Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 17 Nomor 2 2017, 67 - 78
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

OPTIMASI PORTOFOLIO DENGAN MENGGUNAKAN PEMPROGRAMAN KUADRATIK

(Portfolio Optimization by Quadratic Programming)

Wahyu Rianingsih, Mohammad Hasan dan Agustina Pradjaningsih
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121, Indonesia
Email: hasan.fmipa@unej.ac.id, agustina.fmipa@unej.ac.id

Abstract. Portfolio is amount of investment. It determines proportion of fund that should be allocated in each investment in order to increase a certain profit with a certain risk. This research has aim to achieve an optimal result of portfolio case. Examaning this case is use quadratic programming, and then finishing with Wolfe method.

Keywords: Portfolio, Quadratic Programming, Wolfe Method, Investment, Devident

MSC 2020: 90C20

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan perekonomian, pasar modal memiliki peranan yang sangat penting terutama pada proses alokasi penyebaran dana, dalam rangka pemenuhan kebutuhan investasi. Selain itu, pasar modal juga memungkinkan bagi para pemodal untuk membentuk portofolio sesuai dengan resiko yang bersedia ditanggung dan tingkat keuntungan yang diharapkan.

Dalam optimasi portofolio, para pemodal ingin mengetahui seberapa besar dana yang akan dialokasikan pada tiap-tiap investasi agar tingkat keuntungan yang diharapkan lebih besar daripada atau sama dengan suatu jumlah terendah yang dapat diterima dengan tingkat resiko yang kecil, tetapi pemodal tidak tahu dengan pasti tingkat keuntungan yang akan diperoleh.

Pemrograman kuadratik merupakan suatu teknik untuk menyelesaikan masalah program tak linier dengan fungsi tujuan berbentuk kuadrat dan kendala berbentuk linier. Pemrograman kuadratik dapat diaplikasikan pada masalah-masalah dalam bidang industri maupun investasi. Salah satu contoh yaitu masalah optimasi portofolio yang dikembangkan oleh Harry Markowitz tahun 1956 [2]. Penyelesaian Pemrograman kuadratik, untuk mendapatkan nilai optimal dari fungsi tujuan, dilakukan dengan menyajikan masalah pemrograman kuadratik kedalam pemrograman linier. Selanjutnya, pemrograman linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode Wolfe.

Permasalahan yang akan dibahas adalah bagaimana mendapatkan hasil yang optimal dari masalah portofolio yaitu menentukan proporsi dana yang harus dialokasikan pada tiap-tiap investasi agar diperoleh hasil yang optimal. Tujuan penelitian ini untuk mendapatkan hasil yang optimal dari suatu portofolio dengan menggunakan pemrograman kuadratik.

Metode Pengali Lagrange digunakan untuk mencari titik optimum dari suatu fungsi dengan kendala berbentuk persamaan. Masalah minimisasi dari fungsi kontinu dengan kendala persamaan mempunyai bentuk

minimumkan $f = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

dengan kendala (1.1)

$$g_i\,(\mathbf{X}) = 0,\ i = 1,2,...,m.$$

Masalah minimisasi pada persamaan (1.1) dapat diselesaikan dengan langkah awalnya menyusun fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$\mathbf{L}\left(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mathrm{m}\right) = f\,(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\,(\mathbf{X}) \tag{1.2}$$

dengan λ_i, $i = 1,2,3,...,m$ disebut pengali Lagrange dan m adalah banyaknya kendala.

Kondisi Kuhn-Tucker merupakan pengembangan dari Metode Lagrange. Kondisi Kuhn-Tucker digunakan untuk optimasi fungsi dengan kendala pertidaksamaan sebagai berikut:

minimumkan $f\,(\mathbf{X})$
dengan kendala (1.3)

$$g_i\,(\mathbf{X}) \le 0,\ i = 1,2,...,m.$$

Masalah di atas merupakan masalah minimisasi. Namun demikian, kondisi Kuhn-Tucker juga dapat diterapkan untuk masalah maksimisasi [6].

Kendala pertidaksamaan di atas dapat diubah menjadi kendala persamaan dengan menambahkan variabel *slack* tak negatif y_i^2 sebagai berikut

$$g_i\,(\mathbf{X}) + y_i^2 = 0,\ i = 1,2,...,m. \tag{1.4}$$

Kendala pada persamaan (2.4) telah berbentuk persamaan sehingga dapat disusun fungsi Lagrange

$$\mathbf{L(X,Y,\lambda)} = f\,(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,[\,g_i\,(\mathbf{X}) + y_i^2\,] \tag{1.5}$$

dengan λ_i, $i = 1,2,,...,m$ adalah pengali Lagrange dan y_i^2, $i = 1,2,...,m$ adalah vektor variabel *slack.*

Kondisi Kuhn-Tucker yang diperlukan pada titik minimum $\mathbf{X}^*$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \\ &\lambda_i g_i = 0 \\ &g_i \leq 0 \\ &\lambda_i \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

dengan $i = 1,2,...,m$ dan $j = 1,2,...,n$.

Pemrograman kuadratik digunakan untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan yang berbentuk kuadrat. Fungsi kuadratik didefinisikan sebagai

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} d_{ij} x_i x_j = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}$$

dengan $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dan **D** adalah matriks simetris [5].

Bentuk umum masalah pemrograman kuadratik adalah:

minimumkan

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X} \tag{1.7}$$

dengan kendala

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{B} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{X} \geq 0 \tag{1.9}$$

dengan **C**, **X** dan **B** adalah vektor kolom, **D** dan **A** adalah matriks. Fungsi $\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}$ mendefinisikan bentuk kuadratik dengan matriks **D** yang bersifat semi definit positif dan simetris. Untuk masalah maksimisasi maka fungsi tujuan dikalikan dengan –1.

Solusi masalah minimisasi pemrograman kuadratik pada persamaan (1.7) sampai dengan persamaan (1.9) dapat diperoleh dengan menerapkan kondisi Kuhn-Tucker dan metode Pengali Lagrange, kemudian nilai optimal diperoleh dengan menggunakan metode Wolfe.

Pada persamaan (1.8), kendala dalam bentuk pertidaksamaan sehingga harus diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack* $y_i^2, i = 1,2,...,m$ dan variabel tambahan $t_j^2, j = 1,2,...,n$ pada persamaan (1.9). Misalkan c_j adalah unsur-unsur dari **C** dan d_{ij} adalah unsur-unsur dari **D** sehingga masalah pemrograman kuadratik yang diberikan pada persamaan (1.7) sampai (1.9) dapat dituliskan dalam bentuk berikut:
minimumkan

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \tag{1.10}$$

dengan kendala

$$a_{ij}x_j + y_i^2 = b_i \text{ dan } -x_j + t_j^2 = 0 \tag{1.11}$$

Kendala telah berbentuk persamaan sehingga dapat disusun fungsi Lagrange

$$\mathbf{L(X, Y, T, \lambda, \theta)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(a_{ij}x_j + y_i^2 - b_i\right) \tag{1.12}$$

dengan λ_i, i = 1,2, ...,m dan θ_j, j = 1,2, ...,n adalah pengali Lagrange yang berhubungan dengan kedua himpunan kendala pada persamaan (1.11).

Kondisi Kuhn –Tucker yang merupakan kondisi perlu yang harus dipenuhi untuk mendapatkan titik minimum lokal dari **L** adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_j} = c_j + \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} - \theta_j = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y_i} = 2\lambda_i y_i = 0 \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t_j} = 2\theta_j t_j = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_i} = a_{ij}x_j + y_i^2 - b_i = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_j} = t_j^2 - x_j = 0 \tag{1.17}$$

$$\mathbf{X} \geq 0, Y_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, \theta_j \geq 0 \tag{1.18}$$

Dengan mendefinisikan variabel baru $Y_i = y_i^2 \geq 0$ maka persamaan (1.16) menjadi

$$a_{ij}x_j + Y_i = b_i. \tag{1.19}$$

Kalikan persamaan (1.14) dengan y_i dan persamaan (1.15) dengan t_j, sehingga diperoleh

$$\lambda_i y_i^2 = \lambda_i Y_i = 0 \tag{1.20}$$

dan

$$\theta_j t_j^2 = 0. \tag{1.21}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.17) ke persamaan (1.21), diperoleh

$$\theta_j x_j = 0. \tag{1.22}$$

Dengan demikian, kondisi perlu yang harus dipenuhi pada titik minimum lokal adalah seperti yang diberikan pada persamaan (1.13), (1.18), (1.19) dan dengan kondisi tambahan pada persamaan (1.20) dan (1.22). Bila ada nilai dari ruas kanan yang negatif maka kalikan persamaan itu dengan –1.

Jadi penyelesaian dari masalah pemrograman kuadratik dapat diperoleh dengan menemukan penyelesaian tak negatif dari himpunan $m+n$ persamaan linier yang diberikan pada persamaan (1.13) dan (1.19), dan memenuhi kondisi tambahan yang diberikan pada persamaan (1.20) dan (1.22).

Solusi dari persamaan (1.13), (1.18), (1.19), (1.20) dan (1.22) dapat diperoleh dengan menggunakan metode Wolfe. Langkah-langkah metode Wolfe adalah sebagai berikut:

(1) menambahkan variabel buatan tak negatif z_j ke persamaan (1.13) sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} - \theta_j + z_j = -c_j. \quad (1.23)$$

Penambahan variabel buatan z_j pada persamaan (1.23) dilakukan jika persamaan itu belum memiliki penyelesaian dasar yang layak.

(2) meminimumkan variabel buatan tak negatif z_j. Dengan demikian, masalah pemrograman kuadratik menjadi
minimumkan

$$w = \sum_{j=1}^{n} z_j \quad (1.24)$$

kendala
$$\sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} - \theta_j + z_j = -c_j$$
$$a_{ij} x_j + Y_i = b_i$$
$$\mathbf{X} \geq 0, Y_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, \theta_j \geq 0$$

dengan kondisi tambahan $\lambda_i Y_i = 0$ dan $\theta_j x_j = 0$.

(3) mendapatkan nilai optimal dengan menggunakan metode simpleks yang sudah dimodifikasi. Modifikasi itu antara lain adanya aturan pemilihan variabel dasar dari kondisi tambahan yang diberikan. Bila Y_i sudah terpilih menjadi variabel dasar maka pasangan komplementernya (λ_i) tidak dapat dipilih sebagai variabel dasar, dan jika x_j sudah terpilih menjadi variabel dasar maka pasangan komplementernya (θ_j) tidak dapat dipilih sebagai variabel dasar .

Portofolio adalah sekumpulan investasi. Dalam investasi, tujuan seorang investor tidak hanya meraih keuntungan yang sebesar-besarnya tetapi harus memperhatikan adanya kemungkinan menderita rugi atau menanggung resiko. Sehingga dengan membentuk portofolio, dapat diperoleh suatu kombinasi yang mendominir saham tertentu [3]. Artinya, dapat diperoleh suatu investasi yang memberikan tingkat keuntungan yang sama dengan resiko yang lebih kecil, atau dengan resiko yang sama memberikan tingkat keuntungan yang lebih besar.

Masalah dalam portofolio adalah menentukan berapa banyak dana yang harus dialokasikan pada tiap-tiap investasi agar tingkat keuntungan yang diharapkan lebih besar daripada atau sama dengan suatu jumlah terendah yang dapat diterima dengan tingkat resiko yang kecil [1]. Untuk keperluan ini, data yang digunakan adalah rasio pembayaran dividen (*devidend payout ratio). Devidend payout ratio* menyatakan berapa bagian pendapatan yang harus dibayarkan sebagai dividen [4]. Dividen merupakan salah satu komponen dalam laporan keuangan perusahaan yang sekaligus sebagai salah satu pemikat bagi investor dalam mengambil keputusan investasinya. *Devidend Payout Ratio* ini dapat diperoleh dengan menggunakan rumus:

$$\textit{Dividend payout ratio} = \frac{\textit{Devidend per share}}{\textit{Earning per share}}, \tag{1.25}$$

dengan *devidend per share* adalah dividen per lembar saham dan *earning per share* adalah laba per lembar saham.

Telah dijelaskan di atas bahwa tujuan investasi bukan hanya mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya tetapi juga harus memperhatikan adanya unsur resiko. Resiko dapat diartikan sebagai unsur ketidakpastian, karena pemodal tidak mengetahui dengan pasti hasil yang akan diperoleh dari investasi yang akan dilakukannya [3]. Karena investasi yang dilakukan mempunyai unsur ketidakpastian, pemodal hanya bisa mengharapkan tingkat keuntungan yang akan diperoleh. Ketidakpastian atas investasi tersebut diukur dengan penyebaran nilai tingkat keuntungan disekitar tingkat keuntungan yang diharapkan. Ukuran penyebaran yang digunakan sebagai ukuran resiko ini disebut sebagai standar deviasi (σ) atau *variance* (σ^2).

Misalkan x_j menunjukkan jumlah dana yang akan dialokasikan pada investasi ke-*j*, dengan $j = 1,2, ...,n$ dan x_{jk} menunjukkan dividen (keuntungan yang akan dibayarkan) dari investasi ke- *j* selama selang waktu ke-*k* di masa lalu, dengan $k = 1,2, \ldots, p$. Tingkat keuntungan yang diharapkan dari investasi ke-*j* adalah

$$E_j = \frac{\sum_{k=1}^{p} x_{jk}}{p}, \tag{1.26}$$

dengan *p* adalah selang waktu.
Hasil yang diharapkan dari gabungan semua investasi adalah

$$E = E_1x_1 + E_2x_2 + \ldots + E_nx_n. \tag{1.27}$$

Tingkat resiko diberikan oleh

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{k=1}^{p} \left(x_{1k}x_1 + x_{2k}x_2 + \ldots + x_{nk}x_n - E\right)^2}{p}. \tag{1.28}$$

Resiko yang diberikan pada persamaan (1.28) disebut sebagai varians. Dengan mensubstitusikan persamaan (1.27) ke persamaan (1.28), diperoleh

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left[\left(x_{1k} - E_1\right)x_1 + \left(x_{2k} - E_2\right)x_2 + \ldots + \left(x_{nk} - E_n\right)x_n\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \tag{1.29}$$

dengan kovarias $\left(\sigma_{ij}\right)$ diberikan oleh

$$\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(x_{ik} - E_i\right)\left(x_{jk} - E_j\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}x_{ik}x_{jk} - \frac{1}{p^2}\left(\sum_{k=1}^{p}x_{ik}\right)\left(\sum_{k=1}^{p}x_{jk}\right) \tag{1.30}$$

Dari persamaan (1.29) dapat diketahui bahwa $f(\boldsymbol{X})$ tak negatif untuk semua harga $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$. Ini berarti bahwa matriks $\left(\sigma_{ij}\right)$ pada persamaan (1.30) yang disebut matriks kovarians adalah semi definit positif. Bila dikaitkan dengan bentuk umum pemrograman kuadratik maka matriks $\left(\sigma_{ij}\right)$ di atas adalah matriks **D**.

Dengan demikian, masalah portofolio dapat dimodelkan dengan pemrograman kuadratik berikut:

minimumkan

$$f(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \tag{1.31}$$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = F \tag{1.32}$$

$$E_1x_1 + E_2x_2 + \ldots + E_nx_n \geq E \tag{1.33}$$

$$x_j \geq 0 \tag{1.34}$$

dengan F adalah jumlah total proporsi dana yang akan dialokasikan, dan E adalah tingkat keuntungan yang diharapkan.

2. Metodologi

Pengkajian mengenai masalah portofolio, dalam rangka mendapatkan hasil yang optimal, menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

(1) mengumpulkan data berupa data sekunder yang diperoleh dari *Indonesian Capital Market Directory* selama periode 1998-2002;
(2) dari data tersebut, dibuat masalah optimasi portofolio menjadi model pemrograman kuadratik seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.31) sampai (2.34);
(3) menerapkan metode Wolfe untuk mendapatkan hasil yang optimal dari masalah minimisasi pemrograman kuadratik tersebut.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Data

Data yang diperoleh berbentuk daftar pembayaran dividen (*Devidend Per Share*) dan laba per saham (*Earning Per Share*) dari perusahaan manufaktur yang terdaftar di Bursa Efek Jakarta tahun 1998-2002. Nama-nama perusahaan itu adalah PT Mustika Ratu Tbk, PT Unilever Indonesia Tbk, PT Gudang Garam Tbk dan PT Good Year Indonesia Tbk. Perusahaan-perusahaan tersebut melakukan pengumuman dividen (tunai) dan laba per saham tahun 1998-2002.

Data *dividen per share* (DPS) dan e*arning per share* (EPS) disajikan dalam Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1 *Data Dividend Per Share (dalam rupiah) Tahun 1998-2002*

Nama Perusahaan	1998	1999	2000	2001	2002
PT Mustika Ratu Tbk	80	69	150	254	36
PT Unilever Indonesia Tbk	400	2500	690	350	500
PT Gudang Garam Tbk	260	500	500	300	300
PT Good Year Indonesia Tbk	500	700	100	120	150

Tabel 2 *Data Earning Per Share (dalam rupiah) Tahun 1998-2002*

Nama Perusahaan	1998	1999	2000	2001	2002
PT Mustika Ratu Tbk	238	197	294	340	48
PT Unilever Indonesia Tbk	2666	6986	1066	1162	1262
PT Gudang Garam Tbk	564	1182	1166	1065	1085
PT Good Year Indonesia Tbk	1227	2150	508	286	401

3.2 Perumusan Portofolio ke dalam Pemrograman Kuadratik

Masalah dalam portofolio adalah menentukan proporsi dana yang harus dialokasikan pada tiap-tiap investasi dengan suatu tingkat keuntungan tertentu dan resiko tertentu. Untuk keperluan ini, data yang digunakan adalah data *devidend payout ratio*. Hasil perhitungan dari data *devidend payout ratio* disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3 *Data Dividend Payout Ratio Tahun 1998-2002*

k	x_{1k}	x_{2k}	x_{3k}	x_{4k}
1	0.3361	0.15	0.461	0.4075
2	0.3503	0.3579	0.4227	0.3256
3	0.5102	0.6473	0.4288	0.1969
4	0.7471	0.3012	0.2817	0.4196
5	0.7500	0.3962	0.2765	0.3741

Keterangan:

x_{1k} = *dividend payout ratio* PT Mustika Ratu pada tahun ke-*k*;

x_{2k} = dividend *payout ratio* PT Unilever pada tahun ke-*k*;

x_{3k} = *dividend payout ratio* PT Gudang Garam pada tahun ke-*k*;

x_{4k} = *dividend payout ratio* PT Good Year pada tahun ke-*k*;

k = 1, 2,3,4,5 masing-masing menyatakan tahun1998,1999,2000,2001, 2002.

Tujuan dari optimasi portofolio adalah meminimumkan resiko dalam portofolio dengan beberapa kendala. Parameter yang digunakan adalah dari data *dividend payout ratio* tahun 1998-2002 yang diberi notasi x_{jk}, dan tingkat keuntungan yang diharapkan dari masing-masing investasi (E_j). Dari Tabel 3 diperoleh prosentase tingkat keuntungan masing-masing investasi yaitu $E_1 = 53.87\%$, $E_2 = 37.05\%$, $E_3 = 37.41\%$, $E_4 = 34.47\%$, varians $(\sigma_{ij}, i = j)$ yaitu $\sigma_{11} = 0.0331, \sigma_{22} = 0.0262, \sigma_{33} = 0.0062, \sigma_{44} = 0.0065$ beserta kovarians $(\sigma_{ij}, i \neq j)$ dengan $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ sebagai berikut

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.00605, \sigma_{13} = \sigma_{31} = -0.01365, \sigma_{14} = \sigma_{41} = 0.0034$$
$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = -0.00015, \sigma_{24} = \sigma_{42} = -0.0118, \sigma_{34} = \sigma_{43} = -0.00265$$

Dalam perhitungan ini, pemilihan *E* didasarkan pada nilai terkecil dari prosentase tingkat keuntungan masing-masing investasi (E_j). Dari Prosentase tingkat keuntungan masing-masing investasi yang teleh diperoleh, diketahui bahwa nilai E_j terkecil terdapat pada perusahaan Good Year yaitu sebesar 34.47 %, sehingga *E* yang diambil sebesar 34.47%. Dengan demikian, masalah portofolio dapat dimodelkan kedalam pemrograman kuadratik berikut:

minimumkan

$$\begin{aligned} f(X) = 0.0331x_1^2 + 0.0262x_2^2 + 0.0062x_3^2 + 0.0065x_4^2 + 0.0121x_1x_2 \\ - 0.0273x_1x_3 + 0.0068x_1x_4 - 0.0003x_2x_3 - 0.0236x_2x_4 \\ - 0.0053x_3x_4 \end{aligned}$$

dengan kendala

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$0.5387x_1 + 0.3705x_2 + 0.3741x_3 + 0.3447x_4 \geq 0.3447$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 .$$

Keterangan:

x_1 = proporsi dana yang akan dialokasikan pada PT Mustika Ratu;

x_2 =proporsi dana yang akan dialokasikan pada PT Unilever Indonesia;

x_3 =proporsi dana yang akan dialokasikan pada PT Gudang Garam;

x_4 =proporsi dana yang akan dialokasikan pada PT Good Year Indonesia.

3.3 Pembahasan

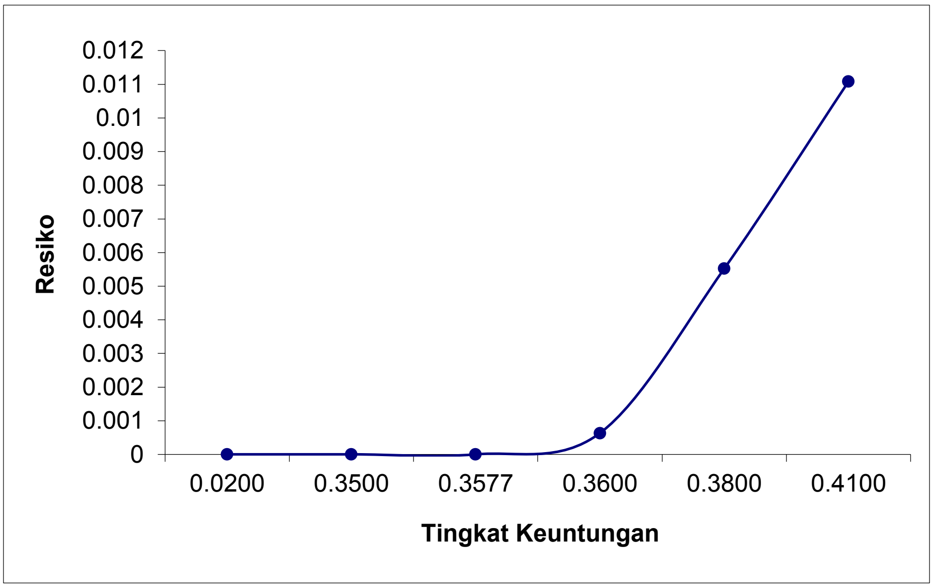
Masalah pemrograman kuadratik di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Wolfe. Hasilnya adalah $x_1 = 0$, $x_2 = 0.2397$, $x_3 = 0.2328$ dan $x_4 = 0.5275$. Ini artinya tidak ada dana yang diinvestasikan pada PT Mustika Ratu, sedangkan dana yang harus diinvestasikan pada PT Unilever Indonesia sebesar 23.97 %, pada PT Gudang Garam sebesar 23.28 % dan pada PT Good Year Indonesia sebesar 52.75 %. Jadi dana terbesar yang harus diinvestasikan adalah pada PT Good Year Indonesia dengan keuntungan yang diharapkan sebesar 34.47 %.

Untuk tingkat keuntungan yang berbeda, dihasilkan portofolio-portofolio seperti yang disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4 *Portofolio-portofolio dengan tingkat keuntungan, proporsi dana dan resikonya*

Portofolio	***E***	**Proporsi Dana**				**Resiko**
		x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0.02	0	0.2397	0.2328	0.5275	0
2	0.35	0	0.2397	0.2328	0.5275	0
3	0.3577	0	0.2397	0.2328	0.5275	0
4	0.36	0.0105	0.2298	0.2493	0.5103	0.000633
5	0.38	0.10366	0.14274	0.39141	0.36219	0.005523
6	0.41	0.24338	0.01211	0.60452	0.13599	0.011084

Dari Tabel 4, dapat dilihat terdapat dua karakteristik dari beberapa portofolio yang dihasilkan dengan tingkat keuntungan yang berbeda. Pertama, distribusi dana yang diinvestasikan pada masing-masing perusahaan memiliki proporsi yang sama untuk tingkat keuntungan kurang dari sama dengan 35.77 %, sedangkan untuk tingkat keuntungan lebih dari 35.77 %, distribusi dana pada masing-masing perusahaan bervariasi. Hal ini dapat terjadi karena dipengaruhi oleh kondisi masing-masing perusahaan pada saat itu (misalnya keadaan aktiva yang baik, kondisi perekonomian, dll). Kedua, situasi yang hampir sama juga terjadi antara tingkat keuntungan terhadap resiko. Hubungan antara tingkat keuntungan terhadap resiko ini dapat dijelaskan melalui Gambar 1.



Gambar 1 *Grafik Tingkat Keuntungan terhadap Resiko*

Keterangan: Pengambilan E (tingkat keuntungan) tidak hanya berhenti pada E = 41 % tetapi sesuai dengan tingkat keuntungan yang diharapkan.

Gambar 1 menjelaskan bahwa terdapat dua daerah yaitu daerah yang bebas resiko investasi dan daerah yang beresiko. Daerah bebas resiko ditunjukkan untuk tingkat keuntungan yang diharapkan kurang dari sama dengan 35.77%. Dengan demikian portofolio dengan tingkat keuntungan 35.77 % merupakan portofolio yang oprimal bagi investor yang takut mengambil resiko. Bagi investor yang berani mengambil resiko, dimungkinkan untuk mendapatkan keuntungan di atas 35.77%. Resiko yang akan dihadapi proporsional terhadap besarnya keuntungan yang diharapkan. Hasil ini sesuai dengan teori yang dijelaskan oleh Husnan (1994), bahwa dalam portofolio dapat diperoleh suatu investasi yang memberikan keuntungan yang lebih besar dengan resiko yang sama, dan semakin tinggi tingkat keuntungan yang diharapkan, resiko yang dihadapi semakin tinggi.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa portofolio yang optimal tanpa resiko investasi diperoleh pada tingkat keuntungan yang diharapkan sebesar 35.77 %. Resiko investasi akan muncul jika seorang investor mengharapkan keuntungan di atas 35.77 %.

Daftar Pustaka

[1] Bronson, R. Teori dan Soal-Soal Operations Research. Seri Buku Schaum's. Alih Bahasa oleh Hans J. Wospakrik. Jakarta: Erlangga

[2] Dias, F.S. Tanpa Tahun. Quadratic Programming Aplied to Modern Portfolio Selection. http://www.ime.usp.br

[3] Husnan, S., (1994), Dasar-Dasar Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas. Yogyakarta: UPP-AMP YKPN

[4] Martin, John D, et.al, (1999), Basic Financial Management Fifth Edition. Alih Bahasa oleh Haris Munandar. Jakarta: Rajawali Pers

[5] Mital, K.V., (1976), Optimization Methods in Operations Research and System Analysis. New Delhi: Wiley Eastern Limited

[6] Rao, S.S., (1984), Optimization Theory and Applications. San Diego: Eastern Limited