ANALISIS WAKTU PELAYANAN DI BANK DENGAN DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

(*Analysis of Service Time in The Bank with Exponential Distribution*)

Yusna Mutiarasari, IM Tirta, Agustina Pradjaningsih

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia

Abstract. Exponential distribution is general assumption to describe the distribution of service time for customer. To examine such assumption, the Goodness of Fit Test-Kolmogorov Smirnov is used. To know the condition queue system in BCA will be use some analyze the steady state characteristic measurement of work queue system on different day and hour.

Keywords: Exponential Distribution, Goodness of Fit Test-Kolmogorov Smirnov, Steady State Characteristics Measurement of Work
MSC 2020: 62E99

1. Pendahuluan

Peningkatan pelayanan pada fasilitas umum semakin berkembang seiring dengan meningkatnya kebutuhan masyarakat. Hal ini dapat dilihat pada fasilitas-fasilitas umum yang semakin baik mutu layanannya, salah satu contohnya adalah pelayanan nasabah di bank. Waktu pelayanan tiap nasabah dapat bervariasi dari satu nasabah ke nasabah berikutnya (bisa konstan atau acak) dan akan mengikuti distribusi tertentu. Asumsi/hipotesa yang umum untuk menggambarkan distribusi dari waktu pelayanan nasabah adalah **Distribusi Eksponensial**, karena distribusi Eksponensial sering digunakan untuk mengukur panjang waktu yang dibutuhkan dalam pelaksanaan aktivitas-aktivitas jasa tertentu. Tetapi kurang cukup bukti yang menyatakan bahwa asumsinya absah dan dapat diterapkan pada kondisi sistem antrian di bank, sehingga perlu diuji dengan menggunakan uji *Goodness of Fit-Kolmogorov Smirnov*. Kemudian untuk mengetahui kondisi sistem antrian di bank BCA maka dilakukan analisis pada karakteristik-karakteristik ukuran kinerja sistem antrian *steady state*. Analisis tersebut juga dapat memberikan informasi dalam memperbaiki sistem operasional pada fasilitas pelayanan apabila kurang optimal.

Adapun tujuan dari tulisan ini adalah untuk mengetahui kesesuaian distribusi Eksponensial pada analisis waktu pelayanan nasabah di bank dan untuk mengetahui kondisi sistem antrian di bank BCA cabang Jember.

Proses stokastik adalah himpunan variabel acak yang merupakan fungsi waktu dan dinotasikan dengan $\{X(t), t \in T\}$. Pada penelitian ini $X(t)$ menyatakan lamanya waktu pelayanan yang diterima tiap pelanggan pada interval waktu $(0,t)$, sehingga $X(t) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dan ruang *state*nya adalah $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, atau dikatakan merupakan proses stokastik dengan waktu kontinu dan mempunyai ruang *state* diskrit.

Studi matematis tentang proses antrian yang mempelajari proses kedatangan dan pelayanan secara acak disebut Teori Antrian. Sistem antrian adalah kumpulan dari sejumlah pelanggan, fasilitas pelayanan dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan serta pemrosesan masalahnya. Untuk mengidentifikasi model antrian secara umum digunakan notasi Kendall-Lee yang dinotasikan $(a/b/c)$: $(d/e/f)$ dengan simbol-simbol a, b, c, d, e dan f merupakan unsur-unsur dasar dari sistem antrian [5].

Berdasarkan asumsi bahwa distribusi dari tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan berdistribusi Poisson sedangkan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial, maka untuk selanjutnya simbol a dan b dinotasikan dengan M, sehingga model antriannya menjadi $(M/M/c)$: $(d/e/f)$. Parameter sistem antrian yang digunakan untuk mengetahui karakteristik ukuran kinerja dan kesesuaian distribusi Eksponensial pada analisis waktu pelayanan adalah sebagai berikut:

n = banyaknya pelanggan dalam sistem antrian pada waktu t (orang)
l = rata-rata tingkat kedatangan persatuan waktu (orang/menit)
m = rata-rata tingkat pelayanan persatuan waktu (orang/menit)

Situasi antrian dengan proses pelayanan yang terjadi selama satu interval waktu dikendalikan dalam kondisi yang mewakili sifat-sifat proses Poisson [5]. Misalkan tingkat pelayanan tidak mempengaruhi jumlah pelanggan dalam antrian dan pelayanan dilakukan dengan disiplin antrian FCFS, maka probabilitas terdapat n pelanggan ($n > 0$) pada waktu (t + Dt) ditentukan oleh empat kemungkinan sebagai berikut:

Kemungkinan I:

a). Ada n pelanggan dalam antrian pada waktu t, probabilitasnya adalah $P_n(t)$.
b). Tidak ada kedatangan selama waktu Dt, probabilitasnya adalah 1 - lDt.
c). Tidak ada pelanggan yang dilayani selama waktu Dt, probabilitasnya adalah 1 - mDt.

Kemungkinan II:

a). Ada (n + 1) pelanggan dalam antrian pada waktu t, probabilitasnya adalah $P_{n+1}(t)$.
b). Tidak ada kedatangan selama waktu Dt, probabilitasnya adalah 1 - lDt.
c). Ada seorang pelanggan yang dilayani selama waktu Dt, probabilitasnya adalah mDt.

Kemungkinan III:

a). Ada (n – 1) pelanggan dalam antrian pada waktu t, probabilitasnya adalah $P_{n-1}(t)$.
b). Ada kedatangan seorang pelanggan selama waktu Dt, probabilitasnya adalah lDt.

c). Tidak ada pelanggan yang dilayani selama waktu $\mathrm{D}t$, probabilitasnya adalah $1 - m\mathrm{D}t$.

Kemungkinan IV:

a). Ada n pelanggan dalam antrian pada waktu t, probabilitasnya adalah $P_n(t)$.

b). Ada kedatangan seorang pelanggan selama waktu $\mathrm{D}t$, probabilitasnya adalah $l\mathrm{D}t$.

c). Ada seorang pelanggan yang dilayani selama waktu $\mathrm{D}t$, probabilitasnya adalah $m\mathrm{D}t$.

Berdasarkan empat kemungkinan diatas, maka probabilitas terdapat n pelanggan dalam antrian pada waktu $(t + \mathrm{D}t)$ yaitu $P_n(t + \mathrm{D}t)$ dengan asumsi bahwa probabilitas kedatangan dan probabilitas pelayanan lebih dari seorang pelanggan dalam waktu $\mathrm{D}t$ dianggap sama dengan nol, adalah:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t), \quad \text{untuk } n > 0. \tag{1}$$

Misalkan antrian dalam keadaan $n = 0$ atau probabilitas bahwa tidak ada pelanggan pada waktu $(t + \mathrm{D}t)$ yang dinyatakan dengan $P_0(t + \mathrm{D}t)$, diperoleh dari dua kemungkinan sebagai berikut:

Kemungkinan I:

Tidak ada pelanggan dalam antrian pada waktu t dan tidak ada pelanggan yang masuk antrian dalam waktu $\mathrm{D}t$, probabilitasnya adalah $(1 - l\mathrm{D}t)\, P_0(t)$.

Kemungkinan II:

Ada seorang pelanggan dalam antrian pada waktu t dan ada seorang pelanggan yang dilayani dalam waktu $\mathrm{D}t$ dan tidak ada pelanggan yang masuk antrian dalam waktu $\mathrm{D}t$, probabilitasnya adalah $(m\mathrm{D}t)\,(1 - l\mathrm{D}t)\, P_1(t)$.

Dari dua kemungkinan diatas, maka probabilitas tidak ada pelanggan pada waktu $(t + \mathrm{D}t)$ adalah:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \quad \text{untuk } n = 0. \tag{2}$$

Dalam analisis proses pelayanan, kita beranggapan bahwa selama pelayanan berlangsung tidak terjadi kedatangan pelanggan berikutnya pada fasilitas pelayanan. Ini berarti bahwa $l = 0$, sehingga probabilitas dari tingkat pelayanan akan ditentukan dari persamaan (1) dan persamaan (2).

Dari persamaan (1) diperoleh:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t), \quad \text{untuk } n > 0. \tag{3}$$

dan persamaan (2) menjadi:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t), \quad \text{untuk } n = 0 \tag{4}$$

Apabila jumlah pelanggan dalam antrian pada waktu t sebanyak $n = N$, maka:

untuk $n \geq N + 1$, terdapat: $P_n(t) = 0,$ (5)

untuk $n = N$, terdapat: $\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t),$ (6)

untuk $1 \leq n \leq N - 1$ terdapat: $\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t).$ (7)

Dari persamaan (6) diperoleh:

$$P_n(t) = e^{-m\ t}\text{, untuk } t \geq 0, \quad (8)$$

ini merupakan probabilitas terdapat n pelanggan berada dalam sistem antrian pada waktu t.

Dari persamaan (3), apabila $n = N - 1$ diperoleh:

$$P_{N-1}(t) = \frac{(\mu\, t)e^{-\mu t}}{1!}. \quad (9)$$

Untuk $n = N - 2$ diperoleh:

$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu\, t)^2 e^{-\mu t}}{2!}, \quad (10)$$

Jadi probabilitas ada n pelanggan yang dilayani dalam antrian pada waktu t, diperoleh:

$$P_n(t) = \frac{(\mu\, t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad \text{untuk } t \geq 0 \text{ dan } n = 1, 2, ..., N - 2, N - 1. \quad (11)$$

dan persamaan diatas merupakan probabilitas dari tingkat pelayanan yang mirip dengan distribusi Poisson atau disebut juga berbentuk distribusi Poisson. Jadi probabilitas dari tingkat pelayanan pelanggan akan mengikuti distribusi Poisson dengan parameter mt [2].

Pada proses Poisson dari suatu proses pelayanan, jika yang diperhatikan adalah tingkat pelayanan pada interval waktu tertentu maka akan mengikuti distribusi Poisson dan jika yang diperhatikan adalah waktu yang dibutuhkan untuk suatu pelayanan akan mengikuti distribusi Eksponensial [1].

Uji *Goodness of Fit* dengan *Kolmogorov Smirnov*

Uji *K–S* dilakukan dengan cara membandingkan fungsi distribusi empiris yaitu $F_n(X)$ dengan fungsi distribusi yang dihipotesiskan yaitu $F_0(X)$. Statistik uji dari uji *K–S* merupakan nilai perbedaan terbesar antara $F_n(X)$ dan $F_0(X)$ untuk semua nilai X, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$D = \text{maksimum } /F_n(X) - F_0(X)/ \quad (12)$$

Hipotesa H_0 ditolak bila harga D melebihi harga tabel nilai-nilai kritis dalam Tabel Uji Satu Contoh *Kolmogorov-Smirnov* [3].

Karakteristik Ukuran Kinerja dari Sistem Antrian *Steady State*

Beberapa karakteristik ukuran kinerja [4] adalah sebagai berikut:

1. Probabilitas ada n pelanggan dalam sistem antrian (P_n) diperoleh:

untuk $0 \le n < k$
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \tag{13}$$

untuk $n \ge k$
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{k!k^{n-k}} P_0 \tag{14}$$

2. Persyaratan *steady state* berlaku apabila rata-rata tingkat kedatangan lebih kecil dari rata-rata tingkat pelayanan maksimum (*l* < *km*), sehingga:

$$\rho = \frac{\lambda}{k\mu} < 1 \tag{15}$$

dengan ρ adalah probabilitas semua fasilitas pelayanan sibuk/faktor utilitas.

3. Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem (P_0) adalah:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right\}^{-1}, \quad \text{dengan } \rho < 1 \tag{16}$$

4. Panjang antrian (L_q) diperoleh:

$$L_q = P_0 \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{17}$$

5. Rata-rata waktu tunggu dalam antrian (W_q) didapat:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{18}$$

6. Panjang sistem antrian (L_s) diperoleh:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \tag{19}$$

7. Rata-rata waktu tunggu dalam sistem (W_s) didapat:

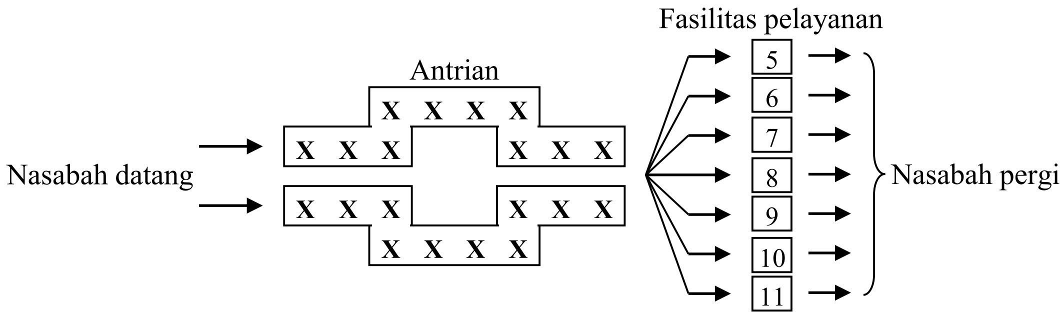
$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{20}$$

2. Hasil dan Pembahasan

Data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari data primer dari antrian nasabah di bank BCA Cabang Jember yang melakukan transaksi setoran dan tarikan, yang dilaksanakan selama dua minggu pada jam awal buka (08.00–10.00) dan tutup bank (12.00–14.00). Setelah data pengamatan terkumpul selanjutnya menganalisa data waktu pelayanan tersebut, yaitu dengan melakukan:

1. Uji kesesuaian data dengan uji *Goodness of Fit–Kolmogorov Smirnov* dan untuk kevalidasi analisa digunakan bantuan software SPSS 10.0.
2. Analisa karakteristik ukuran kinerja sistem antrian s*teady state* pada hari dan jam yang berbeda dengan menggunakan perhitungan rumus yang ada.

Berdasarkan pengamatan model antrian yang digunakan di bank BCA Cabang Jember adalah $(M/M/k)$: $(FCFS/\infty/\infty)$. Karena obyek penelitian adalah nasabah yang melakukan transaksi setoran dan tarikan saja, maka fasilitas pelayanan yang diamati hanya server 5 sampai dengan server 11 dan struktur antrian *multi channel-single phase* yang digunakan di bank BCA Cabang Jember seperti terlihat pada gambar 1.



Gambar 1. *Struktur antrian di bank BCA Cabang Jember*

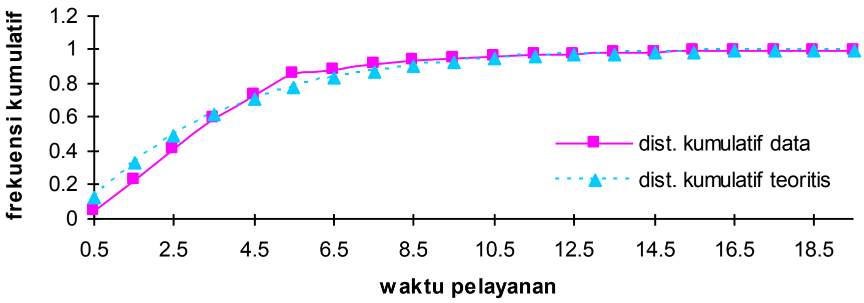
2.1 Uji Kesesuaian Distribusi Waktu Pelayanan

Untuk membuktikan keabsahan (*validity*) dari distribusi yang diasumsikan dapat dibenarkan atau disangkal secara statistik dengan uji *Goodness of Fit-Kolmogorov Smirnov*, yang hasil perhitungannya dirangkum dalam tabel 2.

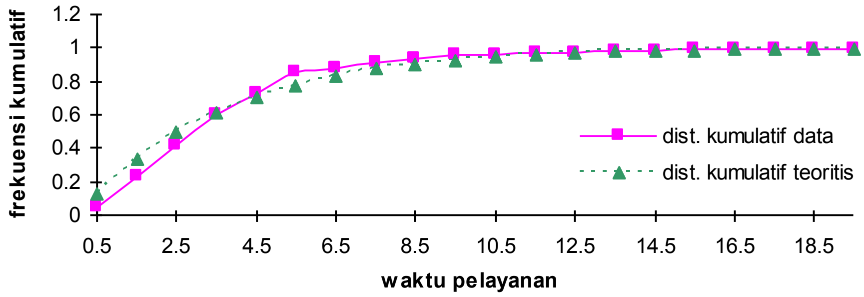
Tabel 1. *Hasil uji goodness of fit-kolmogorov smirnov data waktu pelayanan*

Hari		Probabilitas Data	Probabilitas data > 0,05	Hipotesa H_0	Kesimpulan
Senin	Pagi	0,004	Tidak	Ditolak	Tidak eksponensial
	Siang	0,032	Tidak	Ditolak	Tidak eksponensial
Selasa	Pagi	0,000	Tidak	Ditolak	Tidak eksponensial
	Siang	0,865	Ya	Diterima	Eksponensial
Rabu	Pagi	0,006	Tidak	Ditolak	Tidak eksponensial
	Siang	0,355	Ya	Diterima	Eksponensial
Kamis	Pagi	0,162	Ya	Diterima	Eksponensial
	Siang	0,326	Ya	Diterima	Eksponensial
Jumat	Pagi	0,000	Tidak	Ditolak	Tidak eksponensial
	Siang	0,176	Ya	Diterima	Eksponensial

Gambar 2 menunjukkan distribusi waktu pelayanan yang tidak mengikuti distribusi Eksponensial pada Senin pagi dan gambar 3 menunjukkan distribusi waktu pelayanan yang mengikuti distribusi Eksponensial pada Selasa siang.



Gambar 2. *Grafik distribusi kumulatif data waktu pelayanan pada senin pagi*



Gambar 3. *Grafik distribusi kumulatif data waktu pelayanan pada selasa siang*

Berdasarkan hasil uji *Goodness of Fit Kolmogorov Smirnov* pada tabel 1 diperoleh distribusi waktu pelayanan yang tidak mengikuti distribusi Eksponensial, disebabkan waktu pelayanan yang diberikan petugas fasilitas pelayanan dipengaruhi oleh banyaknya waktu yang telah dihabiskan untuk melayani nasabah sebelumnya dan banyaknya nasabah yang sedang menunggu dalam antrian. Faktor lain disebabkan adanya ciri-ciri perilaku manusia dalam situasi antrian di bank sehingga asumsi dari distribusi Eksponensial tidak dapat terpenuhi.

2.2 Ukuran *Steady-State* Kinerja dari Waktu Pelayanan

Dari Gambar 1 dapat diketahui bahwa rancangan sistem operasional pada fasilitas pelayanan di bank BCA sudah cukup optimal. Dari tabel 1, tabel 2 dan tabel 3 dapat terlihat bahwa distribusi waktu pelayanan nasabah di bank BCA pada beberapa hari tertentu yang tidak mengikuti distribusi Eksponensial ternyata juga tidak dapat atau hampir tidak dapat mencapai kondisi *steady state* pada sistem antriannya. Karakteristik ukuran kinerja pada setiap hari dengan jam yang berbeda sebagai berikut:

Tabel 2. *Karakteristik ukuran kinerja pada pagi hari*

Karakteristik	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jum'at
n (orang)	188	175	176	161	218
K	6	6	6	6	6
l (orang)	1,57	1,46	1,47	1,34	1,82
m (orang)	0,23	0,23	0,24	0,27	0,31
$1/\mu$ (menit)	4,31	4,35	4,13	3,71	3,22
ρ	1,13	1,06	1,01	0,83	0,98
P_0	-	-	-	0,0047	0,0004
L_q (orang)	-	-	-	0,002	0
W_q (menit)	-	-	-	0	0
L_s (orang)	-	-	-	4,98	5,86
W_s (menit)	-	-	-	3,71	3,22

Tabel 3. *Karakteristik ukuran kinerja pada siang hari*

Karakteristik	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jum'at
n (orang)	198	153	145	120 orang	190 orang
K	7	7	7	7	7
l (orang)	1,65	1,28	1,21	1,00	1,58
m (orang)	0,20	0,24	0,25	0,24	0,27
$1/\mu$ (menit)	5,11	4,17	4,04	4,19	3,65
ρ	1,20	0,76	0,70	0,60	0,83
P_0	-	0,0041	0,0068	0,0146	0,0022
L_q (orang)	-	0,0043	0,0057	0,0063	0,002
W_q (menit)	-	0	0	0,01	0
L_s (orang)	-	5,32	4,89	4,20	5,79
W_s (menit)	-	4,17	4,05	4,20	3,65

Tabel 4. *Pengaruh Penambahan Jumlah Fasilitas Pelayanan*

Karakteristik	Senin pagi	Selasa pagi	Rabu pagi	Senin siang
n (orang)	188	175	176	198
K	7	7	7	9
l (orang)	1,57	1,46	1,47	1,65
m (orang)	0,23	0,23	0,24	0,20
$1/\mu$ (menit)	4,31	4,35	4,13	5,11
ρ	0.97	0.91	0.87	0,94
P_0	0,0002	0,0008	0,0014	0,0001
L_q (orang)	0	0,0005	0,0013	0,0002
W_q (menit)	0	0	0	0
L_s (orang)	6,76	6,35	6,06	8,43
W_s (menit)	4,31	4,35	4,13	5,11

a. Pada pagi hari

Pada hari Kamis dan Jum'at sistem antrian dapat mencapai kondisi *steady-state* dan faktor pemanfaatan fasilitas pelayanan sudah optimal. Hal tersebut terlihat dari probabilitas waktu menganggur petugas bernilai sangat kecil dan rata-rata waktu tunggu dalam antrian sebesar 0 menit. Rata-rata waktu tunggu dalam sistem tiap nasabah setiap harinya selama 3 – 4 menit.

Sistem antrian tidak dapat mencapai kondisi *steady-state* pada hari Senin-Rabu, karena pada hari tersebut rata-rata tingkat kedatangan nasabah lebih besar daripada rata-rata tingkat pelayanan maksimum dan bergantung pada keadaan sistem, yang berarti rata-rata tingkat pelayanan nasabah dipengaruhi oleh banyaknya nasabah yang menunggu dalam antrian. Karena hal tersebut maka mengakibatkan perhitungan P_0, L_q, W_q, L_s dan W_s tidak dapat dilakukan.

Dalam Tabel 4 dapat terlihat pengaruh penambahan jumlah petugas pada hari Senin-Rabu pagi dari 6 server menjadi 7 server mengakibatkan tercapainya kondisi *steady-state* pada sistem antrian dan faktor pemanfaatan fasilitas pelayanan yang optimal.

b. Pada siang hari

Sistem antrian dapat mencapai kondisi *steady-state* pada setiap hari kecuali pada hari Senin. Hal tersebut berarti pada hari Selasa-Jum'at faktor pemanfaatan fasilitas pelayanan sudah optimal karena probabilitas waktu menganggur petugas bernilai sangat kecil dan rata-rata waktu tunggu dalam antrian juga sangat kecil, yaitu sebesar 0 menit. Rata-rata waktu tunggu dalam sistem sebesar 4 menit tiap nasabah setiap harinya.

Tidak tercapainya kondisi *steady-state* pada hari Senin mengakibatkan perhitungan P_0, L_q, W_q, L_s dan W_s tidak dapat dilakukan. Kondisi *steady-state* pada hari Senin dapat tercapai apabila menggunakan 9 server, seperti yang terlihat pada tabel 4. Penambahan jumlah petugas pada hari tersebut juga mengakibatkan tercapainya faktor pemanfaatan fasilitas pelayanan yang optimal.

3. Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini dapat ditarik kesimpulan bahwa distribusi waktu pelayanan nasabah di bank BCA Cabang Jember secara umum mengikuti distribusi Eksponensial. Tetapi ada beberapa hari tertentu yang tidak mengikuti distribusi Eksponensial. Distribusi waktu pelayanan nasabah di bank BCA pada beberapa hari tertentu yang tidak mengikuti distribusi Eksponensial ternyata juga tidak dapat atau hampir tidak dapat mencapai kondisi *steady state* pada sistem antriannya.

Daftar Pustaka

[1] Meyer, P.L., (1970), *Introductory Probability and Statistical Applications*, Wesley Publishing Company, Inc., Washington.

[2] Siagian, P., (1987), *Penelitian Operasional Teori dan Praktek*, Universitas Indonesia, Jakarta.

[3] Steel, R. dan Torrie, J., (1995), *Prinsip dan Prosedur Statistika*, Edisi Kedua, Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[4] Supranto, J., (1988), *Rancangan Operasi untuk Pengambilan Keputusan*, Universitas Terbuka, Jakarta.

[5] Taha, H.A., (1997), *Riset Operasi Suatu Pengantar*, Edisi Kelima Jilid 2, Binarupa Aksara, Jakarta.