

# VARIASI POHON FRAKTAL MENGUNAKAN *L*-SYSTEMS

(*Fractal Tree Variations Using L-Systems*)

Pradifta G. Ramadhan, Kosala D. Purnomo, Firdaus Ubaidillah

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember

Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia

*e-mail*: pradifta@gmail.com, kosala.fmipa@unej.ac.id

**Abstract.** Fractal tree is simply a trunk and a number of branches, each of which looks like the tree itself. The fractal tree can be generated using the IFS and L-Systems methods. In this article, the author develops fractal tree generation using L-Systems with additional variations. The variations given are in thickness, length, and branch angle. This development is expected to produce more diverse fractal tree patterns. In generating a fractal tree using L-Systems, it begins by determining the letters and symbols to be used. Then determine which axioms should be used. Then the production rules are made together with the determination of the parametric L-Systems. And the last is to determine the probability value for the stochastic L-Systems. In the deterministic L-Systems, thickness variations, length variations, and branch angle variations are carried out. In the variation of branch thickness, if the ratio of the thickness of the left branch is greater than that of the right branch, the fractal tree is skewed to the left. Then in the variation of branch length if the ratio of the length of the left branch is smaller than the ratio of the length of the right branch, the length of the left branch is longer than the length of the right branch. Then at the angle of the branching the smaller the  $\theta$  that is included causes the branches to be closer together. The use of stochastic L-Systems can produce more diverse fractal tree patterns, even though they use the same production rules and parameter values.

**Keywords:** Fractal, Fractal Tree, L-Systems

**MSC2020:** 03D78

## 1. Pendahuluan

Fraktal berasal dari bahasa Latin *fractus* yang artinya "patah", "rusak" atau "tidak teratur" [13]. Fraktal merupakan benda geometris yang kasar pada segala skala dan terlihat dapat dibagi bagi dengan cara yang radikal [5, 10]. Inti dari konsep fraktal adalah adanya proses pembangkitan bagian-bagian yang identik melalui aturan atau rumusan tertentu dan memiliki "kesamaan diri" (*self-similarity*) dalam jumlah besar. Prinsip yang paling sederhana dari pembangkitan tersebut adalah keteraturan (*regularity*) dan keteracakan (*randomness*). Berdasarkan prinsip keteraturan, bagian-bagian terkecil dari suatu struktur dapat menyusun diri sendiri dalam sebuah mode periodik atau kuasiperiodik menghasilkan bentuk seperti segitiga sierpinski, kurva *Koch-snowflake* dan himpunan Cantor. Sementara dari prinsip keteracakan, contohnya yaitu *chaos game* dan

pertumbuhan rambut binatang yang prosesnya berlangsung secara acak [12]. Fraktal memiliki sifat unik yaitu *self-similarity* atau keserupaan diri [8]. Sifat *self-similarity* atau keserupaan diri merupakan obyek yang memiliki bagian-bagian pembentuk yang sama dengan bentuk keseluruhan [6]. Sifat *self-similarity* didapat melalui beberapa iterasi yang dilakukan secara terus-menerus dengan skala yang lebih kecil, sehingga setiap bagian dari setiap komponen jika diperbesar akan tampak tetap dari keseluruhan objek [11]. Fraktal memiliki berbagai macam objek. Salah satunya yaitu pohon fraktal. Pohon fraktal secara sederhana merupakan batang dan sejumlah cabang yang masing masing terlihat seperti pohon itu sendiri [2]. Pohon fraktal dapat dibangkitkan melalui metode *L-Systems* dan IFS. *Iterated Function System* (IFS) adalah suatu fungsi iterasi transformasi citra yang digunakan untuk membentuk objek-objek fraktal. IFS dibangun melalui transformasi yang diulang-ulang untuk sebarang pola [14]. *L-Systems* merupakan metode yang mengubah secara bergantian pada bagian-bagian dari objek sederhana seperti segmen garis dengan menggunakan formula atau aturan produksi. Terdapat dua jenis *L-Systems* yang berdasarkan jumlah aturan produksinya yaitu *deterministic L-Systems* dan *stochastic L-Systems*. *Deterministic L-Systems* merupakan *L-Systems* yang memiliki tepat satu produksi untuk setiap simbol. *Stochastic L-Systems* merupakan *L-Systems* yang memiliki lebih dari satu aturan produksi untuk setiap simbol tertentu dan memerlukan kriteria tertentu untuk menentukan kapan aturan suatu produksi diterapkan (probabilitas).

Terdapat beberapa penelitian tentang pohon fraktal. Salah satunya yaitu Wahyuningtyas [15] dengan topik penelitiannya tentang pembangkitan fraktal pohon Pythagoras menggunakan *iterated function system*. Pada penelitian tersebut menghasilkan pohon fraktal dapat dibangkitkan dengan metode *iterated function systems*. Zamir [16] dengan topik penelitian *Arterial Branching within the confines of fractal L-Systems formalism*. Pada penelitian tersebut *L-Systems* dapat menghasilkan struktur pohon yang memiliki sifat teoritis dan memiliki pola fraktal.

Dari beberapa penelitian tentang pohon fraktal penulis ingin mengembangkan pembangkitan pohon fraktal menggunakan *L-Systems* dengan tambahan variasi. Variasi yang diberikan yaitu pada ketebalan cabang, panjang cabang, dan sudut percabangan. Pengembangan ini diharapkan mampu menghasilkan pola pohon fraktal yang semakin beragam. Adapula tujuan yang dicapai pada penelitian ini yaitu untuk menganalisis pola pohon fraktal yang dibangkitkan menggunakan *L-Systems* dengan variasi ketebalan, panjang, dan sudut percabangan.

Pohon fraktal secara sederhana merupakan batang dan sejumlah cabang yang masing-masing terlihat seperti pohon itu sendiri [2]. Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan tentang struktur fraktal pohon. Pertama-tama, sepotong kecil pohon terlihat seperti seluruh pohon. Kedua, pohon dibentuk dengan proses sederhana yang dilakukan secara berulang-ulang. Terdapat teori menarik mengenai pohon yang dicetuskan oleh Leonardo Da Vinci bahwa semua cabang pohon di setiap tahap tingginya ketika disatukan memiliki

ketebalan yang sama dengan batang di bawahnya.

Proses mendasar dan mendasar yang digunakan oleh pohon untuk tumbuh adalah tunas keluar dari tanah, dan kemudian membelah menjadi cabang-cabang. Masing-masing cabang ini kemudian membelah lagi menjadi cabang baru, dan masing-masing cabang ini membelah lagi menjadi cabang baru. Pada setiap titik dalam proses ini, seolah-olah dua pohon baru yang lebih kecil muncul, dan cabang-cabang baru dapat dianggap sebagai batang pohon generasi berikutnya. Jadi pohon besar dapat dilihat sebagai kumpulan banyak pohon kecil dengan berbagai ukuran. Demikianlah pengulangan percabangan yang membentuk pohon juga menghasilkan kesamaan diri pohon itu.

Pada tahun 1968 seorang ahli biologi memperkenalkan jenis baru dari mekanisme penulisan ulang string yang kemudian disebut *L-Systems* [9]. *L-Systems* adalah sebuah sistem penulisan kembali, yaitu teknik pembangunan objek yang kompleks dari pengulangan bagian objek yang sederhana dengan menggunakan suatu aturan penulisan kembali yang dilakukan secara rekursif. Objek kompleks ini dibangun dengan cara mengganti bagian-bagian dari objek sederhana secara bergantian menggunakan seperangkat aturan penulisan kembali atau produksi [7]. *L-Systems* terdiri dari beberapa komponen utama yaitu, huruf, aksioma, dan aturan produksi [4]. Ada dua jenis *L-Systems* berdasarkan jumlah aturan produksi, yaitu *deterministic* dan *stochastic L-Systems*.

*Parametric L-Systems* merupakan rangkaian modul terdiri dari huruf dengan parameter terkait. Huruf-huruf milik alfabet  $V$  dan parameter milik himpunan bilangan real. Misalkan modul dengan huruf  $A \in V$  dan parameter  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  maka dilambangkan dengan  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  [3]. Berikut bentuk produksi *parametric L-Systems*.

$$\text{predecessor: condition} \rightarrow \text{successor}$$

Secara sederhana *predecessor* merupakan simbol tunggal dan parameter yang terkait. Jika *predecessor* memenuhi *condition* yang telah didefinisikan maka *predecessor* akan digantikan oleh *successor*. Berikut contoh dari bentuk parameter tersebut:

$$\begin{aligned} \omega &: A(0,0; 0,2) \\ p_1 &: A(s, f): s < f \rightarrow F[+F][-F]A(s + 0,1; f) \\ p_2 &: A(s, f): s \geq f \rightarrow F \end{aligned}$$

$\omega$  merupakan aksioma. Sedangkan  $p_1$  dan  $p_2$  merupakan aturan produksi yang terdiri dari  $A(s, f)$  sebagai *predecessor*. Kemudian  $s < f$  merupakan *condition* untuk  $p_1$  dan  $s \geq f$  merupakan *condition* untuk  $p_2$ . Lalu  $F[+F][-F]A(s + 0,1; f)$  merupakan *successor* untuk  $p_1$  dan  $F$  merupakan *successor* untuk  $p_2$ . Dan berikut merupakan hasil dari aksioma dan aturan-aturan produksi di atas:

$$\begin{aligned} g_0 &: A(0,0; 0,2) \\ g_1 &: F[+F][-F]A(0,1; 0,2) \end{aligned}$$

$$g_2: F[+F][-F]F[+F][-F]A(0,2; 0,2)$$

$$g_3: F[+F][-F]F[+F][-F]F$$

Dimulai dengan  $g_1$  sebagai aksioma. Produksi  $p_1$  berlaku karena  $0,0 < 0,2$ , sehingga  $A(0,0; 0,2)$  diganti dengan  $F[+F][-F]A(0,1; 0,2)$ . Produksi  $p_1$  berlaku lagi karena  $0,1 < 0,2$  dan di dapat  $g_2$ . Karena  $0,2 = 0,2$  maka produksi  $p_2$  berlaku, sehingga di dapat  $g_3$  [1].

## 2. Metodologi

Langkah awal penelitian ini yaitu dengan studi literatur, yaitu melakukan pencarian informasi dari berbagai sumber tertulis seperti jurnal, buku, dan skripsi yang terkait dengan pustaka pohon fraktal dan *L-Systems* sebagai sumber yang relevan. Sumber informasi yang berhubungan dengan masalah penelitian tersebut kemudian dianalisis untuk digunakan sebagai referensi penelitian. Kemudian membangkitkan dan memvariasikan pohon fraktal menggunakan *L-Systems*. Pada langkah ini penulis menggunakan dua jenis *L-Systems*, yaitu *deterministic L-Systems* dan *stochastic L-Systems*. Adapun cara membangkitkan pohon fraktal dengan menggunakan *L-Systems*. Pertama dilakukan yaitu menentukan huruf dan simbol yang akan digunakan. Dalam menentukan huruf dan simbol yang digunakan harus seminim mungkin agar aturan produksi yang digunakan terbentuk lebih sederhana. Kemudian menentukan aksioma yang harus digunakan. Dalam menentukan aksioma penulis menggunakan huruf yang telah ditentukan pada tahap sebelumnya. Berikutnya yaitu pembuatan aturan produksi dilakukan bersamaan dengan penentuan *parametric L-Systems*. Setelah beberapa aturan produksi didapatkan komponen terakhir yang harus ditentukan yaitu faktor probabilitas untuk *stochastic L-Systems*. Dalam penentuan *parametric L-Systems* untuk ketebalan cabang penulis mengacu pada teori yang dicetuskan oleh Leonardo Da Vinci yang mengungkapkan bahwa “semua cabang pohon di setiap tahap tingginya ketika disatukan memiliki ketebalan yang sama dengan batang di bawahnya”. Sementara untuk panjang cabang, semakin kecil rasio panjang yang diinput maka panjang cabangnya akan semakin panjang. Terakhir untuk sudut belok pada tiap cabang, semakin besar ketebalan cabang maka sudut belok pada cabang akan semakin mengecil. Misalkan ada batang mempunyai dua cabang maka ketebalan, panjang, dan sudut didefinisikan sebagai berikut:

$d$  : ketebalan batang,  $d_1$ : rasio ketebalan pada cabang kiri,  $d_2$  : rasio ketebalan pada cabang kanan,  $g_1$  : rasio menentukan panjang cabang bagian kiri,  $g_2$ : rasio menentukan panjang cabang bagian kanan,  $l$  : panjang batang,  $l_1$  : panjang cabang kiri,  $l_2$  : panjang cabang kanan,  $\theta$  : sudut percabangan,  $\alpha$  : sudut belok pada cabang kiri,  $\beta$  : sudut belok pada cabang kanan.

Berdasarkan uraian di atas didapatkan Persamaan (1) sampai Persamaan (5).

$$L = L_1 + L_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\pi d^2 = \frac{1}{2}\pi d_1^2 + \frac{1}{2}\pi d_2^2 \tag{2}$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 \tag{3}$$

$$l_1 = \frac{l}{g_1} \text{ dan } l_2 = \frac{l}{g_2} \tag{4}$$

$$\alpha = (1 - d_1)\theta \text{ dan } \beta = (1 - d_2)\theta \tag{5}$$

Terakhir yaitu memvisualisasikan hasil dengan membuat program menggunakan MATLAB. Setelah hasil didapatkan langkah selanjutnya yaitu menganalisis hasil dan pembahasan. Pola-pola yang didapat akan dibandingkan bentuknya dari pohon fraktal yang dibangkitkan dengan menggunakan *deterministic L-Systems* dan pohon fraktal yang dibangkitkan dengan menggunakan *stochastic L-Systems*.

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1. Pembangkitan Pohon Fraktal Menggunakan *L-Systems*

Dalam pembangkitan pohon fraktal menggunakan *L-Systems* dimulai dengan menentukan huruf dan simbol yang akan digunakan. Kemudian menentukan aksioma yang harus digunakan. Lalu pembuatan aturan produksi dilakukan bersamaan dengan penentuan *parametric L-Systems*. Dan yang terakhir yaitu menentukan nilai probabilitas untuk *stochastic L-Systems*. Berikut merupakan contoh komponen *L-Systems*.

$$\begin{aligned} V &= \{F, f, -, +, \&, !\} \\ w &= f \\ p_1: f &\rightarrow ![+F][-f] \\ p_2: F &\rightarrow \&[+F][-f] \end{aligned}$$

Pada komponen deterministik *L-Systems* di atas, aturan produksi pertama ( $p_1$ ) memetakan  $f$  menjadi  $![+F][-f]$ . Sedangkan aturan produksi kedua ( $p_2$ ) memetakan  $F$  menjadi  $\&[+F][-f]$ . Aturan produksi tersebut menggambarkan bentuk percabangan batang tanaman serta panjang dan ketebalan pada tanaman. Berikut merupakan hasil dari sistem di atas dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Beberapa generasi *L-Systems*

Generasi	Hasil Produksi
$t_0$	$f$
$t_1$	$![+F][-f]$
$t_2$	$![+\&[+F][-f]][-![+F][-f]]$
$t_3$	$![+\&[+\&[+F][-f]][-![+F][-f]]][ -![+\&[+F][-f]][-![+F][-f]]]$

Hasil produksi pada generasi *L-Systems* (lihat pada Tabel 1),  $f$  merupakan hasil generasi pertama dan juga sebagai aksioma. Pada  $t_0$  hanya membentuk sebuah batang. Selanjutnya pada  $t_1$  huruf  $f$  akan membentuk dua cabang. Simbol “+” dan simbol “-” akan membuat cabang berbelok sebesar  $\alpha$  untuk simbol “+” dan  $\beta$  untuk simbol “-”.

### 3.2. Menentukan *Parametric L-Systems*

Langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan lebih banyak variasi pada pohon fraktal dengan cara memasukkan nilai probabilitas, ketebalan batang dan sudut percabangan. Untuk mencapai hal tersebut peneliti menggunakan *parametric L-Systems*. Dengan memasukkan *parametric L-Systems* peneliti dapat memasukkan ketebalan batang, panjang batang, dan sudut percabangan dengan mudah. Misalkan:

$F(l, d)$  : Menggambar cabang yang besar atau kecil ke depan dengan panjang  $l$  satuan dan  $d$  satuan,  $l, d > 0$ .

$f(l, d)$  : Menggambar cabang yang besar atau kecil ke depan dengan panjang  $l$  satuan dan  $d$  satuan,  $l, d > 0$ .

$+(\alpha)$  : Berputar ke kiri sebesar  $\alpha$  derajat.

$-(\beta)$  : Berputar ke kanan sebesar  $\beta$  derajat.

$\&$  : Mengganti fungsi  $F$  pada generasi sebelumnya.

$!$  : Mengganti fungsi  $f$  pada generasi sebelumnya.

$g_1$  : Untuk menentukan panjang cabang bagian kiri.

$g_2$  : Untuk menentukan panjang cabang bagian kanan.

$d_1$  : Rasio ketebalan pada cabang kiri.

$d_2$  : Rasio ketebalan pada cabang kanan.

$l$  : Panjang cabang pada generasi sebelumnya.

$l_1$  : Panjang cabang kiri pada generasi selanjutnya.

$l_2$  : Panjang cabang kanan pada generasi selanjutnya.

$\theta$  : Sudut percabangan.

$\alpha$  : Sudut belok yang dihasilkan dari sudut percabangan.

$\beta$  : Sudut belok yang dihasilkan dari sudut percabangan.

$P_1$  : Peluang munculnya aturan produksi.

$P_2$  : Peluang munculnya aturan produksi.

Perubahan generasi dari aturan produksi *L-Systems* pada Tabel 1 setelah memanfaatkan *parametric L-Systems* dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Generasi *parametric L-Systems*

Generasi	Hasil Produksi
$t_0$	$F$
$t_1$	$! [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ]$
$t_2$	$! [+ \& [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ] ] [ - ! [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ] ]$
$t_3$	$! [+ \& [+ \& [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ] ] [ - ! [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ] ] ] [ - ! [+ \& [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ] ] [ - ! [+ (\alpha) F] [ - (\beta) f ] ] ]$

Berdasarkan aturan ketebalan cabang, panjang cabang, dan sudut percabangan pada Persamaan (6) sampai (7), berikut merupakan contoh implementasi ketebalan cabang, panjang cabang dan sudut percabangan pada aturan produksi.

$$w = f(l, d)$$

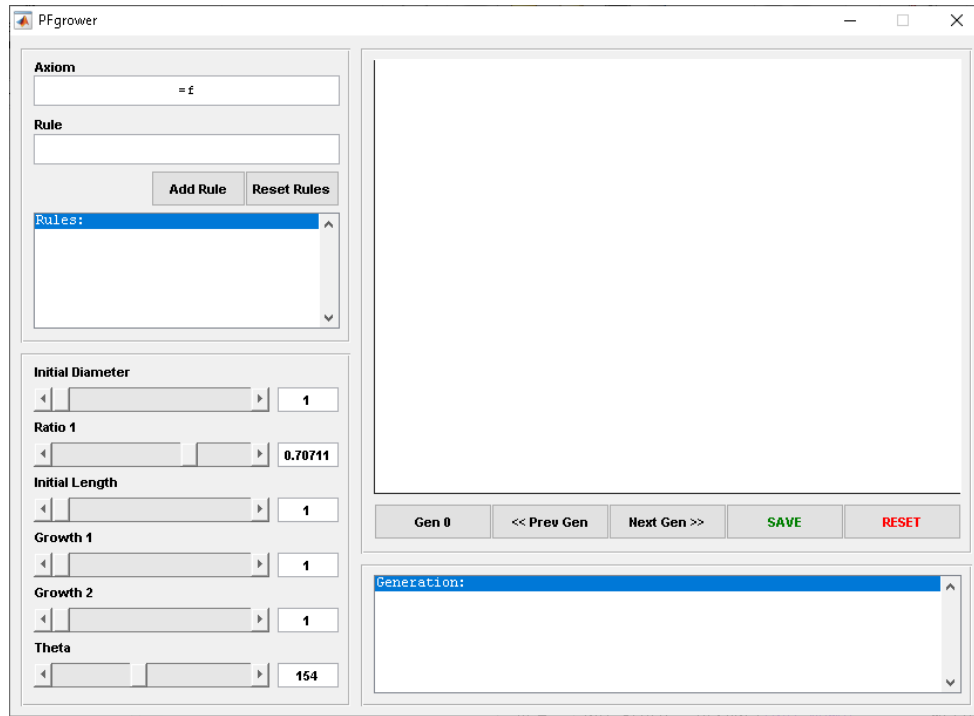
$$p_1: f(l, d) \rightarrow ! (l, d) \left[ + (\alpha) F \left( \frac{l}{g_1}, d * d_1 \right) \right] \left[ - (\beta) f \left( \frac{l}{g_2}, d * d_2 \right) \right] : P_1 \quad (6)$$

$$p_2: F(l, d) \rightarrow \& (l, d) \left[ + (\alpha) F \left( \frac{l}{g_1}, d * d_1 \right) \right] \left[ - (\beta) f \left( \frac{l}{g_2}, d * d_2 \right) \right] : P_2 \quad (7)$$

Generasi awal akan tercipta suatu batang dengan panjang sebesar  $l$  dan ketebalan sebesar  $d$ . Kemudian generasi selanjutnya menghasilkan dua cabang  $f$  dan  $F$ . Konstanta  $g_1$  dan  $g_2$  menentukan panjang pada setiap cabang.  $P_1$  dan  $P_2$  merupakan peluang munculnya aturan produksi  $p_1$  dan  $p_2$ .

### 3.3. Simulasi Program

Simulasi program untuk membangkitkan pohon fraktal menggunakan MATLAB2015B. Peneliti menampilkan hasil penelitian dengan memanfaatkan tampilan GUI yang terdapat pada MATLAB2015B. Tampilan program simulasi ditunjukkan pada Gambar 1.



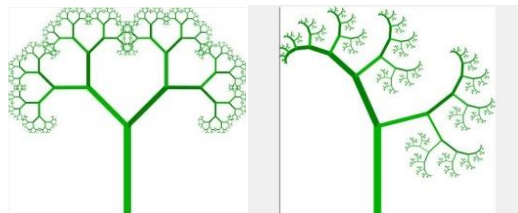
Gambar 1. Tampilan GUI pohon fraktal

### 3.4. Variasi Pohon Fraktal Menggunakan *Deterministic L-Systems*

Variasi kali ini penulis melakukan empat macam variasi yaitu:

- a. Variasi pohon fraktal dengan mengubah ketebalan cabang

Pada variasi ini, penulis menggunakan ketebalan cabang dengan rasio ketebalan yang divariasikan. Masing-masing rasio ketebalan yang digunakan untuk pohon fraktal yaitu  $d_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  untuk pohon fraktal pertama dan  $d_1 = 0,85$ ,  $d_2 = 0,5267$  untuk pohon fraktal kedua. Kedua variasi ketebalan ini menggunakan  $\theta = 154^\circ$  dan rasio panjang cabang  $g_1 = g_2 = 1,6$ . Berikut merupakan hasil visualisasi dari mengubah ketebalan pada pohon fraktal akan ditampilkan pada Gambar 2.



(a)

(b)

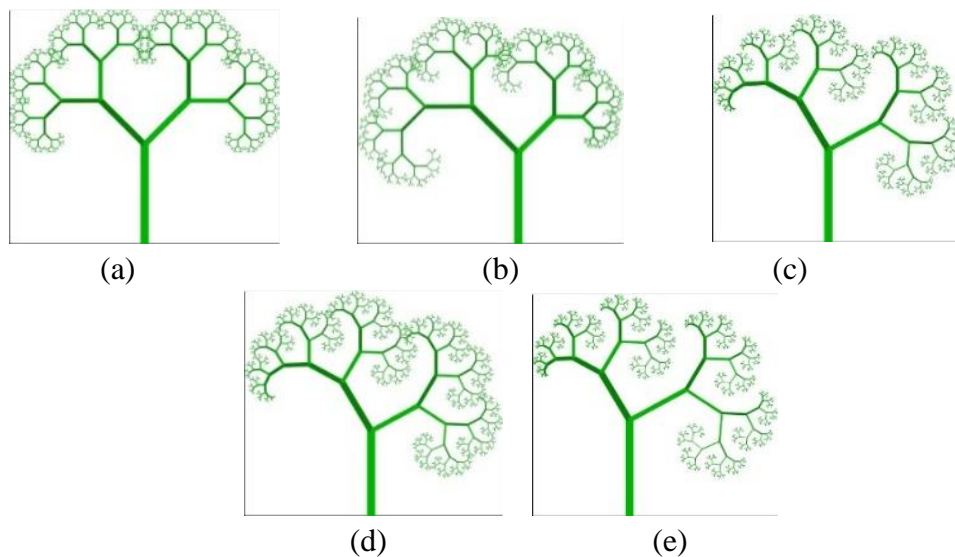
(a)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (b)  $d_1 = 0,85$ ,  $d_2 = 0,5267$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$

Gambar 2. Hasil pohon fraktal dengan variasi ketebalan cabang



Pohon fraktal hasil variasi ketebalan pada Gambar 2(a) terlihat simetris, sedangkan pada Gambar 2(b) lebih condong ke kiri. Hal tersebut dikarenakan rasio dari ketebalan yaitu  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Pada Gambar 2(b) rasio ketebalan  $d_1$  lebih besar dari pada rasio ketebalan  $d_2$ , mengakibatkan cabang sebelah kiri lebih tebal dari pada cabang kanan. Berdasarkan Persamaan (5) rasio ketebalan  $d_1$  lebih besar dari pada rasio ketebalan  $d_2$ , mengakibatkan sudut  $\alpha$  lebih kecil dari pada sudut  $\beta$ . Sehingga menghasilkan pola pohon fraktal yang condong ke kiri.

- b. Variasi pohon fraktal dengan megubah panjang cabang  
 Variasi kali ini penulis menggunakan panjang cabang. Dalam simulasi ini penulis menggunakan dua variasi ketebalan cabang yaitu  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dan  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ . Pada kedua varasi ketebalan pada cabang penulis menggunakan  $\theta_1 = 154^\circ$ . Pada ketebalan ke dua cabang yang sama penulis menggunakan dua rasio panjang yang berbeda yaitu  $g_1 = g_2 = 1,6$  dan  $g_1 = 1,4$ ,  $g_2 = 1,8$ . Sementara pada ketebalan ke dua cabang yang berbeda penulis menggunakan tiga rasio panjang yang berbeda yaitu  $g_1 = g_2 = 1,6$ ,  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,6$ ;  $g_1 = 1,6$ ,  $g_2 = 1,3$ . Berikut merupakan hasil visualisasi dari mengubah panjang cabang pada pohon fraktal akan ditampilkan pada Gambar 3.



(a)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (b)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $g_1 = 1,4$ ,  $g_2 = 1,8$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (c)  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (d)  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ ,  $g_1 = 1,5$ ,  $g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (e)  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ ,  $g_1 = 1,75$ ,  $g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ .

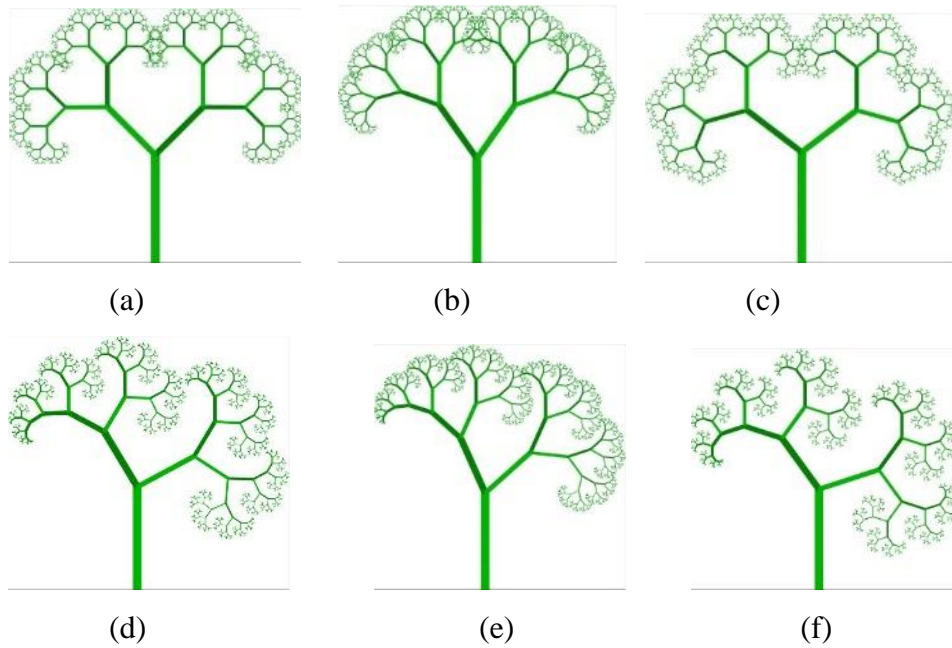
Gambar 3. Hasil pohon fraktal dengan variasi panjang cabang

Masing-masing hasil variasi pada Gambar 3 memiliki bentuk yang berbeda. Pada Gambar 3(a) dengan parameter rasio ketebalan cabang  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , rasio

panjang cabang  $g_1 = g_2 = 1,6$  dan sudut percabangan  $\theta = 154^\circ$  menghasilkan pola pohon fraktal yang simetris. Pada hasil tersebut terlihat bahwa ketebalan, panjang serta sudut belok pada cabang kiri sama dengan cabang kanan. Hal ini dikarenakan parameter-parameter yang digunakan pada kedua cabang bernilai sama. Lalu Gambar 3(b) dihasilkan dari penggunaan nilai parameter  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ;  $g_1 = 1,4, g_2 = 1,8$  dan  $\theta = 154^\circ$ . Dari nilai-nilai tersebut diketahui bahwa parameter rasio panjang cabang kiri lebih kecil dibandingkan rasio panjang cabang kanan. Berdasarkan Persamaan (4) panjang cabang berbanding terbalik dengan parameter rasio panjang cabang. Oleh karena itu, cabang kiri yang dihasilkan lebih panjang dari cabang kanan. Apabila dilihat pada hasil simulasi Gambar 3(b), konsep tersebut dipenuhi karena dengan menggunakan nilai parameter itu, menghasilkan pola pohon fraktal dengan cabang kiri lebih panjang dari pada cabang kanan. Kemudian pada Gambar 3(c) merupakan hasil dari nilai parameter  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4, g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ . Karena  $d_1$  lebih besar dari pada  $d_2$  maka jelas bahwa ketebalan cabang sebelah kiri lebih besar dari pada cabang kanan. Berdasarkan Persamaan (5) mengakibatkan sudut belok sebelah kiri lebih kecil dari pada sudut belok sebelah kanan, sehingga pola pohon fraktal terlihat condong ke kiri. Namun untuk panjang cabang sama panjang, karena rasio parameter  $g_1 = g_2$ . Selanjutnya, pada Gambar 3(d) dengan parameter  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4, g_1 = 1,5, g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$  menghasilkan bentuk pohon fraktal yang condong ke kiri dengan panjang cabang kiri lebih panjang dari pada cabang kanan. Hasil tersebut diperoleh karena nilai  $d_1$  lebih besar dari  $d_2$  dan nilai  $g_1$  lebih kecil dari  $g_2$ , seperti pada hasil simulasi sebelumnya di Gambar 3(b) dan Gambar 3(c). Terakhir hasil pada Gambar 3(e) didapatkan dari nilai parameter  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4, g_1 = 1,75, g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ . Karena  $d_1$  lebih besar dari pada  $d_2$  dan  $g_1$  lebih besar dari pada  $g_2$  mengakibatkan pohon fraktal menjadi condong ke kiri dan panjang cabang kiri lebih pendek dari pada cabang kanan.

c. Variasi pohon fraktal dengan mengubah sudut percabangan

Selanjutnya yaitu variasi pada sudut percabangan. Dalam simulasi ini penulis menggunakan dua variasi ketebalan cabang yaitu  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dan  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4$ . Pada semua variasi penulis menggunakan tiga sudut yang berbeda yaitu  $\theta_1 = 154^\circ, \theta_2 = 120^\circ, \theta_3 = 180^\circ$ . Kemudian penulis menggunakan rasio panjang untuk semua variasi yaitu  $g_1 = g_2 = 1,6$ . Berikut merupakan hasil visualisasi dari mengubah sudut percabangan pada pohon fraktal akan ditampilkan pada Gambar 4.



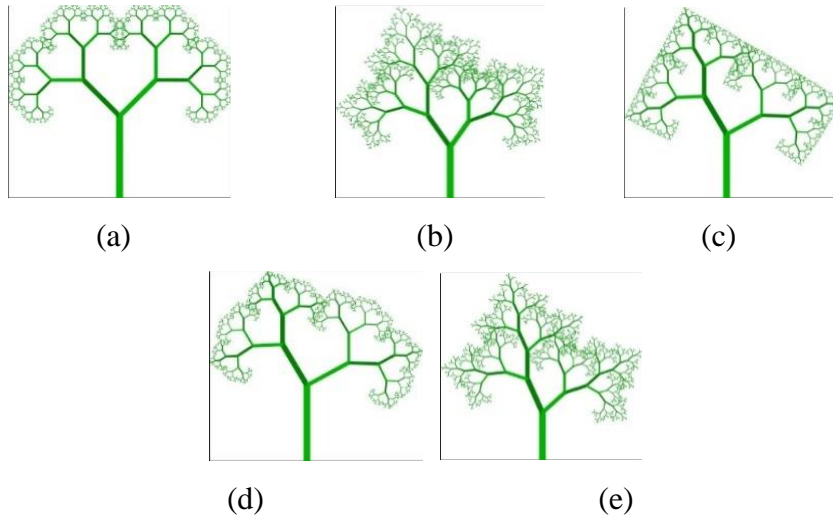
(a)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (b)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_2 = 120^\circ$ ; (c)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_3 = 180^\circ$ ; (d)  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_1 = 154^\circ$ ; (e)  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_2 = 120^\circ$ ; (f)  $d_1 = 0,8$ ,  $d_2 = 0,4$ ,  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_3 = 180^\circ$

Gambar 4. Hasil pohon fraktal dengan variasi sudut percabangan

Hasil pada Gambar 4(a) merupakan hasil simulasi dengan nilai parameter  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dan  $\theta_1 = 154^\circ$ . Selanjutnya pada nilai parameter  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dan  $\theta_2 = 120^\circ$  menghasilkan Gambar 4(b). Kemudian pada Gambar 4(c) merupakan hasil dari nilai parameter  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dan  $\theta_3 = 180^\circ$ . Dari Gambar 4(a), Gambar 4(b), dan Gambar 4(c) bentuknya terlihat simetris dikarenakan nilai parameter  $d_1 = d_2, g_1 = g_2$ , dan  $\alpha = \beta$ . Selanjutnya pada parameter  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4$ , dan  $\theta_1 = 154^\circ$  menghasilkan Gambar 4(d). Berikutnya hasil pada Gambar 4(e) didapatkan dari nilai parameter  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4$ , dan  $\theta_2 = 120^\circ$ . Terakhir pada Gambar 4.5(f) merupakan hasil dari nilai parameter  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4$ , dan  $\theta_3 = 180^\circ$ . Pada Gambar 4(d), Gambar 4(e), dan Gambar 4(f) bentuknya terlihat lebih condong ke kiri. Hal tersebut dikarenakan setiap parameter diinputkan pada rasio ketebalan  $d_1$  lebih besar dari pada rasio ketebalan  $d_2$  sehingga berdasarkan Persamaan (5) mengakibatkan sudut  $\alpha$  lebih kecil dari pada sudut  $\beta$ . Terdapat persamaan di hasil variasi pada Gambar 4 yaitu, semakin kecil  $\theta$  yang diinputkan mengakibatkan cabang-cabangnya semakin berdekatan. Begitupun sebaliknya semakin besar  $\theta$  yang diinput mengakibatkan cabang-cabangnya semakin merenggang.

- d. Variasi pohon fraktal dengan mengubah ketebalan, panjang, dan sudut percabangan

Variasi kali ini melibatkan perubahan pada ketebalan, panjang, dan sudut percabangan. Pada variasi kali ini menggunakan ketebalan panjang dan sudut percabangan masing-masing yaitu  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  dan  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4$ ;  $g_1 = 1,6, g_2 = 1,6$ , dan  $g_1 = 1,3, g_2 = 1,6$ ;  $\theta = 154^\circ$ ;  $\theta = 120^\circ$ . Berikut merupakan hasil visualisasi dari mengubah ketebalan, panjang, dan sudut percabangan akan ditampilkan pada Gambar 5.



(a)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, g_1 = g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (b)  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}, g_1 = 1,3, g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_2 = 120^\circ$ ; (c)  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4, g_1 = 1,45, g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_3 = 154^\circ$ ; (d)  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4, g_1 = 1,6, g_2 = 1,6$ , dan  $\theta = 154^\circ$ ; (e)  $d_1 = 0,8, d_2 = 0,4, g_1 = 1,3, g_2 = 1,6$ , dan  $\theta_2 = 120^\circ$

Gambar 5. Hasil pohon fraktal dengan variasi ketebalan cabang, panjang cabang, dan sudut percabangan

### 3.5. Variasi Pohon Fraktal Menggunakan Stochastic L-Systems

Pada bagian ini dibahas mengenai variasi pohon fraktal menggunakan stochastic L-Systems. Yang pertama dilakukan yaitu menentukan parametric deterministic L-Systems. Selanjutnya yaitu menentukan nilai peluang munculnya aturan produksi untuk stochastic L-Systems. Berikut merupakan komponen L-Systems yang akan digunakan.

$$V = \{f, F, \&, !, +, -, (, ), [, ]\}$$

$$\omega = f, d = 10, d_1 = 0,85, d_2 = 0,5267, l = 10, g_1 = 1,5, g_2 = 1,65, \theta = 140^\circ$$

$$p_1: f(l, d) \rightarrow !(l, d) \left[ +(a_1)F \left( l * \frac{1}{g_1}, d * d_1 \right) \right] \left[ -(b_1)f \left( l * \frac{1}{g_2}, d * d_2 \right) \right]$$

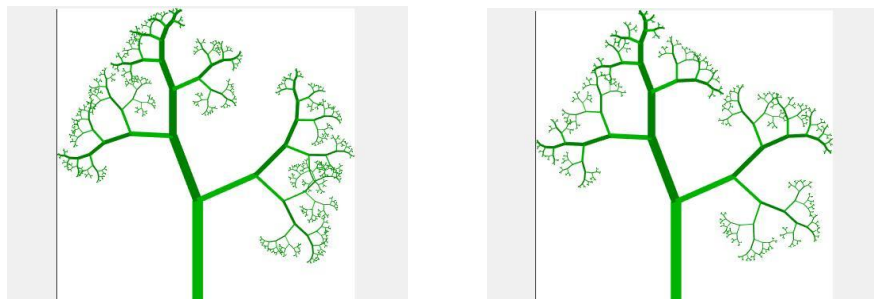
$$p_2: +(a)F(l, d) \rightarrow +(a)\&(l, d) \left[ +(a)F \left( l * \frac{1}{g_1}, d * d_1 \right) \right] \left[ -(b)f \left( l * \frac{1}{g_2}, d * d_2 \right) \right] : 0.4$$

$$p_3: +(a)F(l, d) \rightarrow +(a)\&(l, d) \left[ +(b)f \left( l * \frac{1}{g_2}, d * d_2 \right) \right] \left[ -(a)F \left( l * \frac{1}{g_1}, d * d_1 \right) \right] : 0.6$$

$$\begin{aligned}
 p_4: -(a)F(l, d) &\rightarrow -(a)\&(l, d) \left[ +(a)F\left(l * \frac{1}{g_1}, d * d_1\right) \right] \left[ -(b)f\left(l * \frac{1}{g_2}, d * d_2\right) \right] : 0.3 \\
 p_5: -(a)F(l, d) &\rightarrow -(a)\&(l, d) \left[ +(b)f\left(l * \frac{1}{g_2}, d * d_2\right) \right] \left[ -(a)F\left(l * \frac{1}{g_1}, d * d_1\right) \right] : 0.7 \\
 p_6: -(b)f(l, d) &\rightarrow -(b)\!(l, d) \left[ +(b)f\left(l * \frac{1}{g_2}, d * d_2\right) \right] \left[ -(a)F\left(l * \frac{1}{g_1}, d * d_1\right) \right] : 0.4 \\
 p_7: -(b)f(l, d) &\rightarrow -(b)\!(l, d) \left[ +(a)F\left(l * \frac{1}{g_1}, d * d_1\right) \right] \left[ -(b)f\left(l * \frac{1}{g_2}, d * d_2\right) \right] : 0.6 \\
 p_8: +(b)f(l, d) &\rightarrow +(b)\!(l, d) \left[ +(b)f\left(l * \frac{1}{g_2}, d * d_2\right) \right] \left[ -(a)F\left(l * \frac{1}{g_1}, d * d_1\right) \right] : 0.3 \\
 p_9: +(b)f(l, d) &\rightarrow +(b)\!(l, d) \left[ +(a)F\left(l * \frac{1}{g_1}, d * d_1\right) \right] \left[ -(b)f\left(l * \frac{1}{g_2}, d * d_2\right) \right] : 0.7
 \end{aligned}$$

Pada aturan produksi di atas, terlihat bahwa terdapat sembilan aturan dengan delapan di antaranya memiliki probabilitas. Aturan  $p_2$  dan  $p_3$  memiliki *predecessor* yang sama namun dengan probabilitas yang berbeda, sehingga *successor* yang dihasilkan juga berbeda. Hal ini juga digunakan pada aturan  $p_4$  dengan  $p_5$ , aturan  $p_6$  dengan  $p_7$ , dan aturan  $p_8$  dengan  $p_9$ . Aturan tersebut kemudian disimulasikan dengan parameter rasio ketebalan cabang  $d_1 = 0,85$ ,  $d_2 = 0,5267$ ; rasio panjang cabang  $g_1 = g_2 = 1,6$ , dan sudut percabangan  $\theta = 154^\circ$ . Simulasi ini dilakukan dua kali dan hasilnya ditunjukkan pada Gambar 5.

Pada Gambar 5 terlihat bahwa dengan aturan produksi yang sama dan parameter yang sama, dengan menggunakan *stochastic L-Systems* dapat menghasilkan pola pohon fraktal yang berbeda. Hal tersebut dikarenakan pada proses produksi terdapat mekanisme random untuk memilih *successor* yang akan digunakan untuk mengganti *predecessor* sesuai probabilitasnya. Penggunaan mekanisme random tersebut membuat aturan produksi masing-masing generasi berbeda-beda untuk setiap simulasi yang dilakukan. Oleh karena itu, penerapan *stochastic L-Systems* dapat menghasilkan pola pohon fraktal yang sangat beragam.



Gambar 6. Hasil pohon fraktal dengan menggunakan *stochastic L-Systems*

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat ditarik kesimpulan bahwa *L-Systems* dapat digunakan untuk mendapatkan variasi pohon fraktal dengan pengaruh parameter rasio ketebalan, rasio panjang, sudut sebagai berikut.

- a. Rasio ketebalan yang diinput semakin kecil mengakibatkan ketebalan cabang semakin kecil dan sudut beloknya semakin besar. Begitupun sebaliknya, semakin besar rasio ketebalan yang diinputkan maka ketebalan cabang semakin besar dan sudut beloknya semakin kecil.
- b. Jika rasio panjang cabang kiri yang diinputkan lebih kecil dari pada rasio panjang cabang kanan, maka cabang kiri lebih panjang dari pada cabang kanan.
- c. Semakin besar sudut  $\theta$  yang diinputkan maka semakin merenggang cabang pada pohon fraktal. Begitupun sebaliknya, semakin kecil sudut  $\theta$  maka semakin berdekatan.
- d. Penggunaan *stochastic L-Systems* dapat menghasilkan pola pohon fraktal yang lebih beragam, meskipun menggunakan aturan produksi dan nilai parameter yang sama.

#### Daftar Pustaka

- [1] Curry, R., (1999), *On the Evolution of Parametric L-Systems*, Canada: University of Calgary.
- [2] Frongillo, R.M., Lock, E., dan Brown, D.A., (2006), Symmetric Fractal Trees in Three Dimension, *Chaos, Solions & Fractals* 32(2), PP: 284-295.
- [3] Hasang, S. dan Supardjo, S., (2012), Geometri Fraktal dalam Rancangan Arsitektur, *Media Martasain*, 9(1), PP: 111-124.
- [4] Juhari, (2013), Pemodelan Pertumbuhan Tanaman Zea Mays L. Menggunakan *Stochastic L-Systems*, *Jurnal CAUCHY* 3(1), PP: 49-54.
- [5] Mandelbrot, B.B., (1983), *The Fractal Geometry of Nature*, New York : W. H. Freeman and Company.
- [6] Marom, S., (2017), Application of Fractal Concept in Material Batik Development Baset on Wolframs Mathematica, *Jurnal Sains Matematika dan Terapan* 1(2), PP: 49-61.
- [7] Mishra, J. dan Mishra, S., (2007), *L-Systems Fractal*, Netherland : Elsevier.
- [8] Purnomo, K.D., (2014), Pembangkitan Segitiga Sierpinski dengan Transformasi Affine Berbasis Benda Geometris, *Prosiding Seminar Nasional Matematika* 1(1), 19 November 2014, Universitas Jember: 365-375.

- [9] Pusinkiewicz, P. dan Lindenmayer, A., (2004), *The Algorithmic Beauty of Plants*, New York : Springer-Verlag.
- [10] Romadiastri, Y., (2013), Batik Fraktal: Perkembangan Aplikasi Geometri Fraktal, *Delta* 1(2), PP: 115-199.
- [11] Saefurrohman dan Ningsih., D.H.U., (2016), Desain Motif Batik Dengan Metode Fraktal Dan Algoritma L-Systems untuk Membangun Pustaka Batik Wali, *Jurnal Teknologi Informasi DINAMIK* 21(1), PP: 42-51.
- [12] Sampurno dan Faryuni, I. D., (2016), *Metode Analisis Fraktal*, Yogyakarta: CV Budi Utama.
- [13] Sekawati, L., (2013), Teknik Penggambaran Bentuk dan Citra Alamiah Berbasis Dimensi Fraktal, *Makalah IF2120 Matematika diskrit*.
- [14] Utomo, B., (2011), Fraktal dan Invers Fraktal, *Jurnal Matematika* 2(1), PP: 28-37.
- [15] Wahyuningtyas, D., (2020), Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Metode Iterated Function System, *Skripsi*, Jember: Universitas Jember.
- [16] Zamir, M., (2001), Arterial Branching within the confines of fractal L-Systems formalism, *Jurnal Gen Physiol* 118, PP: 267-275.

