beta_2$	0,00000015 per hari
$\mu$	0,004 per hari

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2 didapatkan bilangan reproduksi dasar sebesar 24,4 ( $R_0 > 1$ ). Jumlah awal masing-masing subpopulasi, yaitu  $S(0) = 10.000$ ,  $E(0) = 5.000$ ,  $I(0) = 1.000$  dan  $V(0) = 5.500$ . Dari hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium secara analitik diperoleh titik ekuilibrium  $P_1 = (26.588; 16.635; 1.871.465; 1.994.143)$ . Dari hasil simulasi numerik dengan menggunakan *software Maple* diperoleh grafik yang menunjukkan hubungan jumlah subpopulasi rentan, subpopulasi terpapar, subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi divaksin terhadap variabel waktu sebagai berikut.



Gambar 4. Grafik waktu ( $t$ ) terhadap jumlah subpopulasi S dan E saat  $R_0 > 1$



Gambar 5. Grafik waktu ( $t$ ) terhadap jumlah subpopulasi I dan V saat  $R_0 > 1$

Gambar 4 menunjukkan jumlah individu rentan awalnya 10.000 mengalami peningkatan sampai hari ke-30. Kemudian terjadi penurunan sampai hari ke-800 dengan jumlah individu akan mendekati angka 26.588 dan sampai waktu yang tak terhingga jumlah individu relatif stabil di angka 26.588. Jumlah Individu terpapar penyakit awalnya 5.000 kemudian mengalami peningkatan sampai hari ke 100. Selanjutnya, terjadi penurunan sampai hari ke-800 mendekati angka 16.635 dan sampai waktu yang tak terhingga jumlah individu relatif stabil di angka 16.635.

Berdasarkan Gambar 5 dapat dilihat peranan vaksinasi dalam menekan jumlah individu yang terinfeksi penyakit. Individu yang telah mengalami proses vaksinasi awalnya berjumlah 5.500 kemudian mengalami peningkatan sampai hari ke-110. Selanjutnya, terjadi penurunan sampai dengan hari ke-1400 dengan jumlah individu yang telah mengalami proses vaksinasi mendekati 1.994.143. Dalam waktu yang tak terhingga jumlah individu yang telah mengalami proses vaksinasi relatif stabil di angka 1.994.143. Peningkatan individu yang terinfeksi penyakit dapat dilihat pada hari ke-50. Individu yang terinfeksi penyakit awalnya berjumlah 1.000 kemudian mengalami penurunan sampai dengan hari ke-600 dengan jumlah individu yang terinfeksi mendekati 1.871.465. Dalam waktu yang tak terhingga jumlah individu yang terinfeksi relatif stabil di angka 1.871.465. Hal ini berarti bahwa pergerakan solusi semakin lama akan mendekati titik  $P_1$  atau dengan kata lain saat  $R_0 > 1$  maka jumlah setiap subpopulasi relatif stabil pada titik  $P_1$ .



## 4. Kesimpulan

Jika  $R_0 \leq 1$  dan  $r > \alpha$  maka diperoleh satu (tunggal) titik ekuilibrium pada model epidemi SEIV, yaitu titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$ . Selanjutnya, jika  $r\gamma + r\mu > \beta_1 K(r - \alpha)$  dan  $R_0 > 1$ , maka diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium non-endemik  $P_0$  dan endemik  $P_1$ . Jika  $R_0 \leq 1$ ,  $r > \alpha$  dan  $\gamma + \mu > \frac{\beta_1 K(r - \alpha)}{r}$  maka titik ekuilibrium  $P_0$  stabil asimtotik lokal dan jika  $R_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium  $P_0$  tidak stabil. Jika  $R_0 > 1$ ,  $\gamma + \mu > \beta_1 S^{**}$  atau  $(\gamma + \mu)(\mu\beta_1 + \gamma\beta_2) > \beta_2$  dan  $\beta_1\mu + \beta_2\gamma < 1$  maka titik ekuilibrium endemik  $P_1$  stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik yang diberikan mendukung hasil analisis tersebut.

## Daftar Pustaka

- [1] Liu, H., Xu, H., Yu, J., Zhu, G., (2005), Stability on coupling SIR epidemic model with vaccination, *Journal of Applied Mathematics* **2005(4)**, 301-319. <https://doi.org/10.1155/JAM.2005.301>
- [2] Hui, J. and Zhu, D., (2005), Global stability and periodicity on SIS epidemic models with backward bifurcation, *Computers and Mathematics with Applications* **50(8-9)**, 1271-1290. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.06.003>
- [3] Moghadas, S. M. and Gumel, A. B., (2003), A mathematical study of a model for childhood diseases with non-permanent immunity, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **157(2)**, 347-363. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(03\)00416-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(03)00416-3)
- [4] Adebimpe, O., Abiodun, O., Oludoun, O., Gbadamosi, B., (2020), Analysis of an SEIV Epidemic Model with Temporary Immunity and Saturated Incidence Rate, in *2020 International Conference in Mathematics, Computer Engineering and Computer Science, ICMCECS 2020*, 1-5. <https://doi.org/10.1109/ICMCECS47690.2020.246981>
- [5] Zhou, X. and Cui, J., (2011), Analysis of stability and bifurcation for an SEIV epidemic model with vaccination and nonlinear incidence rate, *Nonlinear Dynamics* **63(4)**, 639-653. <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9826-z>
- [6] Cai, L. M. and Li, X. Z., (2009), Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate, *Applied Mathematical Modelling* **33(7)**, 2919-2926. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.01.005>
- [7] Hui, J. and Zhu, D., (2005), Global stability and periodicity on SIS epidemic models with backward bifurcation, *Computers and Mathematics with Applications* **50(8-9)**, 1271-1290. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.06.003>

- [8] Li, Z., Hong, J., Yu, C., & Sun, Z., (2018), Awareness design and analysis upon two infectious states based on susceptible-exposed-infected-vigilant (SEIV) model, *2017 Asian Control Conference, ASCC 2017, 2018-January*, 2334-2339. <https://doi.org/10.1109/ASCC.2017.8287539>
- [9] Bai, M. and Ren, L., (2015), An SEIV epidemic model for childhood diseases with partial permanent immunity, *Computational and Mathematical Methods in Medicine* **2015**, 1-13. <https://doi.org/10.1155/2015/420952>
- [10] Adebimpe, O., (2014), Stability analysis of a SEIV epidemic model with saturated incidence rate, *British Journal of Mathematics & Computer Science* **4(23)**, 3358-3368. <https://doi.org/10.9734/bjmcs/2014/2758>
- [11] Abdulrazak, A. J., Ibrahim, M. O., Usman, I. O., (2012), A seiv vaccination model with general non-linear incidence rate and waning preventive vaccine, *IOSR Journal of Mathematics* **4(2)**, 44-51. <https://doi.org/10.9790/5728-0424451>
- [12] Renald, E., Kuznetsov, D. and Kreppel, K., (2019), Sensitivity analysis and numerical simulation of a SEIV basic Dog-Rabies mathematical model with control, *International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering* **05(09)**, 142-148. <https://doi.org/10.31695/ijasre.2019.33526>
- [13] Hikal, M. M., (2014), Dynamic properties for a general SEIV epidemic model, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications* **2(1)**, 26-36. [http://math-frac.org/Journals/EJMAA/Vol2\(1\)\\_Jan\\_2014/](http://math-frac.org/Journals/EJMAA/Vol2(1)_Jan_2014/)
- [14] Joseph, G.A. and Balamuralitharan, S., (2020), Global stability analysis of human SEIV-mosquitoes SEI model for malaria transmission, in *AIP Conference Proceedings*, 1200031-1200037. <https://doi.org/10.1063/5.0025240>
- [15] Driessche van den, P., (2017), Reproduction numbers of infectious disease models, *Infectious Disease Modelling* **2(3)**, 288-303. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002>
- [16] Perko, L., (2001), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York.