

MODEL MATEMATIKA TIPE SEIQR PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI (*SEIQR Type Mathematical Model on Spread of Diphtheria*)

Saltina, Novianita Achmad, Resmawan^{*)}, Agusyarif Rezka Nuha

Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo
Jl. Prof. Dr. Ing. B.J Habibie, Tilong kabila, Kab. Bone Bolango 96119
e-mail: saltinalahamade375@gmail.com, achmad.novianita@gmail.com,
^{*)}resmawan@ung.ac.id, agusyarif@ung.ac.id
^{*)}penulis korespondensi

Abstract. The present work discusses a mathematical model of diphtheria transmission. Diphtheria is an infection of the throat and upper respiratory tract that is caused by bacteria called corynebacterium. The model was developed by adding latent population and death parameter resulted from this infection. The purpose of this study was to construct a mathematical model, analyze the stability of the equilibrium point, and interpret the simulation of the SEIQR mathematical model in the transmission of diphtheria. From the constructed model, there were basic reproduction number (R_0) and two equilibrium points, namely disease-free and endemic equilibrium point would be stable if $R_0 < 1$ and $R_0 > 1$, respectively. Moreover, a numerical simulation was carried out to determine the dynamics of the diphtheria transmission. The simulation results showed that if the rates of vaccinated proportion and individual are increased, the infection would gradually go away from the population. In short, diphtheria transmission be prevented by increasing the rate of vaccination.

Keywords: Basic reproduction number, diphtheria, equilibrium point, mathematical model, numerical simulation

MSC2020: 37A99, 37A10, 37C10

Received: 18-01-2022, accepted: 22-02-2022

1. Pendahuluan

Model matematika termasuk bagian matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari [1]. Model matematika dapat digunakan untuk menggambarkan suatu kejadian ke dalam bentuk rumus matematika dan melakukan analisis untuk memperoleh solusi dari masalah yang terjadi [2]. Model matematika dalam bidang kedokteran sering digunakan dalam memodelkan penyebaran penyakit menular. Penyakit difteri juga merupakan penyakit menular yang dapat dimodelkan dalam bentuk model matematika.

Penyakit difteri adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi bakteri *corynebacterium diphtheriae* pada selaput lendir dan tenggorokan [3]. Difteri dapat menular melalui udara dan kontak langsung maupun tidak langsung dengan penderita difteri [4–5]. Berdasarkan

data yang diperoleh, difteri telah menyebar di seluruh dunia yaitu tercatat sebanyak 7347 kasus dan 7217 kasus pada tahun 2014 salah satunya berasal dari negara-negara anggota WHO. Adapun kasus difteri di Indonesia mengalami peningkatan dari tahun 2017 sampai dengan tahun 2019. Pada periode ini, tercatat jumlah kasus difteri mencapai 2.538 kasus dengan 84 kematian [6–8].

Salah satu penelitian mengenai model penyebaran penyakit difteri telah dilakukan oleh Wulandari [9] dengan memperhatikan pengaruh antibodi pada seseorang yang dapat mencegah penyebaran penyakit difteri. Kemudian Suryani dan Yuenita [10] membahas tentang analisis kestabilan model MSEIR penyebaran penyakit difteri dengan *saturated incidence rate*. Selanjutnya Puspita dkk. [11] merumuskan model penyebaran penyakit difteri yang menjelaskan tentang pemodelan matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi. Izzati dan Andriani [12] juga melakukan penelitian tentang kendali kontrol optimal pada model penyebaran penyakit difteri dengan tingkat imunisasi alami pada individu terpapar.

Pada penelitian ini, dilakukan modifikasi model dari Puspita dkk. [11] dengan menambahkan sub populasi laten yang dinotasikan dengan E (*Exposed*). Populasi E adalah populasi yang telah terpapar namun masih berada dalam masa inkubasi sehingga belum berpotensi menularkan penyakit. Penambahan populasi E perlu dilakukan karena individu baru akan menularkan penyakit apabila telah melewati masa inkubasi/periode laten [9]. Selanjutnya modifikasi juga dilakukan dengan menambahkan parameter kematian yang diakibatkan oleh penyakit difteri. Hal ini disebabkan karena racun yang dikeluarkan oleh bakteri *corynebacterium diphtheria* dapat menimbulkan kematian mendadak dan kelumpuhan saraf-saraf tepi [13]. Model sistem persamaan diferensial yang diperoleh dianalisis dan dilihat perilaku solusi dari titik kesetimbangan agar dapat diidentifikasi kestabilan titik kesetimbangan tersebut. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika penyebaran penyakit difteri.

2. Metodologi

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur yang berhubungan dengan penyakit difteri. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut: (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi literatur, (4) penentuan asumsi, (5) modifikasi model, (6) analisis, (7) melakukan simulasi numerik, (8) interpretasi dan kesimpulan. Tahap studi pustaka dilakukan dengan kegiatan menelusuri sejumlah pustaka. model matematika, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi model dengan *software python 3.7*. Pada pembahasan masalah dilakukan beberapa langkah pokok yaitu: (1) merekonstruksi model matematika pada kasus penyebaran penyakit difteri, (2) mencari titik kesetimbangan beserta sifat stabilitasnya, (3) menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), (4) memberikan simulasi secara numerik, dan (5) memberikan interpretasi secara biologis.

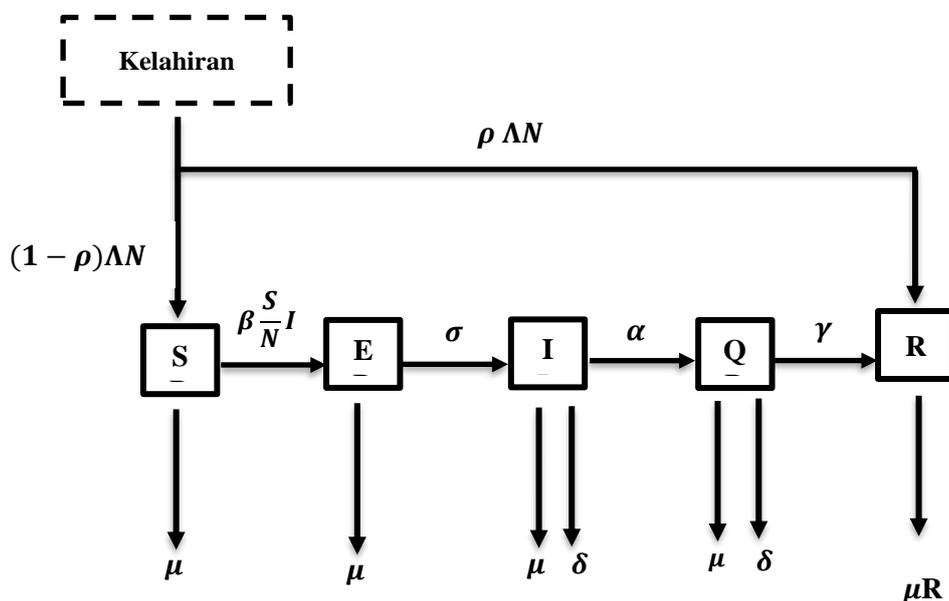
3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Matematika

Berikut merupakan asumsi dari model matematika tipe SEIQR yaitu:

1. Populasi diasumsikan tertutup (tidak ada proses migrasi imigrasi).
2. Setiap individu yang baru lahir diasumsikan dalam keadaan sehat.
3. Penyakit difteri menular melalui kontak langsung dengan penderita.
4. Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
5. Individu yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit dan dapat meninggal akibat penyakit.
6. Populasi rentan (S) dapat berpindah ke populasi *exposed* (E) karena adanya interaksi antara populasi rentan S dengan populasi *infected* (I).
7. Setiap individu yang sembuh dari infeksi pasti melalui proses karantina.
8. Setiap individu yang terinfeksi berpindah ke populasi R karena keberhasilan pengobatan pada pasien difteri dengan laju γ .
9. Kemampuan vaksinasi adalah 100%.
10. Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen.

Selanjutnya, pola penyebaran penyakit difteri diilustrasikan dalam bentuk diagram kompartemen pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram kompartemen model SEIQR pada penyebaran penyakit difteri

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 1, diperoleh model dalam bentuk sistem persamaan diferensial berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= (1 - \rho)\Lambda N - \mu S - \beta \frac{S}{N} I, \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta \frac{S}{N} I - \mu E - \sigma E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\mu + \delta)I - \alpha I, \\
 \frac{dQ}{dt} &= \alpha I - \mu Q - \gamma Q, \\
 \frac{dR}{dt} &= \rho \Lambda N + \gamma Q - \mu R.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Selanjutnya dilakukan penskalaan model untuk mempermudah analisis model dengan menghitung proporsi untuk masing-masing populasi, yaitu

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, q = \frac{Q}{N}, r = \frac{R}{N},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= (1 - \rho)\Lambda - \mu s - \beta si, \\
 \frac{de}{dt} &= \beta si - \mu e - \sigma e, \\
 \frac{di}{dt} &= \sigma e - (\mu + \delta)i - \alpha i, \\
 \frac{dq}{dt} &= \alpha i - \mu q - \gamma q, \\
 \frac{dr}{dt} &= \rho \Lambda + \gamma q - \mu r.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Parameter yang digunakan pada persamaan (2) disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Keterangan parameter model SEIQR

Parameter	Keterangan
ρ	Proporsi individu yang divaksinasi
β	Peluang terjadinya infeksi antara individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi.
σ	Laju perpindahan populasi laten ke populasi yang terinfeksi.
α	Laju individu yang dikarantina.
γ	Laju penyembuhan populasi yang terinfeksi.
μ	Laju kematian alami
Λ	Laju kelahiran.
δ	Laju kematian akibat penyakit difteri

3.2 Daerah Solusi Model Penyebaran Penyakit Difteri

Lemma 1. Daerah solusi model penyebaran penyakit difteri pada sistem persamaan (2) adalah tak-negatif, dengan $\Omega = (s, e, i, q, r) \in \mathfrak{R}_+^5$: $0 \leq s + e + i + q + r \leq \frac{\Lambda}{\mu} + N_0$

merupakan daerah solusi tak-negatif dari persamaan (2). N_0 adalah total populasi saat $t = 0$.

Bukti.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{de}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dq}{dt} + \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{dN}{dt} = (1 - \rho)\Lambda - \mu s - \beta si + \beta si - \mu e - \sigma e + \sigma e - (\mu + \delta)i - \alpha i + \alpha i - \mu q - \gamma q + \rho\Lambda + \gamma q - \mu r,$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta i.$$

Karena δi tak-negatif, maka diperoleh $\frac{dN}{dt} + \mu N \leq \Lambda$. Pertidaksamaan ini dapat diselesaikan dengan PD linear tak-homogen orde-1, yaitu

$$N \leq \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + N_0 e^{-\mu t}.$$

Karena $0 \leq e^{-\mu t} \leq 1$ untuk setiap $t \geq 0$ diperoleh

$$N \leq \frac{\Lambda}{\mu} + N_0 \text{ atau } s + e + i + q + r \leq \frac{\Lambda}{\mu} + N_0.$$

Karena $s(t), e(t), i(t), q(t), r(t)$ taknegatif, maka untuk $t \geq 0$ diperoleh

$$0 \leq s + e + i + q + r \leq \frac{\Lambda}{\mu} + N_0.$$

3.3 Titik Kesetimbangan

Pada model ini, titik kesetimbangan diperoleh pada kondisi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0.$$

Titik kesetimbangan dinyatakan dengan dua keadaan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Berdasarkan sistem persamaan (2), diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dengan $E_0 = (s, 0, 0, 0, r)$, yaitu

$$E_0(s; e; i; q; r) = \left(\frac{(1-\rho)\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda\rho}{\mu} \right) \quad (3)$$

dan titik kesetimbangan endemik yang dinyatakan dengan E_1 , yaitu

$$E_1(s; e; i; q; r) = (s^*, e^*, i^*, q^*, r^*) \quad (4)$$

dengan

$$s^* = \frac{(\mu+\delta+\alpha)(\mu+\sigma)}{\beta\sigma}; e^* = \frac{\mu(\mu+\delta+\alpha)}{\beta\sigma} + \frac{(\Lambda-\rho\Lambda)}{\mu+\sigma}; i^* = -\frac{\mu^2(\alpha+\delta+\mu)+\mu(\alpha+\delta+\mu)\sigma+\beta\Lambda(-1+\rho)\sigma}{\beta(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)};$$

$$q^* = -\frac{\alpha\mu^2(\alpha+\delta+\mu)+\alpha(\mu(\alpha+\delta+\mu)+\beta\Lambda(-1+\rho))\sigma}{\beta(\gamma+\mu)(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}; \text{ dan}$$

$$r^* = \frac{\mu(\alpha+\delta+\mu)(-\alpha\gamma\mu+\beta\Lambda(\gamma+\mu)\rho)+(\alpha\gamma(\beta\Lambda-\mu(\alpha+\delta+\mu))+\beta\Lambda(\alpha\mu+(\gamma+\mu)(\delta+\mu))\rho)\sigma}{\beta\mu(\gamma+\mu)(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}.$$

3.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) ditentukan dengan metode matriks *next generation* [14, 15]. Dari persamaan (2) diperoleh kelas populasi terinfeksi yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \beta si - \mu e - \sigma e, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - (\mu + \delta)i - \alpha i.\end{aligned}\tag{5}$$

Selanjutnya didefinisikan sebagai matriks ψ dan φ sebagai berikut:

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \mu + \sigma & 0 \\ -\sigma & \alpha + \delta + \mu \end{bmatrix}.\tag{6}$$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit pada persamaan (3) pada persamaan (6), diperoleh matriks F dan V sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1-\rho)\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \mu + \sigma & 0 \\ -\sigma & \alpha + \delta + \mu \end{bmatrix}.\tag{7}$$

Matriks *next generation* diperoleh dari persamaan (7) dan didefinisikan dengan $K = FV^{-1}$, yaitu

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta\Lambda(-1+\rho)\sigma}{\mu(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)} & \frac{\beta(\Lambda-\Lambda\rho)}{\mu(\alpha+\delta+\mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{8}$$

Selanjutnya, bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah nilai eigen dominan dari matriks *next generation*, sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda(1-\rho)\sigma}{\mu(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}.\tag{9}$$

3.5 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini, dilakukan analisis kestabilan pada masing-masing titik kesetimbangan. Mengacu pada model persamaan (2) didefinisikan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -i\beta - \mu & 0 & -s\beta & 0 & 0 \\ i\beta & -\mu - \sigma & s\beta & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\alpha - \delta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}.\tag{10}$$

Matriks J merupakan matriks Jacobian dari persamaan (2) yang selanjutnya digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan.

3.5.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Sifat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit difteri dinyatakan pada Teorema 1.

Teorema 1. Titik kesetimbangan bebas penyakit difteri stabil asimtotik lokal pada kondisi $R_0 < 1$ dan tidak stabil pada kondisi $R_0 > 1$.

Bukti. Matriks Jacobian dari titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit persamaan (3) pada matriks Jacobian persamaan (10), sehingga menghasilkan matriks $J(E_0)$ sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \quad (11)$$

dengan $A_{11} = -\mu$, $A_{33} = -\alpha - \delta - \mu$, $A_{13} = -\frac{\beta(\Lambda - \Lambda\rho)}{\mu}$, $A_{43} = \alpha$, $A_{22} = -\mu - \sigma$, $A_{44} = -\gamma - \mu$, $A_{23} = \frac{\beta(\Lambda - \Lambda\rho)}{\mu}$, $A_{54} = \gamma$, $A_{32} = \sigma$, dan $A_{55} = -\mu$.

Selanjutnya ditentukan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian persamaan (11) sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - J(E_0)) = 0.$$

Sehingga diperoleh persamaan,

$$(\lambda - A_{11})(\lambda - A_{44})(\lambda - A_{55})(A_{23}A_{32} - (\lambda + A_{22})(\lambda - A_{33})) = 0. \quad (12)$$

Sifat kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan mengidentifikasi nilai eigen dari persamaan (12). Dari persamaan (12) diperoleh lima nilai eigen, tiga diantaranya adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A_{11} = -\mu, \\ \lambda_2 &= A_{44} = -\gamma - \mu, \\ \lambda_3 &= A_{55} = -\mu. \end{aligned}$$

Kemudian dua nilai eigen lainnya diperoleh dari persamaan karakteristik berikut:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (13)$$

dengan $a_2 = 1$, $a_1 = \alpha + \delta + 2\mu + \sigma$, dan $a_0 = (1 - R_0)(\alpha + \delta + \mu)(\mu + \sigma)$.

Untuk menentukan nilai eigen perlu ditunjukkan bahwa koefisien a_0 , a_1 , dan a_2 positif. Karena semua nilai parameter positif, maka a_1 dan a_2 dapat dipastikan positif. Adapun a_0 bernilai positif jika memenuhi syarat $1 - R_0 > 0$ yang berarti harus memenuhi syarat $R_0 < 1$.

Andaikan $R_0 < 1$, akan ditunjukkan bahwa seluruh nilai eigen dari persamaan (13) bernilai negatif. Misalkan nilai eigen dari persamaan (13) yaitu λ_4 dan λ_5 . Berdasarkan

sifat akar persamaan kuadrat, diperoleh

$$\lambda_4 + \lambda_5 = -\frac{a_1}{a_2} = -a_1, \quad (14)$$

$$\lambda_4\lambda_5 = \frac{a_0}{a_2} = a_0. \quad (15)$$

Karena semua nilai parameternya bernilai positif maka diperoleh

$$\lambda_4 + \lambda_5 < 0 \text{ dan } \lambda_4\lambda_5 > 0. \quad (16)$$

Dari persamaan (16) dapat diketahui bahwa $\lambda_4 < 0$ dan $\lambda_5 < 0$. Dengan demikian, kelima nilai eigen dari persamaan karakteristik (12) bernilai negatif jika memenuhi kondisi $R_0 < 1$. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka a_0 pada persamaan (13) bernilai negatif, sehingga

$$\lambda_4\lambda_5 < 0.$$

Akibatnya, salah satu dari λ_4 dan λ_5 akan bernilai positif. Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit sabil asimtotik lokal pada kondisi $R_0 < 1$ dan tidak stabil pada kondisi $R_0 > 1$.

3.5.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Kestabilan titik kesetimbangan endemik E_1 akan dijelaskan pada Torema 2.

Teorema 2. Titik kesetimbangan endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan tidak stabil jika $R_0 < 1$.

Bukti. Matriks Jacobian dari titik kesetimbangan endemik diperoleh dengan menyubtitusikan titik kesetimbangan endemik persamaan (4) pada matriks Jacobian persamaan (10), sehingga menghasilkan matriks $J(E_1)$ sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \quad (17)$$

dengan

$$A_{11} = \frac{\beta\Lambda(-1+\rho)\sigma}{(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}; \quad A_{13} = -\frac{(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}{\sigma};$$

$$A_{21} = -\frac{\mu^2(\alpha+\delta+\mu)+\mu(\alpha+\delta+\mu)\sigma+\beta\Lambda(-1+\rho)\sigma}{(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}; \quad A_{22} = -\mu - \sigma; \quad A_{23} = \frac{(\alpha+\delta+\mu)(\mu+\sigma)}{\sigma};$$

$$A_{32} = \sigma; \quad A_{33} = -\alpha - \delta - \mu; \quad A_{43} = \alpha; \quad A_{44} = -\gamma - \mu; \quad A_{54} = \gamma; \quad \text{dan } A_{55} = -\mu.$$

Selanjutnya ditentukan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian persamaan (17) sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - J(E_1)) = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan

$$(A_{44} - \lambda)(A_{55} - \lambda) \left(A_{13}A_{21}A_{32} + ((A_{22} - \lambda)(A_{33} - \lambda) - A_{23}A_{32})(A_{11} - \lambda) \right) = 0. \quad (18)$$

Sifat kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan mengidentifikasi nilai eigen dari persamaan (18). Dari persamaan (18) diperoleh lima nilai eigen, dua diantaranya yaitu,

$$\lambda_1 = A_{44} = -\gamma - \mu \text{ dan } \lambda_2 = A_{55} = -\mu.$$

Kemudian tiga nilai eigen lainnya diperoleh dari persamaan karakteristik berikut:

$$p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0 \quad (19)$$

dengan $p_3 = 1$; $p_2 = (\alpha + \delta + 2\mu) + \mu\left(\frac{\sigma}{\mu} + R_0\right)$, $p_1 = R_0\mu(\alpha + \delta + 2\mu + \sigma)$; dan $p_0 = (R_0 - 1)\mu(\alpha + \delta + \mu)(\mu + \sigma)$.

Untuk menentukan nilai eigen perlu ditunjukkan bahwa koefisien p_0, p_1, p_2 dan p_3 positif. Karena semua nilai parameter positif, maka p_1, p_2 dan p_3 dapat dipastikan positif. Adapun p_0 bernilai positif jika memenuhi syarat $R_0 - 1 > 0$ yang berarti harus memenuhi syarat $R_0 > 1$.

Andaikan $R_0 > 1$, akan ditunjukkan bahwa seluruh nilai eigen dari persamaan (19) bernilai negatif. Misalkan nilai eigen dari persamaan (19) adalah λ_3, λ_4 , dan λ_5 .

Berdasarkan sifat akar persamaan kubik, diperoleh:

$$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = -\frac{p_2}{p_3} = -p_2, \quad (20)$$

$$\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5 + \lambda_4\lambda_5 = \frac{p_1}{p_3} = p_1, \quad (21)$$

$$\lambda_3\lambda_4\lambda_5 = -\frac{p_0}{p_3} = -p_0. \quad (22)$$

Karena semua nilai parameter positif maka diperoleh

$$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0, \quad \lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5 + \lambda_4\lambda_5 > 0, \quad \text{dan } \lambda_3\lambda_4\lambda_5 < 0. \quad (23)$$

Kondisi pada persamaan (23) akan terpenuhi jika minimal salah satu dari nilai eigen bernilai negatif. Misalnya $\lambda_3 < 0$, sehingga

$$\lambda_4\lambda_5 > 0. \quad (24)$$

Hal ini berakibat λ_4 dan λ_5 harus bertanda sama. Berdasarkan kondisi pada persamaan (23), maka λ_4 dan λ_5 harus bernilai negatif. Dengan demikian, kelima nilai eigen dari persamaan karakteristik (18) bernilai negatif jika memenuhi kondisi $R_0 > 1$. Sebaliknya, jika $R_0 < 1$ maka p_0 pada persamaan (19) bernilai negatif, sehingga

$$\lambda_3\lambda_4\lambda_5 > 0 \Leftrightarrow \lambda_4\lambda_5 < 0.$$

Akibatnya, salah satu dari λ_4 dan λ_5 akan bernilai positif. Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik sabil asimtotik lokal pada kondisi $R_0 > 1$ dan tidak stabil pada kondisi $R_0 < 1$.

3.6 Simulasi Model

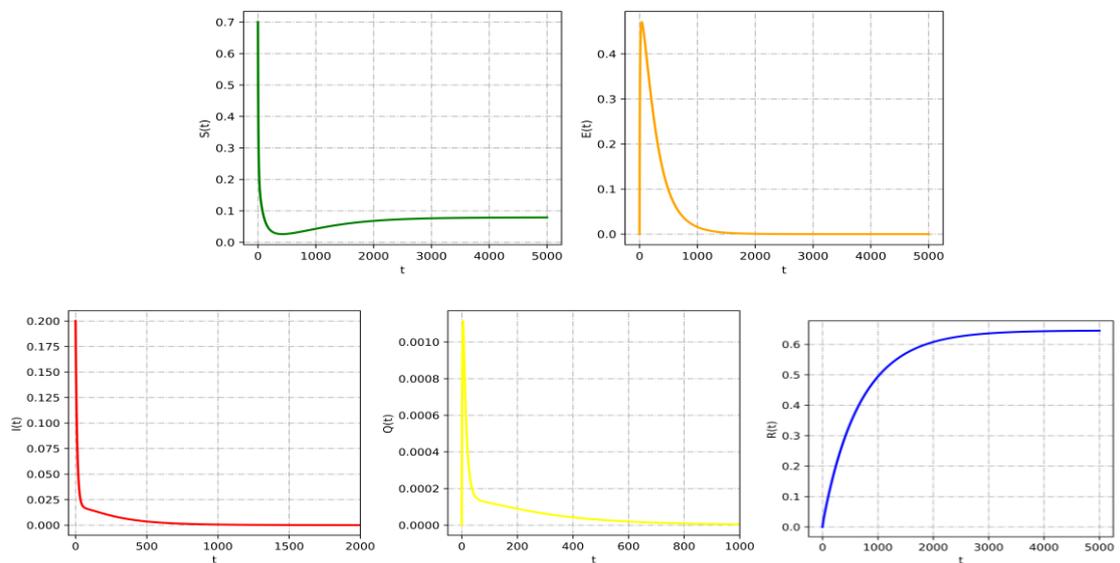
Simulasi model dilakukan untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan serta menunjukkan dinamika populasi pada kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* berbasis fungsional serta dilakukan variasi nilai parameter, diantaranya parameter proporsi individu yang divaksinasi dan laju individu yang dikarantina. Nilai parameter yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 2.

Table 2. Nilai parameter untuk kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$

Parameter	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$	Sumber
ρ	0,891	0,0891	Asumsi
σ	0,003	0,003	Asumsi
β	0,57	0,57	[11]
γ	0,5	0,5	[11]
α	0,004	0,005	Asumsi
μ	0,00138	0,00138	[11]
Λ	0,001	0,001	Asumsi
δ	0,08	0,09	Asumsi

3.6.1. Dinamika Populasi untuk $R_0 < 1$

Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2, ditunjukkan dinamika populasi pada kondisi $R_0 < 1$ pada Gambar 2.



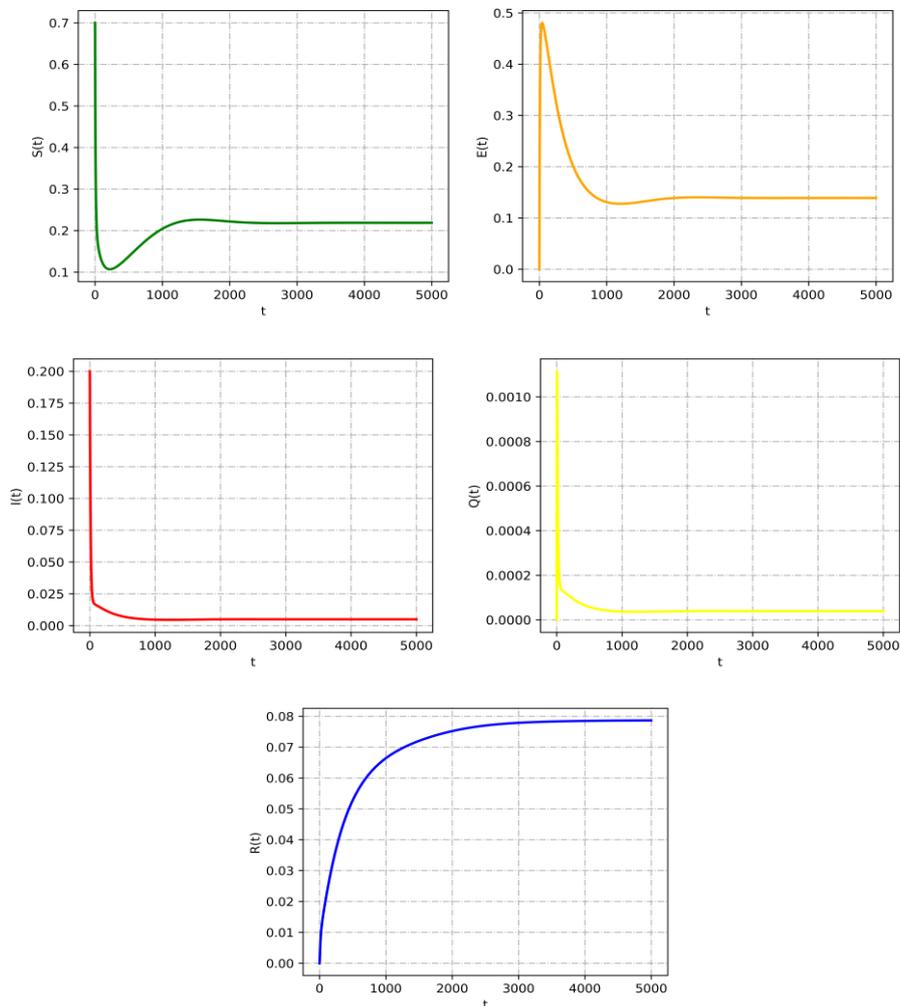
Gambar 2. Dinamika populasi pada kondisi $R_0 < 1$

Dapat dilihat pada Gambar 2 bahwa dinamika populasi pada kondisi $R_0 < 1$ akan mencapai kondisi stabil pada titik kesetimbangan tanpa penyakit. Populasi manusia rentan mengalami jumlah populasi fluktuatif hingga mencapai kondisi stabil pada saat

$s = 0,079$ atau sekitar 711 orang dan populasi manusia yang sembuh mengalami kenaikan dengan kondisi stabil pada saat $r = 0,646$ atau sekitar 5814 orang. Adapun pada populasi manusia laten, populasi manusia terinfeksi dan populasi manusia yang dikarantina mengalami kenaikan kemudian mengalami penurunan jumlah populasi menuju titik stabil pada kondisi $e = i = q = 0$.

3.6.2. Dinamika Populasi untuk $R_0 > 1$

Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2, ditunjukkan dinamika populasi pada kondisi $R_0 > 1$ pada Gambar 3.



Gambar 3. Dinamika populasi pada kondisi $R_0 > 1$

Dapat dilihat pada Gambar 3 bahwa dinamika populasi pada kondisi $R_0 > 1$ akan mencapai kondisi stabil pada titik endemik. Dinamika yang terjadi pada populasi manusia rentan terlihat mengalami perubahan secara fluktuatif hingga mencapai kondisi stabil pada saat $s = 0,247$ atau sekitar 2221 orang. Sementara itu, populasi

manusia laten mengalami penurunan jumlah populasi dan mencapai kondisi stabil pada saat $e = 0,13$ atau sekitar 1170. Adapun populasi manusia terinfeksi mengalami penurunan jumlah populasi namun mencapai kondisi stabil pada saat $i = 0,004$ atau sekitar 36 orang. Sementara itu, populasi manusia yang dikarantina juga mengalami penurunan jumlah populasi hingga dengan kondisi stabil pada saat $q = 0,00004$ atau sekitar 1 orang. Selanjutnya, dinamika yang terjadi pada populasi manusia sembuh mengalami peningkatan jumlah populasi dengan kondisi dtabil pada saat $r = 0,079$ atau sekitar 711 orang. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit akan tetap eksis dalam populasi namun dapat terkendali pada kondisi tertentu.

3.6.3. Simulasi Proporsi Individu yang Divaksinasi

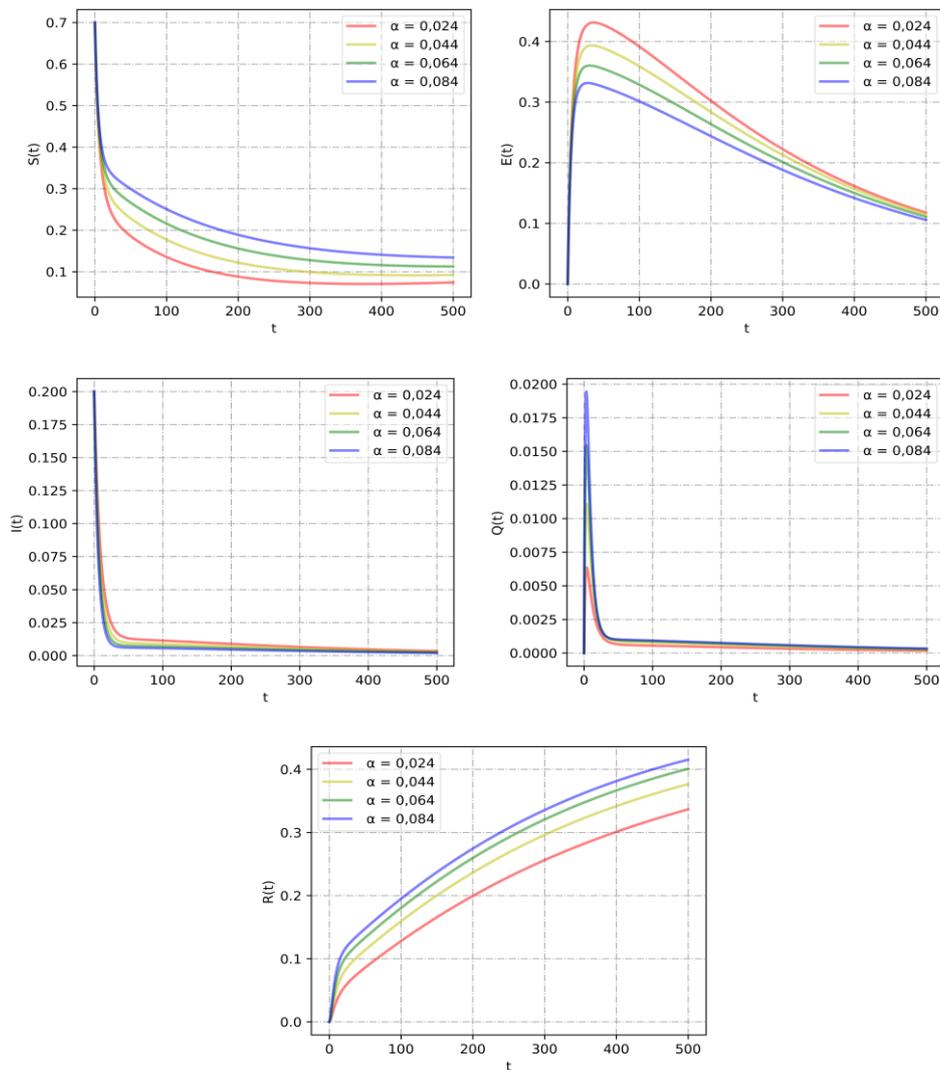
Simulasi ini dilakukan untuk menunjukkan pengaruh proporsi individu yang divaksinasi. Peningkatan atau penurunan nilai parameter ρ dapat berpengaruh pada nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Pengaruh nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Hasil simulasi variasi nilai parameter ρ terhadap R_0

Simulasi	ρ	R_0
1	0,90	0,33
2	0,93	0,23
3	0,97	0,09
4	1,00	0

Tabel 3 menunjukkan bahwa peningkatan nilai parameter ρ atau individu yang divaksinasi mengakibatkan nilai $R_0 < 1$ mengalami penurunan secara signifikan. Bahkan terlihat bahwa jika 100% individu dilakukan vaksinasi, maka diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0$ artinya tidak akan ada lagi penularan penyakit yang terjadi. Hal ini berarti pemberian vaksin dapat menekan laju penyebaran penyakit difteri. Dinamika populasi secara detail dapat dilihat pada Gambar 4.

Gambar 4 menunjukkan bahwa perubahan nilai parameter ρ sangat mempengaruhi jumlah manusia pada populasi Rentan (S) dan populasi sembuh (R) pada penyebaran penyakit difteri. Dapat dilihat dari Gambar 4 bahwa jika proporsi individu yang divaksinasi diperbesar dan nilai parameter lain tetap, maka jumlah populasi rentan akan berkurang. Sedangkan pada populasi sembuh (R) jumlah manusia meningkat. Akibatnya penyebaran pada penyakit difteri dapat cegah dengan pemberian vaksin. Hal ini berarti peningkatan vaksinasi mempunyai mamfaat untuk menekan laju penyebaran penyakit difteri.



Gambar 4. Proporsi individu yang divaksinasi

3.6.4. Simulasi Laju Individu yang Dikarantina

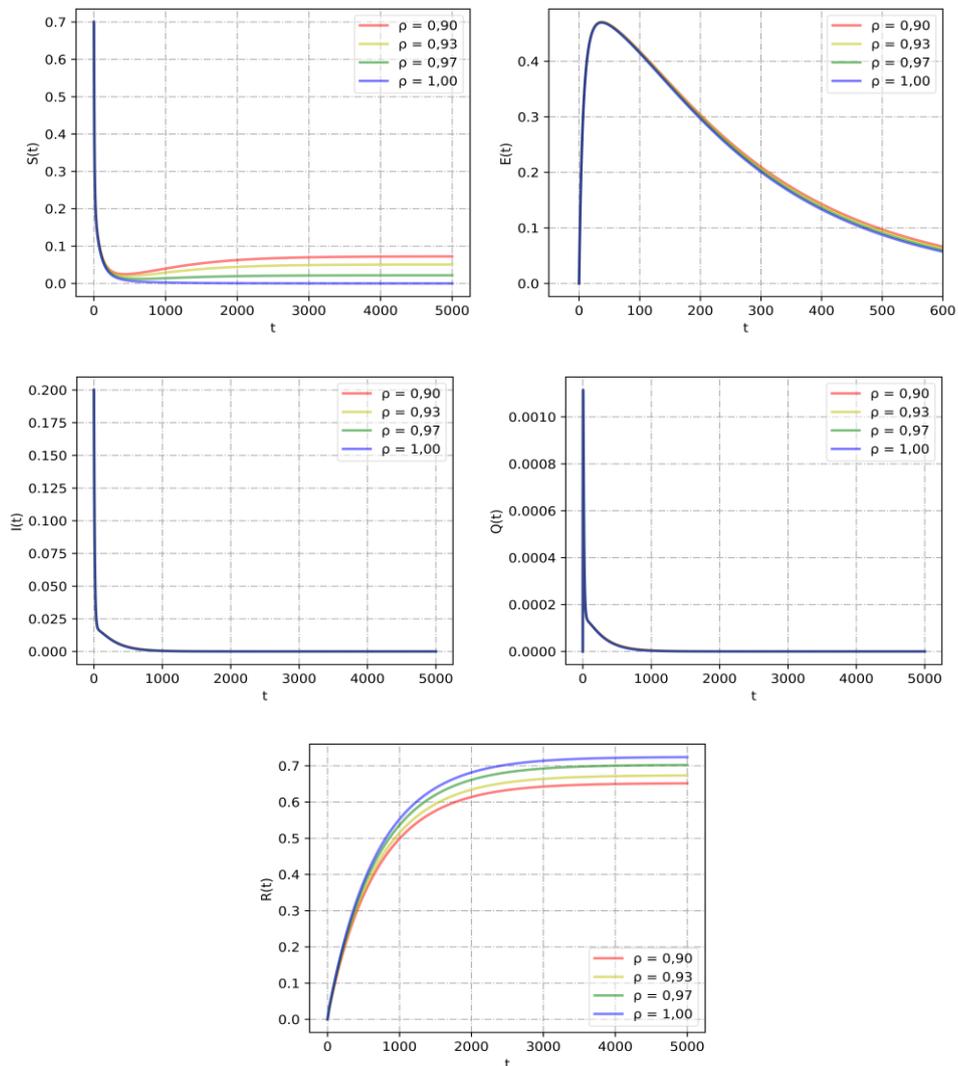
Simulasi ini dilakukan untuk menunjukan pengaruh laju individu yang dikarantina (α) terhadap penanganan penularan penyakit difteri. Peningkatan atau penurunan nilai parameter α dapat berpengaruh pada nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Pengaruh nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) ditunjukkan pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil simulasi variasi nilai parameter α terhadap R_0

Simulasi	α	R_0
1	0,02	$0,29 < 1$
2	0,04	$0,25 < 1$
3	0,06	$0,21 < 1$
4	0,84	$0,19 < 1$

Tabel 4 menunjukkan bahwa peningkatan nilai parameter α mengakibatkan nilai $R_0 < 1$ menurun. Artinya peningkatan laju individu yang dikarantina dapat menekan laju penyebaran penyakit difteri dan secara teknis dapat dilakukan untuk menekan angka kasus penularan penyakit difteri. Dinamika populasi yang terjadi pada kondisi ini dapat dilihat pada Gambar 5.

Gambar 5 menunjukkan bahwa perubahan nilai nilai parameter individu yang dikarantina (α) lebih mempengaruhi jumlah manusia pada semua populasi pada penyebaran penyakit difteri. Semakin besar nilai laju individu yang dikarantina dan nilai parameter lain tetap, maka menyebabkan jumlah manusia pada populasi rentan (S), populasi (E) populasi terinfeksi (I), dan populasi yang dikarantina (Q) menurun. Adapun jumlah manusia pada populasi sembuh (R) meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa laju individu yang dikarantina (α) mempunyai peran sangat penting dalam menekan penyebran penyakit difteri.



Gambar 5. Proporsi individu yang dikarantina

4. Kesimpulan

Model matematika tipe SEIQR pada penyebaran penyakit difteri memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Pada saat $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit akan mencapai kondisi stabil sementara titik kesetimbangan endemik tidak stabil. Sebaliknya pada kondisi $R_0 > 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil sementara titik kesetimbangan endemik stabil. Hal ini menunjukkan bahwa pada waktu tertentu penyakit akan secara berangsur-angsur menghilang dari populasi pada saat $R_0 < 1$ sedangkan pada saat $R_0 > 1$, penyakit akan tetap eksis dalam populasi namun dapat dikendalikan pada titik tertentu. Selanjutnya ditunjukkan melalui simulasi secara numerik bahwa bahwa peningkatan proporsi individu yang vaksinasi dan dikarantina dapat secara signifikan menurunkan angka bilangan reproduksi dasar, artinya bahwa kebijakan ini dapat ditempuh dan secara efektif dapat menekan laju penularan penyakit difteri.

Daftar Pustaka

- [1] Ndi, M.Z.P., (2018), *Pemodelan Matematika*, CV Budi Utama, Yogyakarta.
- [2] Sota, M., Ratianingsih, R., Hajar, (2021), Membangun model matematika penyebaran penyakit difteri oleh *Corynebacterium Diphtheriae* pada populasi manusia, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan* **18(2)**, 221-229. <http://doi.org/10.22487/2540766x.2021.v18.i2.15705>
- [3] Hull, D., Johnston, D.I., (2008), *Dasar-Dasar Pediatri*, Jakarta:EGC.
- [4] Fajriah, I., (2014), Hubungan pengetahuan ibu dan dukungan keluarga dengan status imunisasi TD pada sub pin difteri, *Jurnal Berkala Epidemiologi* **2(3)**, 404-415.
- [5] Lestari, K.S., (2012), Faktor-Faktor yang Berhubungan dengan Kejadian Difteri di Kabupaten Sidiarjo, *Tesis*, Depok: Universitas Indonesia.
- [6] Kemenkes RI., (2017), *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Difteri*, Direktorat Jenderal Pencegahan dan Pengendalian Penyakit, Jakarta.
- [7] Kemenkes RI., (2018), *Data dan Informasi Profil Kesehatan Indonesia*, Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, Jakarta.
- [8] Kemenkes RI., (2019), *Data dan Informasi Profil Kesehatan Indonesia 2019*, Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, Jakarta.
- [9] Wulandari, U.N., (2013), Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri, *Skripsi*, Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

- [10] Suryani, I., Yuenita, M.E., (2016), Analisis kestabilan model MSEIR penyebaran penyakit difteri dengan saturated incidence rate, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* **2(1)**, 75-85. <http://dx.doi.org/10.24014/jsms.v2i1.3104>
- [11] Puspita, G., Kharis, M., Supriono, (2017), Pemodelan matematika pada penyebaran penyakit difteri, *Unnes Journal of Mathematics* **2(1)**, 25-35. <http://doi.org/10.15294/umj.v6i1.11867>
- [12] Izzati, Andriani, (2021), Kendali kontrol optimal penyebaran penyakit difteri dengan tingkat imunitas alami pada individu terpapar, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan* **18(1)**, 1-10. <http://doi.org/10.22487/2540766X>
- [13] WHO, (2013), *Diphtheria Diseases*. [http://www.who.int/classfication/icd/en/\[dinkes07-02-2016\]](http://www.who.int/classfication/icd/en/[dinkes07-02-2016]).
- [14] Driessche, P.V.D., Watmough, J., (2002), Reproduction number and subthreshold endemic equilibrium for compartmental of disease transmission, *Mathematical Biosciences* **180**, 29-48.
- [15] Resmawan, R., Nurwan, N., (2017), Konstruksi bilangan reproduksi dasar pada model epidemik SEIRS-SEI penyebaran malaria dengan vaksinasi dan pengobatan, *Jurnal Matematika Integratif* **13(2)**, 105. <https://doi.org/10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-114>