Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 17 Nomor 2 2017, 49 – 60
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

METODE RELAKSASI LAGRANGE UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PROGRAM BILANGAN CACAH

Susi Setiawani
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

Abstract. When the Integer Programming (IP) has several constraints, we need to reduce the constraints for getting feasible solution in a relative short time. One of the available methods is the Lagrange relaxation method, that reduces constraints by including complicated constraints set into the objective function as penalty with respect to the set of nice constraints. If the constraints and λ values are chosen well, it tends to be a reasonably tightest bound in finding optimal solution and solving IP quickly. The purpose of this paper is to discuss how to solve IP by using Lagrange relaxation approach, find out relation among optimal solution of Linear programming, IP and relaxation Lagrange (dual Lagrange), and understanding this method via an example.

Keywords: *Lagrange Relaxation , Integer Programming*
MSC 2020 (https://zbmath.org/classification)

1. Pendahuluan

Program (linier) bilangan cacah (*Integer Programming*/ IP) merupakan salah satu kasus dari program linier (*Linier Programming*/LP) yang semua variabelnya bilangan cacah. Berdasarkan pembatasan variabel, IP terbagi 3 yaitu IP murni (semua variable bilangan cacah), IP campuran (hanya sebagian variabel yang bilangan cacah) dan IP nol-satu (variabel hanya bernilai nol dan satu) [6]. Perumusan Problem Bilangan Cacah adalah sebagai berikut :

$Z_{IP} = \max\ (C^T x)$ sebagai fungsi tujuan

dengan himpunan fungsi kendala :

$A\,x \leq b$

dimana $x \in R_+^n$, x bilangan cacah, C^T, A, b adalah matriks koefisien bilangan cacah berukuran (1 x n), m x n, m x 1.[4]

Penyelesaian IP sama dengan mengendorkan IP menjadi LP atau disebut juga dengan LP relaksasi, dimulai dengan mencari ruang penyelesaian layak (*feasible*), tetapi karena adanya persyaratan bilangan cacah maka akan muncul batasan tambahan yang akan menyebabkan suatu pengurangan dari ruang penyelesaian layak [6]. Penyelesaian LP dapat dilakukan dengan metode grafik (jika variabel hanya 2), jika lebih dari 2 variabel diselesaikan dengan metode simplex atau dapat menggunakan bantuan komputer untuk mencari penyelesaian optimal. Ada banyak software komputer untuk menyelesaikan program linier diantaranya TORA, LINDO dan LINGO, tetapi hanya untuk variabel yang terbatas.

Ada beberapa metode penyelesaian IP yaitu metode Irisan (contohnya Gomory), search (contohnya *Branch and Bound* (BB)) dan Heuristik [2]. Penyelesaian dengan relaksasi Lagrange dikembangkan diawal tahun 70an, merupakan dasar pengembangan metode heuristik. Metode ini diterapkan untuk mencari batas yang ketat pada metode *Branch and Bound* [7].

Ada kalanya suatu himpunan fungsi kendala terlalu kompleks sehingga sulit untuk diselesaikan sehingga problem harus dikendorkan atau di relaksasi. Metode Lagrange relaksasi akan membagi 2 bagian besar himpunan fungsi kendala yaitu kompleks dan mudah (*nice*) [1]. Tidak seperti metode lain yang menambah fungsi kendala untuk mendapat solusi optimal, metode ini justru mereduksi fungsi kendala dengan memilih himpunan fungsi kendala kompleks menjadi bagian fungsi tujuan. Dengan berkurangnya fungsi kendala, tentu akan mereduksi *slack variable* dan *surplus variable* (pada metode simpleks), dan mereduksi garis (pada metode grafik) sehingga solusi optimal akan lebih cepat di peroleh.

Artikel ini mencoba melihat 1) relaksasi Lagrange sebagai pendekatan pemecahan masalah IP dengan membuktikan sebuah teorema, 2) bagaimana hubungan antara penyelesaian optimal dari program linier, program bilangan cacah dan relaksasi Lagrange dalam hal ini bentuk dual Lagrange dan 3) aplikasi pada sebuah contoh dengan metode grafik untuk lebih memahami metode relaksasi Lagrange.

Program Bilangan Cacah

Himpunan fungsi kendala dibagi menjadi himpunan fungsi kendala yang kompleks dan mudah, sehingga menurut Achuthan [1] Problem Bilangan Cacah dapat dirumuskan ulang sebagai berikut :

(IP) $$Z_{IP} = \max (C^T x)$$

dengan kendala :

$A^1 x \leq b^1$ (m_1 himpunan kendala yang kompleks)

$A^2 x \leq b^2$ (m_2 himpunan kendala yang mudah)

dimana $x \in R_+^n$, x bilangan cacah, C^T, A, b adalah matriks koefisien bilangan cacah berukuran (1 x n), m x n, m x 1 dan m jumlah anggota himpunan kendala.

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 17 Nomor 2 2017, 49 – 60
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

Fungsi Lagrange

Misalkan masalah dengan fungsi tujuan Max $z = f(\mathbf{X})$ dan fungsi kendala $g(\mathbf{X}) \le k$, dimana k adalah konstanta dan **X** merupakan himpunan variabel bebas ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Budnick, dkk mendefinisikan Fungsi Lagrange dari masalah tersebut adalah :

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) - \lambda[g(\mathbf{X}) - k]$$

Variabel λ disebut **pengali Lagrange** (*Lagrange multipliers*). Fungsi kendala $[g(\mathbf{X}) - k]$ diperlukan sama dengan nol, λ berupa suatu nilai sehingga ruas $\lambda[g(\mathbf{X}) - k] = 0$. Konsekwensinya nilai fungsi Lagrange yang baru sama dengan nilai fungsi tujuan. λ^* merupakan tingkat perubahan dalam nilai optimal dari fungsi tujuan dengan fungsi kendala ketika variabel yang lain tetap, yang diperoleh dari $\frac{\partial L(\mathbf{X}^*, \lambda^*)}{\partial k}$. Interpretasi harga λ^* dimana $L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) - \lambda[g(\mathbf{X}) - k]$ dapat dilihat pada Table 1. Jika $f(\mathbf{X})$ optimal maka $L(\mathbf{X}, \lambda)$ akan optimal. Tentunya penurunan nilai optimal L tidak dikehendaki, sehingga kita harus menghindari penurunan k, sehingga diperlukan relaksasi kendala.

Tabel 1. Interpretasi nilai λ^*

ARAH λ^*	**Kenaikan konstanta *k***	**Penurunan konstanta *k***
Positif	Kenaikan $f(\mathbf{X})$ optimal	Penurunan $f(\mathbf{X})$ optimal
Negatif	Penurunan $f(\mathbf{X})$ optimal	Kenaikan $f(\mathbf{X})$ optimal

Metode Relaksasi Lagrange

Metode relaksasi Lagrange merupakan salah satu metode penyelesaian heuristik untuk menyelesaikan masalah optimasi combinatorial kompleks (*complex combinatorial optimization*) dan IP. Metode ini merupakan strategi penyelesaian umum untuk menyelesaikan program matematika dengan menyederhanakan masalah dengan menggunakan struktur khusus. Penyederhanaan masalah dapat dilakukan dengan beberapa cara sehingga pendekatan solusi sangat fleksibel [5]. Relaksasi Lagrange menyelesaikan sub masalah dalam metode *Branch and Bound* sebagai model yang terpisah. Dan dapat mengembangkan batasan dengan batas yang ketat pada nilai optimal fungsi tujuan [3]. Untuk mendapatkan bentuk relaksasi Lagrange terlebih dahulu dibuat bentuk umum dari IP yaitu IP(Q) agar dapat mengendorkan/ merelaksasi program bilangan cacah di atas, yaitu :

(IP(Q)) $\qquad Z_{IP} = \max\ (C^T x)$

dengan kendala :

$$A^1 x \le b^1 \ (m_1 \text{ kendala yang kompleks) dan } x \in Q$$

dimana $Q = \{ x \in R_+^n : A^2 x \le b^2 \text{ dan } x \text{ bilangan bulat}\} \ne \varnothing$, [1]

Primal Relaksasi Lagrange

Dengan menggunakan fungsi Lagrange dan mengganti L(X, λ) dengan $Z_{RL}(\lambda)$ maka pengendoran IP(Q) atau disebut juga **Relaksasi Lagrange** (RL(λ)) atau bentuk primal relaksasi Lagrange (RL(λ)) dari IP(Q)) terhadap $A^1\, x \le b^1$ dalam Achuthan adalah :

RL(λ) : $Z_{RL}(\lambda) = \max\ \{ Z(\lambda, x) : x \in Q\}$

dimana $Z(\lambda, x) = C^T x + \lambda(b^1 - A^1\, x)$, dan untuk sebarang $\lambda \in R_+^{m_1}$ dan $\lambda \ge 0$.
Atau dapat juga dituliskan sebagai :

$$Z_{RL}(\lambda) = \max_{x \in Conv(Q)} \{ C^T x + \lambda\,(b^1 - A^1\, x)\} = \mathrm{Max}\ \{ (C^T - \lambda\, A^1\,)x + \lambda b^1 : x \in Q\} \quad (1)$$

dimana Conv(Q) adalah *Convexhull* (Q) atau himpunan semua titik layak (*feasible*) atau daerah layak.

Fungsi kendala kompleks $A^1 x \le b^1$ dari IP bukan sebagai fungsi kendala dalam RL(λ) tetapi termasuk dalam fungsi tujuan dengan penalty $\lambda(b^1 - A^1\, x)$. Penalty adalah fungsi yang dimasukkan ke fungsi tujuan. Karena $\lambda \ge 0$, jika λ cukup besar maka $A^1\, x \le b^1$ akan memenuhi untuk $\lambda(b^1 - A^1\, x)$ lainnya mempunyai bentuk negatif dan fungsi tujuan mempunyai bentuk penalty negatif.

Dual Lagrange

Batas atas terkecil $Z_{RL}(\lambda^*)$ dari Z_{IP} diberikan oleh solusi optimal λ^* pada problem Dual Lagrange. Sehingga dengan λ^* didapat pendekatan solusi untuk IP. *Dual Lagrange* (DL) dari IP(Q) atau primal relaksasi Lagrange terhadap fungsi kendala $A^1\, x \le b^1$ didefinisikan sebagai berikut [5]:

(DL) : $\mathbf{Z_{DL}} = \min_{\lambda \ge 0} \{Z_{RL}(\lambda)\}$

Atau dual Lagrange dari persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai [7]

$$\mathbf{Z_{DL}} = \min_{\lambda \ge 0} \{Z_{RL}(\lambda)\} = \min_{\lambda \ge 0} \max_{x \in Conv(Q)} \{ C^T x + \lambda\,(b^1 - A^1\, x)\} \quad (2)$$

Teorema:
$\mathbf{Z_{DL}} = \mathrm{Max}\ \{C^T x :\ A^1\, x \le b^1,\ x \in \mathrm{Conv}(Q)\}$
Pembuktian teorema ini pada pembahasan.

2. Hasil dan Pembahasan

Penggunaan Program Bilangan Cacah

Untuk lebih memahami pemakaian metode relaksasi Lagrange akan digunakan contoh berikut ini.

(IP) : Z_{IP} = Max $2\,x_1 + 5\,x_2$

dengan kendala $4\,x_1 + x_2 \leq 28$ (3)

$x_1 + 4\,x_2 \leq 28$ (4)

$x_1 - x_2 \leq 1$ (5)

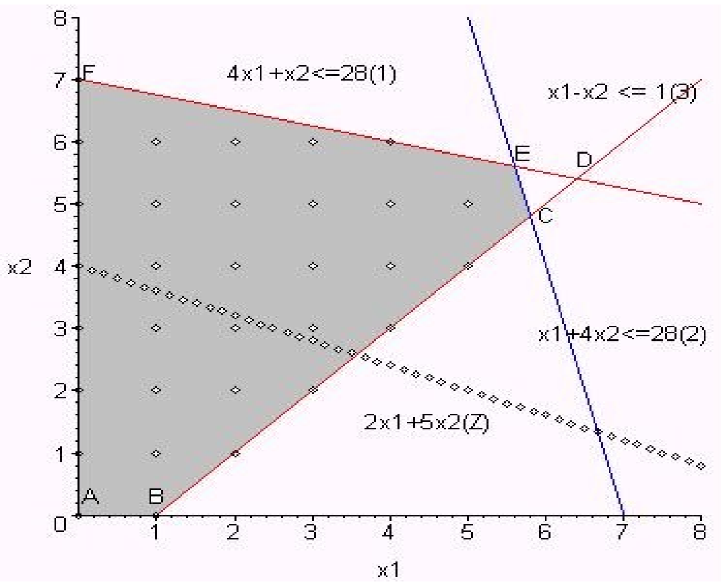
x_1 dan x_2 bilangan bulat $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (6)

Untuk menyelesaikan problem bilangan cacah di atas, terlebih dahulu dikendorkan menjadi program linier, yaitu : Z_{LP} = Max $2\,x_1 + 5\,x_2$ dengan kendala (3), (4), (5) dan

x_1 dan x_2 bilangan Real, $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (6)

Karena hanya terdiri dari 2 variabel maka dapat diselesaikan dengan metode grafik (lihat grafik1). Garis menunjukkan fungsi kendala dan garis titik-titik adalah fungsi tujuan. Daerah poligon ABCEF yang diarsir adalah *convex hull* Q atau daerah penyelesaian layak yang konveks untuk relaksasi LP. Sedangkan titik – titik bilangan bulat di daerah layak merupakan titik – titik bilangan cacah yang mungkin sebagai penyelesaian IP. Nilai optimal fungsi tujuan dari relaksasi LP berada pada **(x_1 , x_2) = (5.6, 5.6) is Z_{LP} = 39.2 di titik E.**

Pembulatan titik optimal yaitu (6,6) tidak berada di daerah layak dan (5,5) memberikan Z_{IP} = 37, bandingkan dengan Z_{IP} pada titik (4,6) yaitu 38. Ini berarti penyelesaian Program bilangan cacah tidak dapat dilakukan dengan pembulatan titik optimal. Untuk mencari penyelesaian optimal IP dilakukan dengan menginvestigasi titik –titik bilangan cacah ekstrim yang terdapat pada grafik 1. Dari grafik tersebut diperoleh titik ekstrim (0,0),(1,0),(4,6),(5,5) dan (7,0). Nilai fungsi tujuan pada setiap titik ekstrim adalah : $Z_{IP}(0,0) = 2\,x_1 + 5\,x_2 = 2(0) + 5(0) = 0$; $Z_{IP}(1,0) = 2(1) + 5(0) = 2$; $Z_{IP}(4,6) = 2(4) + 5(6) = 38$; $Z_{IP}(5,5) = 2(5) + 5(5) = 35$ dan $Z_{IP}(7,0) = 2(7) + 5(0) = 14$.
Oleh karena itu **penyelesaian optimal IP adalah : $Z_{IP}(4,6) = 38$.**



Gambar 1. Penyelesaian Relaksasi LP

Pendekatan Relaksasi Lagrange

Ada sebanyak $m = m_1 + m_2$ anggota himpunan fungsi kendala. Semuanya mempunyai peluang yang sama untuk dikelompokkan sebagai m_1 (fungsi kendala kompleks). Sehingga ada sebanyak $(2^m - 2)$ kemungkinan relaksasi Lagrange, yaitu semua anggota himpunan bagian dari himpunan fungsi kendala kecuali $\emptyset$ dan himpunan semesta. Untuk illustrasi di atas ada 3 fungsi kendala sehingga ada 2^3-2 = 6 kemungkinan relaksasi Lagrange yang dapat dibentuk. Artikel ini akan membahas 2 kasus dari 6 kasus yang mungkin yaitu pengambilan fungsi kendala 1&2, dan kendala 1 sebagai fungsi kendala kompleks.

Primal Relaksasi Lagrange

Setelah memilih himpunan fungsi kendala kompleks, pendekatan relaksasi Lagrange dilakukan dengan cara:

- membentuk IP(Q) dan RL(λ).
- Mencari harga $\lambda \geq 0$ dengan cara koefisien tiap variable pada fungsi tujuan sama dengan nol .
- Substitusi λ pada $Z_{RL}(\lambda)$ kemudian cari pasangan variabel bilangan bulat yang bersesuaian yang memberikan harga Z maksimum.

  Perhatikan persamaan (2.1), ada 2 kemungkinan nilai Q pada $Z_{RL}(\lambda)$. Pertama jika $Q = \emptyset$, maka $Z_{RL}(\lambda) = -\infty$ untuk semua λ sehingga $Z_{DL} = -\infty$. Dan kedua jika $Q \neq \emptyset$, andaikan dinotasikan

  - Himpunan titik ekstrim dari Conv(Q) = $\{x^k \in R_+^n : k \in K\}$, dimana K indeks himpunan.
  - Himpunan sinar ektrim dari Conv(Q) = $\{r^j \in R_+^n : j \in J\}$, J indeks himpunan.

  $Z_{RL}(\lambda) = \underset{x \in Conv(Q)}{\mathrm{Max}} \{ C^T x + \lambda (b^1 - A^1 x)\}$ dapat mempunyai kemungkinan 2 solusi sebagai berikut :

$$Z_{RL}(\lambda) = \begin{cases} \infty \text{ (solusi tak terbatas) jika } (C - \lambda A^1) r^j > 0 \text{ untuk suatu } j \in J \\ Cx^k + \lambda(b^1 - A^1 x^1) \quad \text{untuk suatu } k \in K \end{cases}$$

Kasus 1

Fungsi kendala (3) dan (4) diambil sebagai himpunan fungsi kendala yang kompleks. Sehingga bentuk umum dari IP untuk kasus 1 adalah :

(IP(Q)) : $Z_{IP} = \mathrm{Max}\ 2x_1 + 5x_2$

dengan kendala $x_1 - x_2 \leq 1$ and $x \in Q$

$Q = \{ x_1, x_2 \in Z_2^+ : 4x_1 + x_2 \leq 28,\ x_1 + 4x_2 \leq 28 \} \neq \emptyset$

Bentuk **Relaksasi Lagrange (RL1)** dari IP(Q) dengan pengambilan dual dua fungsi kendala (3) dan (4) sekaligus :

$$RL(\lambda_1,\lambda_2) : Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2) = \underset{x \in Q}{Max} \{2x_1 + 5x_2 + \lambda_1(28 - 4x_1 - x_2) + \lambda_2(28 - x_1 - 4x_2)\}$$

atau

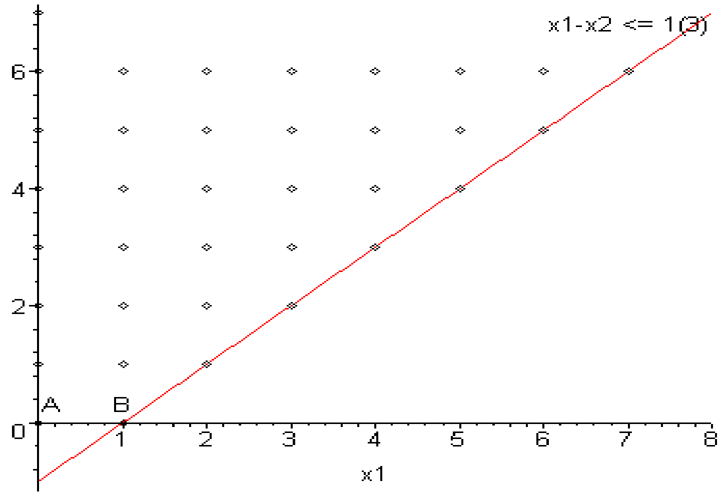
$$Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2) = \underset{x \in Q}{Max} \{ (2 - 4\lambda_1 - \lambda_2) x_1 + (5 - \lambda_1 - 4\lambda_2) x_2 + 28\lambda_1 + 28\lambda_2 \}$$

dengan kendala

$$x_1 - x_2 \le 1 \quad , x_1, x_2 \in Z_2^+ \text{, dimana } (\lambda_1, \lambda_2 \ge 0)$$

atau Q = $\{x : x$ memenuhi fungsi kendala (5) dan $x_1, x_2 \in Z_2^+ \}$. Q adalah sebuah sinar ekstrim (lihat grafik2), dan Convex hull Q atau Conv (Q) = $\{ x_1, x_2 \in Z_2^+ : x_1 - x_2 \le 1 \}$. Atau relaksasi Lagrange untuk kasus ini dapat ditulis kembali sebagai :

$Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2) = \max \{Z(\lambda_1, \lambda_2, x) : x_1, x_2 \in \text{Conv}(Q)\}$



Gambar 2. Penyelesaian Z_{LR1} dengan dual fungsi kendala 1 dan 2

Berikut ini akan dihitung harga λ dengan cara koefisien tiap variable sama dengan nol, yaitu $(2 - 4\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, $(5 - \lambda_1 - 4\lambda_2) = 0$, $28\lambda_1 = 0$ dan $28\lambda_2 = 0$, diperoleh :

$\lambda_2 = 2 - 4\lambda_1$ kemudian $5 - \lambda_1 - 4(2 - 4\lambda_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1/5$ dan $\lambda_2 = 6/5$ dan $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.

Substitusi pasangan λ_1, λ_2 pada $Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2)$ dan akan dicari pada titik pasangan bilangan cacah (x_1, x_2) mana yang memberikan harga maksimum.

- $Z_{RL1}(0,0) = \max\{2x_1 + 5x_2 : x_1, x_2 \in \text{Conv}(Q)\} = \infty$ (tidak terbatas).
- $Z_{RL1}(1/5,6/5) = \max\{\{(2 - 4(1/5) - 6/5)x_1 + (5 - 1/5 - 4(6/5))x_2 + 28(1/5) + 28(6/5) : x_1, x_2 \in \text{Conv}(Q)\} = \max\{5.6 + 33.6 : x_1, x_2 \in \text{Conv}(Q)\} = 39.2$

Selanjutnya hitung harga Z yang pada selang λ yang telah di cari di atas.

- Untuk $\mathbf{0 \le \lambda_1 < 1/5}$ **dan** $\mathbf{0 \le \lambda_2 < 6/5}$, penyelesaian optimal tidak terbatas atau: $Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2) = \textit{tidak terbatas}$.
- Untuk $\mathbf{\lambda_1 \ge 1/5}$ **dan** $\mathbf{\lambda_2 \ge 6/5}$, penyelesaian optimal adalah $(x_1,0)$. Ini dapat saja (0,0) atau (1,0)
  Untuk titik (0,0) adalah :
  $Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2) = (2 - 4\lambda_1 - \lambda_2)(0) + (5 - \lambda_1 - 4\lambda_2)(0) + 28\lambda_1 + 28\lambda_2 = 28\lambda_1 + 28\lambda_2$
  Atau untuk titik (1,0) adalah :
  $Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2) = (2 - 4\lambda_1 - \lambda_2)(1) + (5 - \lambda_1 - 4\lambda_2)(0) + 28\lambda_1 + 28\lambda_2 = 2 - 4\lambda_1 - \lambda_2 + 28\lambda_1 + 28\lambda_2$

Kasus 2.

Jika fungsi kendala (3) dianggap sebagai fungsi kendala kompleks maka bentuk umum dari IP adalah :

(IP(Q)) : $Z_{IP} = \text{Max } 2\,x_1 + 5\,x_2$

Subject to $x_1 + 4\,x_2 \le 28$

$x_1 - x_2 \le 1$ dan $x \in Q$

$Q = \{ x_1 , x_2 \in Z_2^+ : 4\,x_1 + x_2 \le 28 \} \neq \varnothing$

Dengan **Relaksasi Lagrangian (RL2)** dari IP di atas yang mempunyai dual kendala (3) :

$$RL(\lambda) : Z_{RL2}(\lambda) = \underset{x \in Q}{Max} \{2x_1 + 5x_2 + \lambda(28 - 4x_1 - x_2)\}$$

atau

$$Z_{RL2}(\lambda) = \underset{x \in Q}{Max} \{ (2 - 4\lambda)x_1 + (5 - \lambda)x_2 + 28\lambda\}$$

Dengan kendala $x_1 + 4\,x_2 \le 28$; $x_1 - x_2 \le 1$, $x_1 , x_2 \in Z_2^+$, dimana $(\lambda_1, \lambda_2 \ge 0)$

Perpotongan antara fungsi kendala (4) & (5) adalah (6.4,5.4) = D

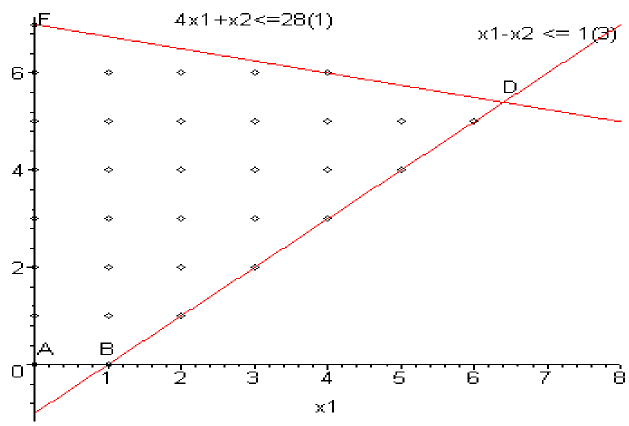
$Q = \{x : x$ memenuhi fungsi kendala 2) dan (3) dengan $x_1, x_2 \in Z_2^+ \}$ yaitu:

= {(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(2,2),(2,3),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(0,4),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(0,5),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5), (0,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(0,7)} (lihat titik-titik pada grafik 3).

$Conv(Q) = \{ x_1, x_2 \in Z_2^+ : x_1 + 4\,x_2 \le 28 \text{ dan } x_1 - x_2 \le 1 \}$

atau

$$Z_{RL2}(\lambda) = \max \{Z(\lambda, x) : x_1 , x_2 \in Conv(Q)\}$$



Gambar 3. Penyelesaian Z_{LR1} dengan dual fungsi kendala 1

1) Mencari harga λ dan $Z_{RL2}(\lambda)$.

Karena $(2 - 4\lambda) = 0$, $(5 - \lambda) = 0$, dan $28\lambda = 0$, diperoleh $\lambda = 1/2$, $\lambda = 5$ dan $\lambda = 0$.

$Z_{RL2}(0) = \max\{2\,x_1 + 5x_2 :\ x_1\,,x_2\ \in \text{Conv(Q)}\} =\ Z(0,(4,6)) = 38$
$Z_{RL2}(1/2) = \max\{(2 - 4(1/2))x_1 + (5 - 1/2\,)x_2 + 28(1/2)\ :\ x_1\,, x_2\ \in \text{Conv(Q)}\}$
$= \max\ \{9/2\ x_2 + 14 :\ x_1\,, x_2\ \in \text{Conv(Q)}\} = Z(1/2,(0,7)) = 45.5$

Ringkasan nilai Z_{RL2} dengan beragam nilai λ pada titik ekstrim disajikan tabel berikut :

λ	Titik Ekstrim					Titik Optimal
	(0,0)	(1,0)	(4,6)	(6,5)	(0,7)	
λ = 0	0	2	**38**	37	35	(4,6)
λ = ½	14	14	41	36.5	**45.5**	(0,7)
λ = 5	**140**	122	68	32	**140**	(0,0) or (0,7)

- Untuk **0 ≤ λ < 1/2** , Penyelesaian optimal adalah (4,6):
  $Z_{RL2}(\lambda) =\ (2 - 4\lambda\,)4 + (5 - \lambda)6\ + 28\lambda = 38 + 6\lambda$ i)
- Untuk **1/2 ≤ λ < 5** , Penyelesaian optimal adalah (0,7):
  $Z_{RL2}(\lambda) =\ (2 - 4\lambda\,)0 + (5 - \lambda)7\ + 28\lambda = 35 + 21\lambda$ ii)
- Untuk **λ ≥ 5** , penyelesaian optimal adalah (0,7):
  $Z_{RL2}(\lambda) = (2 - 4\lambda\,)0 + (5 - \lambda)7\ + 28\lambda = 35 + 21\lambda$ iii)
  Atau
- Untuk **λ ≥ 5** , mempunyai penyelesaian optimal (0,0):
  $Z_{RL2}(\lambda) = (2 - 4\lambda\,)0 + (5 - \lambda)0\ + 28\lambda = 28\lambda$ iv)

Karena persamaan ii) dan iii) serupa, perpotongan antara persamaan i) dan ii) atau iii) adalah 35+21λ =38 +6λ ⇒ **λ = 1/5**. Sehingga $Z_{RL2}(1/5) = 35 + 21\lambda = 35 + 21(1/5) =$ **39.2**. Perpotongan antara persamaan i) dan iv) adalah 38 + 6λ = 28λ ⇒ 22 λ = 38 ⇒ **λ = 1.72.** Sehingga $Z_{RL2}(1.72) = 28\lambda = 28(1.72) =$ **48.36.** Perpotongan persamaan ii) atau iii) dan iv) adalah 35 + 21λ = 28λ ⇒ 7 λ = 35 ⇒ λ = 5. Sehingga $Z_{LR2}(5) = 28\lambda = 28(5) = 140$ (Sudah dihitung, lihat tabel). Sehingga ketika λ = 0 diperoleh batas yang paling ketat.

Lemma :
LR(λ) adalah relaksasi dari IP(Q) untuk semua λ ≥ 0.

Bukti :
Jika x layak di IP(Q) maka $x \in$ Q sehingga x layak untuk LR(λ). Juga $Z(\lambda, x) = C^Tx + \lambda(b^1 - A^1\,x) \geq C^Tx$ untuk semua x yang layak di IP(Q) karena $A^1\,x \leq b^1$ dan $\lambda \geq 0$.

3.2.2. Dual Lagrange

Teorema :

$\mathbf{Z_{DL}}$ =Max $\{C^Tx :\ A^1\,x \leq b^1,\ x \in \text{Conv(Q)}\}$

Bukti **:**
Perhatikan $Z_{RL}(\lambda)$, relaksasi Lagrange adalah $Z_{RL}(\lambda) = \max\ \{\ Z(\lambda, x) : x\in Q\}$ atau dapat dituliskan sebagai : $Z_{RL}(\lambda)\ = \text{Max}\ \{\ (C^T - \lambda\,A^1\,)x + \lambda b^1 : x\in Q\}$

$$= \max_{x \in Conv(Q)} \{ C^T x + \lambda (b^1 - A^1 x)\}$$

Oleh karena itu **ZDL** = $\min_{\lambda \geq 0} \{Z_{RL}(\lambda)\} = \min_{\lambda \geq 0} \max_{x \in Conv(Q)} \{ C^T x + \lambda (b^1 - A^1 x)\}$

dimana Q = { $x \in R_+^n : A^2 x \leq b^2$ dan x bilangan bulat}

Jika Q = ∅, maka $Z_{RL}(\lambda) = -\infty$ untuk semua λ sehingga $Z_{DL} = -\infty$.

Jika Q ≠ ∅, andaikan dinotasikan

- Himpunan titik ekstrim dari Conv(Q) = $\{x^k \in R_+^n : k \in K\}$, dimana K indeks himpunan.
- Himpunan sinar ektrim dari Conv(Q) = $\{r^j \in R_+^n : j \in J\}$, J indeks himpunan.

$Z_{RL}(\lambda) = \max_{x \in Conv(Q)} \{ C^T x + \lambda (b^1 - A^1 x)\}$ dapat mempunyai solusi sebagai berikut :

$$Z_{RL}(\lambda) = \begin{cases} \infty \text{ (solusi tak terbatas) jika } (C - \lambda A^1) r^j > 0 \text{ untuk suatu } j \in J \\ Cx^k + \lambda (b^1 - A^1 x^1) \qquad \text{untuk suatu } k \in K \end{cases}$$

Sehingga Dual Lagrange dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$Z_{DL} = \min_{\lambda \geq 0} \max_{k \in K} \{ C^T x^k + \lambda (b^1 - A^1 x^k)\}$$

dengan kendala $(C - \lambda A^1 x) r^j \leq 0,\ j \in \underline{J},\ \lambda \geq 0$

$$Z_{DL} = \min_{\eta, \lambda} \eta$$

dengan kendala $\eta + \lambda (A^1 x^k - b^1) \geq C^T x^k,\ k \in K$

$$(C^1 - \lambda A^1) r^j \leq 0,\ j \in J$$

yaitu :

$$Z_{DL} = \min_{\eta, \lambda} \eta$$

Dengan kendala $\eta + \lambda (A^1 x^k - b^1) \geq C^T x^k,\ k \in K$

$$\lambda A^1) r^j \geq C r^j \leq 0,\ j \in J;\ \lambda \geq 0$$

Misalkan α^k untuk $k \in K$ dan β^j untuk $j \in J$ adalah variable dual yang berasosiasi (berhubungan) dengan fungsi kendala primal. Dual program linier di atas adalah :

$$Z_{DL} = \text{Min } \eta = \text{Max } C^T \left[\sum_{k \in K} \alpha^k x^k + \sum_{j \in J} \beta^j r^j \right]$$

dengan kendala $\sum_{k \in K} \alpha^k = 1$

$$A^1 \left(\sum_{k \in K} \alpha^k x^k + \sum_{j \in J} \beta^j r^j \right) \leq b^1 \left(\sum_{k \in K} \alpha^k \right)$$

$\alpha^k, \beta^j \geq 0,\ k \in K$ dan $j \in J$

Maka $Z_{DL} = \text{Max } \{C^T x : A^1 x \leq b^1,\ x \in \text{Conv(Q)}\}$ ■

Dari pembuktian teorema di atas dapat dikatakan bahwa Dual Lagrange dapat digunakan untuk pendekatan penyelesaian program bilangan cacah.

Dual Lagrange untuk contoh di atas adalah sebagai berikut ini.

Kasus 1

$$\mathbf{Z_{DL1}} = \underset{\lambda_1,\lambda_2 \geq 0}{Min}\ \{Z_{RL1}(\lambda_1, \lambda_2)\} = \underset{\lambda_1,\lambda_2 \geq 0}{Min}\ \{ Z_{RL1}(0,0), Z_{RL1}(1/5, 6/5)\}$$

$$= \underset{\lambda_1,\lambda_2 \geq 0}{Min}\ \{\text{tidak terbatas},\ Z_{RL1}(1/5, 6/5)\}$$

$$= \underset{\lambda_1,\lambda_2 \geq 0}{Min}\ \{\infty, 2 - 4(1/5) - 6/5 + 28(1/5) + 28(6/5)\ \}$$

$$= \underset{\lambda_1,\lambda_2 \geq 0}{Min}\ \{\infty,\ 39.2\} = 39.2$$

Nilai fungsi optimal Z_{DL1} adalah $\mathbf{Z_{DL1}} =$ **39.2**

Kasus 2.

Dual Lagrange (DL2) yang diperoleh dari (RL2) adalah :

$$\mathbf{Z_{DL2}} = \underset{\lambda \geq 0}{Min}\ \{Z_{RL2}(\lambda)\} = \underset{\lambda \geq 0}{Min}\ \{Z_{RL2}(0), Z_{RL2}(1/5), Z_{RL2}(1/2), Z_{RL2}(1.72), Z_{RL2}(5)\}$$

$$= \underset{\lambda \geq 0}{Min}\ \{38, 39.2, 45.5, 48.36, 140\} = \mathbf{38}$$

Nilai fungsi optimal Z_{DL1} adalah $\mathbf{Z_{DL2}} =$ **38**

Hubungan LP, IP dan DL

$$Z_{IP} = \underset{x \in S}{\mathrm{Max}}\, C^T x = \underset{x \in Conv(S)}{\mathrm{Max}}\ C^T x$$

dan $Z_{DL} = \mathrm{Max}\ \{\ C^T x\ :\ A^1 x \leq b^1, x \in \mathrm{Conv}(Q)\}$

dimana $S = \{x \in R_+^n: A^1 x \leq b^1, A^2 x \leq b^2, x$ bilangan bulat$\}$

$Q = \{x \in R_+^n:\ A^2 x \leq b^2, x$ bilangan bulat$\}$

Hasil :

$Z_{IP} = Z_{DL}$ untuk semua c, jika dan hanya jika

$\mathrm{Conv}(Q \cap \{\ x \in R_+^n: A^1 x \leq b^1\}) = \mathrm{Conv}(Q) \cap \{\ x \in R_+^n: A^1 x \leq b^1\}$ □

$$\mathrm{Conv}(S) = \mathrm{Conv}(Q \cap x \in R_+^n: A^1 x \leq b^1) \subseteq \mathrm{Conv}(Q) \cap \{\ x \in R_+^n: A^1 x \leq b^1\}$$
$$\subseteq \{x \in R_+^n: A^1 x \leq b^1, A^2 x \leq b^2\}$$

Maka dapat dikatakan hubungan antara solusi optimal untuk program bilangan bulat (Z_{IP}) , dual Lagrange (Z_{DL}) dan Program Linear(Z_{LP}) adalah $Z_{IP} \leq Z_{DL} \leq Z_{LP}$

Maka untuk kasus 1) $\mathbf{Z_{DL1}} = \mathbf{Z_{LP}}$ atau nilai fungsi optimal dari dual Lagrange 1 sama dengan nilai optimal fungsi relaksasi program linear. Sedangkan pada kasus 2) $38 \leq 39.2 \Rightarrow \mathbf{Z_{DL2}} \leq \mathbf{Z_{DL1}}$ atau nilai optimal fungsi dari dual Lagrange terhadap fungsi kendala (3) lebih kecil nilai optimal fungsi dual Lagrange 1 terhadap fungsi kendala (3) dan (4).

Dari investigasi contoh di atas, ketika $\lambda = 0$ (batas terketat untuk kasus 2)), diperoleh penyelesaian optimal untuk dual Lagrange (DL2) pada titik (4,6) yaitu: $Z_{DL2}(\lambda) = 38$. Sehingga $Z_{IP} = Z_{LD2}$ atau nilai optimal fungsi dual Lagrange 2 terhadap fungsi kendala (3) sama dengan nilai optimal fungsi program bilangan cacah. Jadi secara keseluruhan hubungan antara solusi dari program linier, program bilangan cacah dan relaksasi Lagrange pada contoh di atas adalah $Z_{LP} = Z_{DL1} \geq Z_{DL2} = Z_{IP}$.

3. Kesimpulan

Relaksasi Lagrange sebagai bentuk primal dan dual Lagrange dapat digunakan sebagai pendekatan pemecahan masalah IP. Hubungan antara penyelesaian optimal dari program linier, program bilangan cacah dan relaksasi Lagrange dalam hal ini bentuk dual Lagrange adalah $Z_{LP} \geq Z_{DL} \geq Z_{IP}$. Investigasi contoh dengan metode grafik diperoleh $Z_{LP} = Z_{DL1} =$ 39.2 untuk kasus 1 dan $Z_{DL2} = Z_{IP} = 38$ untuk kasus 2. Hubungannya adalah $Z_{LP} = Z_{DL1} \geq Z_{DL2} = Z_{IP}$. Sehingga penyelesaian optimal terdapat pada titik (4,6) dengan nilai optimal fungsi tujuan program bilangan cacah adalah 38.

Daftar Pustaka

[1] Achuthan, N.R., (2003), *Combinatorial Optimation, Lecture Note*. Curtin University of Technolgy, Perth.

[2] Budnick F.S, Mc Leavey D, dan Majena R., (1998), *Principles of Operations Research for Management*. Second edition . Irwin, RD Illinois, USA.

[3] Hillier F.S and Lieberman G.J., (2001), *Introduction to Operation Research.* Seventh edition, Mc-Graw Hill Companies, USA.

[4] Nasendi B.D dan Anwar E., (1985), *Program Linier dan Variasinya.* Gramedia, Jakarta.

[5] Postech I.E and Kangbok, L., (2000), *Lagrangian Relaxation and Network Optimization Network Flows chapter 16*.

[6] Siagian, P., (1987), *Penelitian Operasional.* UI Press, Jakarta.

[7] Slyke R.V. *Lagrangian Relaxation and Duality.* Htttp://cis.prog.edu/rvslyke /ma614 /lagrange.pdf. Diakses tanggal 1 Juli 2005.