Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 17 Nomor 1 2017, 23 – 30
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

PENENTUAN LUAS FRAKTAL KOCH SNOWFLAKE

(*Determination of Fractal Area of the Koch Snowflake*)

Abdul Kamil, Rusli Hidayat, Kosala Dwidja Purnomo

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia

Abstract. The Koch Snowflake Island (Koch Snowflake) is composed of three Koch curves rotated by suitable angles and fitted together. The Koch curve is constructed using an iterative procedure beginning with the initiator of the set as the unit line segment. The unit line segment is divided into thirds and the middle third removed, then replaced with equilateral triangle without base. In this article to get formulation of the area fractals Koch Snowflake and its variations, generated by generator equilateral triangle, isosceles triangle and square to the sides of the regular polygon which has n sides.

Keywords: Generator, Initiator, Koch Curve, Koch Snowflake,
MSC2020: 52B99

1. Pendahuluan

Alam semesta banyak menyimpan benda-benda yang bersifat *self-similarity*. Sebagai contoh, jika kita melihat garis pantai dari tempat yang sangat tinggi, seolah-olah kita melihat garis lurus yang patah-patah. Tetapi semakin ketinggian tersebut dikurangi, akan terlihat bentuk garis pantai yang lebih jelas, apabila diperbesar akan menampilkan ketidakrataan sesungguhnya. Contoh lain adalah gumpalan awan, pegunungan, struktur molekul di dalam daun dan sebagainya ([1] & [8]).

Tampilan-tampilan alam ini disajikan sebagai topik tersendiri dalam matematika yang dikenal dengan geometri fraktal. Salah satu contoh fraktal adalah Koch Snowflake merupakan sebuah fraktal yang juga dikenal sebagai pulau Koch, pertama kali digambarkan oleh Helge Von Koch pada tahun 1904. Awalnya merupakan kurva Koch takhingga yang digandakan tiga, dibangkitkan pada sisi-sisi segitiga sama sisi, didasarkan pada garis-garis yang mempunyai arah tertentu dan dihubungkan satu sama lain ([2] & [10]).

Dalam artikel ini bertujuan untuk mendapatkan rumusan menentukan luas fraktal Koch Snowflake dan variasinya yang dibangkitkan oleh generator segitiga samasisi, samakaki, dan bujursangkar pada inisiator poligon beraturan bersisi-n.

Berikut ini diberikan definisi dari poligon, segitiga dan bujur sangkar.

Definisi 1: Poligon beraturan adalah suatu poligon yang sisi-sisinya dan sudut-sudutnya kongruen.

Definisi 2: Segitiga adalah poligon yang bersisi tiga.

Berdasarkan sisi-sisi pembentuknya dikenal beberapa macam segitiga, diantaranya:

a. Segitiga sama sisi yaitu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang.
b. Segitiga sama kaki yaitu segitiga yang mempunyai dua buah sisi yang sama panjang.

Definisi 3: Bujur sangkar adalah persegi panjang dengan dua sisi bersisiannya kongruen.

Misalkan diketahui segitiga *ABC* dengan alas *a*, dan tinggi *t*, maka luas (*A*) segitiga *ABC* = ½ *a* . *t* Untuk segitiga sama sisi dengan panjang sisi *L*, luasnya

$$(A) = \tfrac{1}{2}\, a \,.\, t = \frac{L}{2}\sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 \text{ atau luas } (A) = \frac{1}{4}3L^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad (1)$$

Perumusan luas bujur sangkar dengan *L* adalah panjang sisi bujur sangkar, dengan demikian diperoleh

$$A = L^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = L^2 \qquad (2)$$

Luas poligon tak beraturan dapat ditentukan dari penjumlahan segitiga-segitiga penyusun, sehingga luas poligon adalah jumlah luas

$$\Delta P_1OP_2 + \Delta P_2OP_3 + \cdots + \Delta P_{n-1}OP_n + \Delta P_nOP_1, \text{ atau}$$
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + A_n \qquad (3)$$

Dengan cara yang sama, untuk poligon beraturan luas (*A*) jumlah seluruh luas segitiga yang menyusunnya.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + A_n = \sum_{k=1}^{n}\left(A_k\right) \qquad (4)$$

karena segitiga penyusun pada poligon beraturan kongruen, maka luasnya adalah *n* kali luas segitiga. Jadi, diperoleh

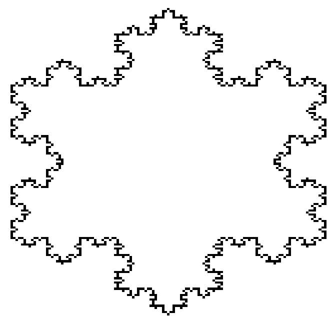
$$A = n\left(A_k\right) \quad \text{dengan } k = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (5)$$

Poligon beraturan memiliki panjang sisi dan besar sudut yang sama, yaitu masing-masing *L* dan $\frac{2\pi}{n}$, maka dapat dituliskan ([6] & [7])

$$A = \frac{1}{4} nL^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{4} L^2 \frac{\cos\left(\pi/n\right)}{\sin\left(\pi/n\right)} \quad (6)$$

Kata fraktal selain diambil dari bahasa latin *fractus* (memecahkan/ menguraikan), juga berasal dari kata kerja dalam bahasa latin *frangere*, yang berarti meretakkan atau membagi menjadi kepingan-kepingan. Paul Bourke mengambil istilah Mandelbrot yang mendefinisikan fraktal sebagai bentuk geometri yang tampak kasar atau berupa sebuah pecahan yang dapat dibagi lagi pada bagian-bagiannya. Definisi matematiknya adalah suatu himpunan titik-titik yang dimensi fraktalnya melebihi dimensi topologi ([4] & [5]).

Kurva Koch didasarkan pada garis-garis yang mempunyai arah tertentu dan dihubungkan satu sama lain, sehingga terbentuk suatu garis yang sangat panjang pada suatu daerah yang terbatas. Fraktal Koch Snowflake (Gambar 1) dibentuk dari kurva Koch yang dibangkitkan pada inisiator berupa poligon dengan sisi yang sama. Variasi Koch Snowflake dapat dikombinasikan antara inisiator segitiga sama sisi atau bujur sangkar dengan generator segitiga dan bujur sangkar, atau dengan bidang lainnya dengan prasyarat kurva Koch yang dibentuk menghasilkan segmen garis yang sama ([4] & [5]).



Gambar 1. Koch snowflake

I.

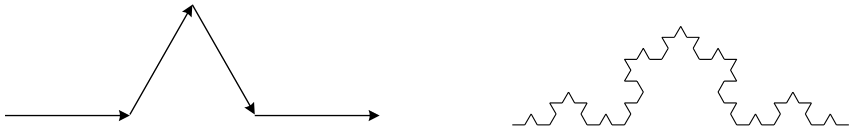
2. Hasil dan Pembahasan

Metode untuk menentukan luas Koch Snowflake adalah dengan membangun deret geometri yang merupakan penjumlahan luas semua bidang yang dibangkitkan oleh generator pada masing-masing tingkatan iterasi kurva Koch. Pertama, perlu ditentukan luas inisiator yang berbentuk poligon beraturan dengan panjang sisi L, misalkan A. Kedua, ditentukan penambahan atau pengurangan luas sebagai akibat dibangkitkannya suatu generator. Misalkan penambahan dan pengurangan luas pada setiap sisi-sisinya adalah K. Maka, luas Koch Snowflake dengan inisiator poligon bersisi-n adalah $A \pm nK$.

2.1 Koch Snowflake dengan inisiator poligon beraturan bersisi-*n*

Generator Segitiga Sama Sisi

Koch Snowflake dengan inisiator poligon beraturan bersisi-n, memiliki n sisi yang kongruen (panjangnya L) akan menghasilkan n kurva Koch (Gambar 2) yang juga kongruen.



(a) Generator (b) Kurva Koch

Gambar 2. Generator dan kurva koch

Luas diantara kurva Koch dan inisiator (X) = $\frac{\sqrt{3}L^2}{20}$, dengan demikian luas Koch Snowflake adalah:

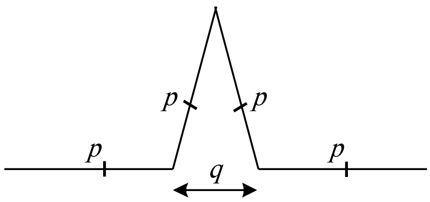
$$\text{luas } = \frac{nL^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} + n\left(\frac{\sqrt{3}L^2}{20}\right) = \frac{nL^2}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \tag{7}$$

Generator Segitiga Sama Kaki

Ada beberapa syarat awal yang harus dipenuhi Koch Anti-Snowflake, generator segitiga sama kaki yang dibangkitkan pada inisiator segitiga sama sisi, yaitu:

1. perbandingan p dan q adalah tetap
2. $2p > q$.

dengan p dan q masing-masing adalah ukuran sisi miring dan alas segitiga samakaki pada generator. Pada setiap iterasi berlaku $2p + q = 1$ (Gambar 3).



Gambar 3. Ukuran sisi generator pada setiap iterasi

Pada generator segitiga sama kaki diperoleh luas antara kurva koch dan inisiator (Y) = $\left(\frac{L^2(1-2p)(4p-)^{1/2}}{4}\left[\frac{1}{1-4p^2}\right]\right)$ dengan demikian luas Koch Snowflake adalah:

$$\text{luas } = \frac{nL^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} + n\left(\frac{L^2(1-2p)(4p-)^{1/2}}{4}\left[\frac{1}{1-4p^2}\right]\right) \tag{8}$$

Generator bujur sangkar

Luas Koch Snowflake dengan inisiator poligon bersisi-n yang dibangkitkan oleh generator bujur sangkar adalah:

$$\text{luas} = \frac{nL^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{nL^2}{4} = \frac{nL^2}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} + 1\right) \tag{9}$$

2.2 Koch Snowflake dengan Luas Berkurang (Koch Anti-Snowflake)

Pada dasarnya Koch Snowflake dengan luas berkurang metode penghitungan dan rumusannya sama dengan Koch Snowflake dengan luas bertambah. Jika pada Koch Snowflake luas bertambah merupakan penjumlahan inisiator dengan luas diantara kurva Koch dan inisiator, maka luas Koch Snowflake dengan luas berkurang kebalikannya. Inisiator dikurangi sebanyak luas diantara kurva Koch dan inisiator yang dihasilkan oleh sisi-sisi inisiator.

Inisiator Segitiga Samasisi

Generator Segitiga Sama Sisi

Luas yang dihasilkan dengan inisiator segitiga sama sisi dibangkitkan generator segitiga sama sisi adalah:

$$\text{Luas} = \frac{\sqrt{3}L^2}{4} - 3\frac{\sqrt{3}L^2}{20} = \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}L^2}{4}\right) \tag{10}$$

Generator Segitiga Sama Kaki

Ada beberapa syarat awal yang harus dipenuhi Koch Anti-Snowflake, generator segitiga sama kaki yang dibangkitkan pada inisiator segitiga sama sisi, yaitu:

1. perbandingan p dan q adalah tetap
2. $q \geq 1/3$
3. $2p > q$ atau $p > 1/6$.

dengan p dan q masing-masing adalah ukuran sisi miring dan alas segitiga samakaki pada generator. Pada setiap iterasi berlaku $2p + q = 1$. sehingga diperoleh perumusan luas:

$$\text{luas} = \frac{\sqrt{3}L^2}{4} - \frac{3L^2(1-2p)(4p-1)^{1/2}}{4}\left[\frac{1}{1-4p^2}\right] \tag{11}$$

Inisiator poligon beraturan bersisi-*n*

Generator Segitiga Sama Sisi

$$\text{luas} = \frac{nL^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - n\frac{\sqrt{3}L^2}{20} = \frac{nL^2}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \tag{12}$$

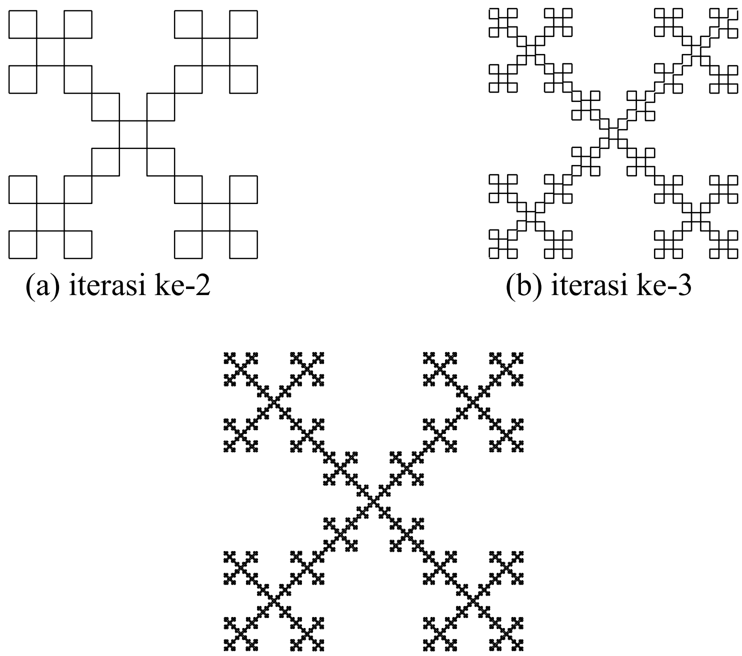
Generator Segitiga Sama Kaki

$$\text{luas} = \frac{nL^2}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{\sqrt{1-2q}}{2-q}\right) \tag{13}$$

Generator Bujur Sangkar

$$\text{luas} = \frac{nL^2}{4}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{nL^2}{4} = \frac{nL^2}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right) \tag{14}$$

Untuk n = 4 akan dihasilkan luas = 0, inisiator dimungkinkan Koch Anti-Snowflake pada inisiator bujursangkar yang dibangkitkan oleh generator bujur sangkar, pada iterasi menuju takhingga akan menghasilkan bentuk berupa garis-garis (Gambar 4).



(a) iterasi ke-2 (b) iterasi ke-3

(c) Koch Anti-Snowflake dengan iterasi menuju takhingga

Gambar 4. Koch Anti-Snowflake inisiator dan generator bujursangkar

3. Kesimpulan

Dari hasil penelitian penentuan luas fraktal Koch Snowflake dapat disimpulkan bahwa: (1) Koch Snowflake dengan luas bertambah diperoleh dari luas inisiator ditambah dengan luas yang dibatasi kurva Koch dan sisi inisiator, (2) Koch Snowflake dengan luas berkurang (Anti-Snowflake) diperoleh dari luas inisiator dikurangi luas antara sisi inisiator dengan kurva Koch, (3) Koch Anti-Snowflake inisiator segitiga sama sisi, hanya generator segitiga sama kaki dengan alas generator lebih dari atau sama dengan 1/3 panjang sisi inisiator yang bisa digunakan, sedangkan pada generator lainnya akan menghasilkan objek fraktal yang tumpang tindih.

Penelitian tentang Koch Snowflake ini masih dapat dikembangkan pada variasi-variasi bentuk Koch Snowflake lainnya, seperti yang menghasilkan segmen garis yang tidak kongruen, maupun segmen garis acak. Demikian juga pada topik tentang fraktal yang lain masih terbuka lebar bagi peneliti untuk menganalisanya.

Daftar Pustaka

[1] Addison, Paul. S., 1997, *Fractals and Chaos an Illustrated Cours*, Institute of Publishing, London.

[2] Beek, Alan, 1996, *What is a Fractal and Who is This Guy Mandelbrot?,* http:// www. glyphs.com/ art/ fractals/ what is. html.

[3] Bouldry, W.C., dkk, 1995, C*alculus Projects with Maple Project 20. Koch's Fractal*, Cole Pub. Co.

[4] Bourke, Paul, 1991, *An Introduction to Fractals*, http:// www. astronomy. swim.edu.au/ ~pbourke/ fractals/ fracinto. htm.

[5] Falkoner, Kenneth, 1990, *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.

[6] Kusno, 2003, *Diktat Kuliah Geometri*, Fakultas MIPA Universitas Jember, Jember.

[7] Purcel, E.J, Vaberg, Dale, 1999. *Calculus with Analytic Geometry 5th Edition* (Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, Rawuh), Erlangga, Jakarta.

[8] Sandefur, James T., 1996. *Using Self-Similarity to Find Length*, *Area*, *and Dimension*, The American Mathematical Monthly, Washington D.C.

[9] Spiegel, Murray R., 1968. *Mathematical Hand Book of Formula* (Terjemahan oleh M.O. Tjia), Erlangga, Jakarta.

[10] Weisstein, E. W., 1999. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Boca Raton, London, New York, Washington D. C.