Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 17 Nomor 1 2017, 1 – 6
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

ALJABAR MAX PLUS DAN APLIKASINYA: MODEL SISTEM PRODUKSI SEDERHANA

(*Max Plus Algebra and It's Aplication: Model of Simple Production System*)

Tri Siwi Nasrulyati

Pascasarjana Matematika FMIPA ITS Surabaya
Email: trisiwi@its.ac.id

Abstact: This paper discusses the basic understanding of max plus algebra and an example of its application will be given. Next will be discussed a simple production system model with three machines.

Keywords: Max Plus Algebra, Simple Production
MSC 2020: CIS-260536

1. Pendahuluan

Pada masa ini teknologi yang semakin canggih membuat pengembangan ilmu pengetahuan, termasuk matematika, terus dilakukan dan berkembang dengan pesat. Salah satu perkembangan ilmu matematika yang sangat berguna adalah aljabar max plus. Aljabar max plus sebagai salah satu cabang matematika modern mempunyai dua operasi aritmatik dasar, yaitu pemaksimalan dan penjumlahan [1]. Banyak sistem yang menggunakan aljabar max plus dalam kaitannya dengan sistem even diskrit. Seperti sistem manufaktur, telekomunikasi, transportasi, dan lain sebagainya [3]. Sistem even diskrit adalah sistem dinamik yang berkembang dalam waktu dengan kemunculan even pada interval waktu tak tentu [2]. Secara garis besar, sistem even diskrit dinamik dapat dideskripsikan dengan menggunakan dua paradigma, yaitu sinkronisasi (keselarasan) dan konkurensi. Sinkronisasi mengharuskan tersedianya beberapa sumber pada suatu waktu yang sama. Sedangkan konkurensi muncul ketika pengguna suatu sistem harus memilih satu dari beberapa sumber (dalam sistem manufaktur, sebuah pekerjaan dapat dieksekusi pada salah satu atau beberapa mesin yang menangani pekerjaan tersebut).

Suatu sistem dengan vektor keadaan berubah seiring dengan berubahnya waktu sering dijumpai. Setiap detik, vektor keadaan diharapkan berubah. Sistem seperti ini disebut sistem terkendali waktu (time-driven sistem). Dalam sistem semacam ini, variabel waktu k merupakan variabel bebas dan transisi keadaan (state) diselaraskan dengan waktu. Hal ini mengandung arti bahwa sebuah kejadian muncul dan menyebabkan perubahan vektor keadaan.

Selain sistem seperti yang telah disebutkan di atas, sering dijumpai pula suatu sistem yang tersusun berdasarkan waktu dengan kemunculan kejadiannya adalah pada suatu interval waktu tertentu. Hal ini mengandung makna bahwa keadaan berubah tidak harus bersamaan dengan waktu. Dalam kasus ini berubahnya keadaan merupakan hasil dari suatu kejadian yang selaras dan kemudian waktu menjadi suatu variabel bebas. Variabel k dalam sistem ini adalah suatu pengukur kejadian. Sistem semacam ini disebut dengan sistem terkendali kejadian (event-driven sistem) [2].

Sistem even diskrit didefinisikan sebagai suatu sistem terkendali kejadian (event-driven sistem) yang mempunyai keadaan diskrit. Terdapat beberapa teknik analisa dan pemodelan sistem even diskrit seperti teori antrian, aljabar max plus, analisis gangguan, simulasi komputer, dan lain sebagainya. Sistem even diskrit menjadi suatu sistem persamaan linear ketika diformulasikan ke dalam aljabar max plus.

Untuk memberikan motivasi, pada bagian selanjutnya dalam paper ini akan diberikan contoh pemakaian dari aljabar max plus linier sistem. Tetapi sebelumnya dijelaskan dulu secara singkat pengertian dari aljabar max plus dan notasi-notasi yang digunakan. Kemudian akan dijekaskan cara untuk mengkonstruksi matriks keadaan dari suatu sistem produksi sederhana dengan tiga unit mesin. Sebagai penutup diberikan beberapa catatan dari apa yang dibahas dan saran.

2. Hasil dan Pembahasan

Aljabar Max Plus

Di sini diberikan secara singkat pengenalan konsep dasar dari aljabar max plus yang akan digunakan untuk pembahasan berikutnya. Semesta pembicaraan aljabar max plus adalah bilangan real ditambah $\varepsilon = -\infty$. Selanjutnya himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ ditulis $\mathbb{R}_{\max}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Operasi dasar dari aljabar max plus adalah *maksimum* (dinotasikan dengan simbol $\oplus$) dan *penjumlahan* (dinotasikan dengan simbol $\otimes$). Dengan dua operasi tersebut didefinisikan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ sebagai berikut:

$$x \oplus y = \max(x, y)$$

$$x \otimes y = x + y$$

Selanjutnya, dalam aljabar maxplus $a^{\otimes b} := ab$. Sebagai catatan: $x \oplus \varepsilon = x = \varepsilon \oplus x$ dan $x \otimes 0 = x = 0 \otimes x$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Matriks dalam Aljabar MaxPlus

Himpunan matriks berukuran $n \times m$ dalam aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$ dan n atau $m \neq 0$. Elemen $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ baris ke-*i* kolom ke-*j* dinotasikan $a_{i.j}$ atau $[A]_{i.j}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dan $j = 1, 2, \cdots, m$. Penulisan untuk matriks *A* adalah sebagai berikut

$$A=\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.m} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n.1} & a_{n.21} & \cdots & a_{n.m} \end{pmatrix}$$

Dalam aljabar max-plus operasi + dan $\times$ dari vektor dan matriks dengan cara yang sama digantikan dengan $\oplus$ dan $\otimes$.

Untuk setiap $A,B\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ berlaku

$$[A\oplus B]_{i,j}=a_{i,j}\oplus b_{i,j}=\max\ \{a_{i.j},b_{i,j}\},\ i=1,2,3,\cdots,m,\ j=1,2,3,\cdots,n$$

dan untuk setiap $A\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times p}, B\in\mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$ diperoleh bahwa

$$[A\otimes B]_{i,j}=\bigotimes_{k=1}^{p} a_{i.k}\otimes b_{k,j}=\max_{1\le k\le p}\{a_{i.k}+b_{k.j}\},\ i=1,2,3,\cdots,m, j=1,2,3,\cdots n$$

Dengan menggunakan simbol-simbol tersebut diskripsi ruang keadaan suatu sistem diberikan dalam bentuk:

$$x(k+1)=A\otimes x(k)\oplus B\otimes u(k) \tag{1}$$

$$y(k)=C\otimes x(k) \tag{2}$$

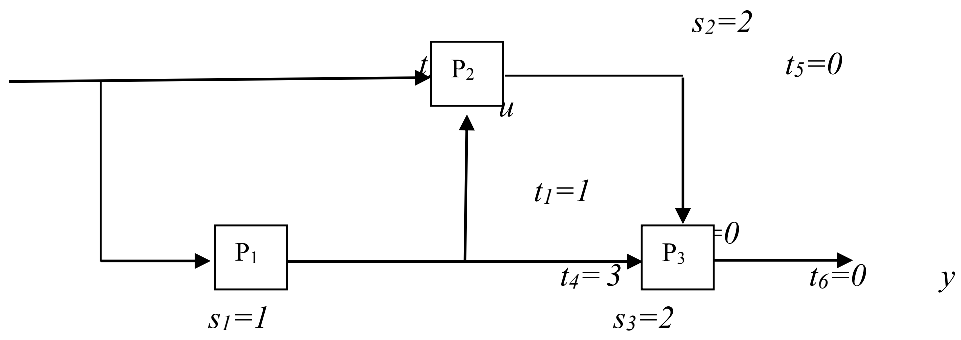
Dengan $A\in\mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times m}$ dan $C\in\mathbb{R}_{\varepsilon}^{p\times n}$ dan *x* merepresentasikan keadaan, *u* merepresentasikan input dan *y* merepresentasikan output, *k* indeks kejadian yang bernilai *k* = 0, 1, 2 … . Persamaan (1) dan (2) di atas disebut dengan sistem *linear* max-plus. Semua sistem diskrit bila diformulasikan ke dalam aljabar max-plus akan menjadi *linear*. Pengertian nilai-karakteristik dan vektor-karakteristik yang bersesuaian dari suatu matriks bujur sangkar sebagaimana dijumpai dalam aljabar biasa juga kita jumpai dalam aljabar max-plus, yaitu bila kita mempunyai persamaan:

$$A\otimes x=\lambda\otimes x$$

masing-masing vektor $x\in\mathbb{R}_{\max}^{n}$ dan skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ dinamakan vektor karakteristik dan nilai karakteristik dari matriks *A* dengan vektor $x\neq(\varepsilon,\cdots,\varepsilon)'$. Algoritma untuk memperoleh vektor karakteristik dan nilai karakteristik dari matriks persegi *A* dapat dilihat lebih jelas pada [3].

Sistem Produksi Sederhana

Pada bagian ini akan diberikan pembentukan model dari suatu sistem linear max plus sederhana, dengan mengambil contoh pada produksi sederhana yang terdiri dari tiga unit mesin pemroses seperti terlihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 1 Sistem produksi sederhana

Marilah sekarang kita tinjau sistem produksi sederhana yang diberikan oleh Gambar 1. Sistem produksi ini terdiri dari 3 unit mesin pemroses P_1 , P_2 dan P_3. Bahan dimasukkan pada unit mesin P_1 dan unit mesin P_2, setelah selesai proses dari unit mesin P_1, bahan bisa langsung di kirim ke unit mesin P_2 dan setelah diproses oleh unit mesin P_2 hasilnya di kirimkan ke unit mesin P_3 untuk dilakukan pemrosesan terakhir dan akan menjadi produk yang siap dipasarkan. Waktu proses untuk masing-masing unit mesin diberikan oleh $s_1 = 2$, $s_2 = 1$ dan $s_3 = 2$ satuan waktu. Diasumsikan waktu yang diperlukan untuk bahan baku mencapai P_1 adalah $t_1 = 1$ satuan waktu, dibutuhkan $t_4 = 3$ untuk mencapai unit mesin P_3. Untuk waktu perjalanan yang lainnya (t_3, t_5, dan t_6) diasumsikan nol. Di antara masukan dan proses terdapat buffer dengan kapasitas yang cukup besar untuk menjamin buffer tidak akan sampai overflow. Setiap unit mesin hanya akan mulai bekerja untuk menghasilkan produk yang baru jika proses sebelumnya sudah selesai. Diasumsikan juga bahwa unit mesin akan mulai proses bila semua komponen telah tersedia. Untuk itu didefinisikan :

- $u(k)$ adalah waktu yang dibutuhkan bahan masuk ke sistem untuk waktu yang ke *(k+1)*.
- $x_i(k)$ adalah waktu unit mesin ke-*i* mulai proses untuk waktu ke-*k*, *i*= 1, 2, 3
- $y(k)$ adalah waktu produk selesai waktu ke-*k* meninggalkan sistem (dipasarkan).

Gambaran proses sistem :

Unit mesin satu mulai proses pada kali ke-($k+1$) ketika

1. Proses sebelumnya telah selesai, atau $x_1(k)+s_1$ (yaitu awal proses sebelumnya $x_1(k)$ dan waktu proses s_1).
2. Bahan telah sampai pada unit mesin satu, atau $u(k)+t_1$ (yaitu bahan dimasukkan ke sistem $u(k)$ dan waktu transportasi t_1).

Karena unit mesin satu mulai proses pada saat bahan telah tersedia dan produk sebelumnya telah meninggalkan unit mesin satu, maka kita dapatkan persamaanya yaitu :

$$x_1(k+1) = \max(x_1(k)+s_1, u(k)+t_1) \qquad (3)$$

Unit mesin 2 mulai proses pada kali ke-($k+1$) ketika

1. Bahan telah sampai pada unit mesin dua, atau $u(k)+t_2$ (yaitu bahan dimasukkan ke sistem $u(k)$ dan waktu transportasi t_2).
2. Proses sebelumnya telah selesai, atau $x_1(k+1)+s_1$ (yaitu akhir proses sebelumnya / unit mesin satu selesai).

Dengan proses unit mesin dua sendiri atau $x_2(k)+s_2$, dapat dituliskan persamaanya sebagai berikut :

$$x_2(k+1)=\max\{(x_1(k)+2),(x_2(k)+2),(u(k)\otimes 2)\} \quad (4)$$

Begitu juga dengan unit mesin tiga mulai proses ke-($k+1$) ketika

1. Proses unit mesin dua telah selesai atau $x_2(k+1)+s_2+t_5$ (yaitu proses sebelumnya/unit mesin dua sudah selesai dan waktu transportasi t_5).
2. Proses unit mesin satu telah selesai, atau $x_1(k+1)+s_1+t_4$ (yaitu akhir proses sebelumnya / unit mesin satu selesai dan waktu transportasi t_4).

Dengan proses unit mesin tiga sendiri atau $x_3(k)+s_3$, dapat dituliskan persamaanya sebagai berikut :

$$x_3(k+1)=\max\{((x_3(k)\otimes s_3),(x_2(k+1)\otimes s_2),(x_1(k+1)\otimes s_1\otimes t_4) \quad (5)$$

Persamaan (5) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= ((x_3(k)\otimes s_3)\oplus(x_2(k+1)\otimes s_2)\oplus(x_1(k+1)\otimes s_1\otimes t_4) \\ &= (x_3(k)\otimes 2)\oplus((x_1(k)\otimes 2)\oplus(x_2(k)\otimes 2)\oplus(u(k)\otimes 2)\}\otimes 2)\oplus([(x_1(k)\otimes 1)\oplus \\ &\quad (u(k)\otimes 1)]\otimes 1\otimes 3) \\ &= (x_3(k)\otimes 2)\oplus(x_1(k)\otimes 4)\oplus(x_2(k)\otimes 4)\oplus(u(k)\otimes 4)\oplus(x_1(k)\otimes 5)\oplus(u(k)\otimes 5) \\ &= (x_1(k)\otimes 5)\oplus(x_2(k)\otimes 4)\oplus(x_3(k)\otimes 2)\oplus(u(k)\otimes 5) \end{aligned}$$

Sedangkan persaman untuk *y(k)* adalah:

$$y(k)=x_3(k)\otimes s_3=x_3(k)\otimes 2 \quad (6)$$

Kemudian Persamaan (3), (4), (5) dan (6) dapat ditulis sebagi berikut:

$$x_1(k+1)=(x_1(k)+1)\oplus(u(k)+1)=(x_1(k)\otimes 1)\oplus(u(k)\otimes 1)$$

$$x_2(k+1)=(x_1(k)\otimes 2)\oplus(x_2(k)\otimes 2)\oplus(u_k(k)\otimes 2)$$

$$x_3(k+1)=(x_1(k+1)\otimes 5)\oplus(x_2(k)\otimes 4)\oplus(x_3(k)\otimes 2)\oplus(u(k)\otimes 5)$$

$$y(k)=x_3(k)\otimes 2$$

Dalam bentuk matriksnya adalah :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}(k+1)=\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}(k)\oplus u(k)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

atau :

$$x(k+1)=\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 2 & \varepsilon \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}\otimes x(k)\oplus\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}\otimes u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes x(k)$$

$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$ merupakan vektor keadaan

y(k) merupakan vektor output dan *u(k)* merupakan vektor input.

3. Kesimpulan

Dalam bagian akhir dari pembahasan paper ini perlu kami ingatkan bahwa model sistem produksi yang dibahas di atas adalah sangat sederhana, dengan harapan bisa mempermudah dalam menurunkan model sistem linier sederhana yang lain dengan menggunakan aljabar max plus. Untuk ke depannya kajian selanjutnya bisa diterapkan pada sistem produksi yang lebih rumit dan lebih kompleks

Daftar Pustaka

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.–P. Quadrat, (1992), Synchronization and Linearity. John Wiley & Sons, Chichester.

[2] Necoara, I., (2006), Model Predictive Control for Max-Plus-Linear and Piecewise Affine Sistems. Technise Universiteit Delft. Netherland.

[3] Subiono, (2010), Aljabar Maxplus dan Terapanya, Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.