Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 16 Nomor 2 2016, 91 – 98
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

SIFAT-SIFAT *SCALING* DALAM PERSAMAAN DIFUSI NON-LINIER DAN PENERAPANNYA DALAM MASALAH TRANSPORT AIR DI DALAM TANAH TAK JENUH AIR

(Scaling Properties in the Non-Linear Diffusion Equation and Its Application to the Problem of Water Transport in Water Unsaturated Soils)

Lutfi Rohman

Jurusan Fisika FMIPA Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121, Indonesia
Email: elrohman2@gmail.com

Abstract. In this work, we investigate the scaling properties related to the nonlinear fractional diffusion equations and indicate the possibilities to the applications of these equations to simulate the water transport in unsaturated soils. Usually, the water transport in soils with anomalous diffusion, the dependence of concentration on time (t) and distance (x) may be expressed in term of a single variable given by $\lambda_q = x/t^q$. In particular, for q = 1/2 the systems obey Fick's law and Richards' equation for water transport. We show that a generalization of Richards' equation via fractional approach can incorporate the above property.

Keywords: sifat *scaling*, persamaan Diffusi Non-linear, transport air dalam tanah
MSC 2020: 34A08

1. Pendahuluan

Pada dekade yang lampau kita dapat mencermati perkembangan penggunaan persamaan kalkulus fraksional untuk menggambarkan berbagai system dalam bidang teknik, fisika dan keuangan. Dalam bidang fisika material, persamaan diffusi fraksional telah digunakan untuk menggambarkan anomali proses diffusi dalam *amorphous* semikonduktor [1], polymer [2], *film* komposit heterogen [3] dan media *porous* [4]. Dalam bidang teknik, persamaan fraksional *derivative* telah digunakan untuk menggambarkan model *viscoelastis*, yang merupakan model mekanika klasik umum [5]. Dalam bidang pasar uang, asumsi gaussian untuk distribusi peluang pengembalian telah diperluas dengan penggunaan asumsi non-gaussian dan pendekatan fraksional *derivative*, sebagai studi empiris [6].

Dalam bidang hidrologi, deskripsi transport air di dalam tanah, dalam kolom horisontal, telah digunakan persamaan diffusi non-linear [7], sebagai berikut:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D_1(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] \tag{1}$$

Persamaan ini menghadirkan sebuah *scaling* konsentrasi yang bergantung kepada waktu t dan jarak x yang diberikan oleh persamaan:

$$\lambda_{1/2}(\theta) = \frac{x}{t^{1/2}} \tag{2}$$

Ini juga disebut dengan variabel Boltzmann dalam hukum Fick. Dan persamaan (1) di atas dalam term $\lambda_{1/2}$ dapat dituliskan kembali menjadi,

$$-\frac{\lambda_{1/2}}{2}\frac{d\theta}{d\lambda_{1/2}} = \frac{d}{d\lambda_{1/2}}\left[D_1(\theta)\frac{d\theta}{d\lambda_{1/2}}\right] \tag{3}$$

Dalam penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti dalam beberapa jenis tanah: *silt loam* Kolombia, *silt loam* Hesperia, *sandy loam* Hesperia, dan campuran *silty clay loam* dan *kaolinite-sand* Salkum, telah diamati terjadinya penyimpangan terhadap persamaan (2) [8], sehingga kebergantungan konsentrasi terhadap waktu t dan jarak x [9] dituliskan kembali menjadi bentuk:

$$\lambda_q(\theta) = \frac{x}{t^q} \tag{4}$$

dimana q dapat lebih besar atau lebih kecil dari 1/2. Untuk hukum scaling umum (persamaan 4), yang didasarkan pada persamaan diffusi non-linear, terdapat beberapa asumsi yang berkaitan dengan persamaan (1), yaitu: koefisien persamaan diffusi diasumsikan mempunyai kebergantungan eksplisit terhadap jarak yang diberikan oleh $x^{-\beta}D(\theta)$ [9], sedangkan dalam literatur lain [10] koefisien diffusi diasumsikan mempunyai kebergantungan secara eksplisit terhadap $t^{2m-1}D(\theta)$, dimana m adalah kontanta positif. Sesungguhnya dua asumsi tersebut adalah sebuah fenomenologi yang memungkinkan untuk memperoleh hukum *scaling* dalam persamaan (4). Salah satu cara lain untuk memperoleh hukum *scaling* yang mungkin dapat dilakukan adalah dengan menggunakan pendekatan fraksional. Turunan fraksional dapat didefinisikan dalam bentuk integral, dan hasil ini berhubungan dengan efek memori saat mengerjakan persamaan differensial yang diterapkan dalam sistem fisika secara komputasi. Dalam proses stochastik, turunan fraksional berhubungan dengan sistem alamiah non-markovian.

2. Metodologi

Metode dari penelitian yang dilakukan adalah menganalisa dan menemukan solusi analitik dari persamaan diffusi fraksional non-linear.Penelitian ini juga menginvestigasi sifat *scaling* yang bergantung terhadap waktu dan jarak, dalam persamaan diffusi fraksional non-linear.

Untuk melakukan hal di atas, akan diterapkan definisi Riemann-Lioville dan Caputo untuk turunan fraksional. Sebenarnya masih banyak definisi yang lain untuk turunan fraksional [12], namun definisi Riemann-Lioville dan Caputo yang paling sering digunakan dalam literatur.

Berdasarkan uraian dalam pendahuluan, persamaan diffusi fraksional non-linear, dengan *scaling* yang bergantung waktu dan jarak, memungkinkan untuk digunakan dalam menggambarkan transport air dalam tanah saat kehadiran efek memori diperhitungkan. Untuk itu, akan dijelaskan lebih lanjut tentang peristiwa transport air ini.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan Diffusi Fraksional Non-Linear dan Scaling

Beberapa sistem fisika dibangun strukturnya secara intrinsik dengan beberapa relasi *scaling fundamental*. Pengetahuan ini membawa kepada model analisa baru dari sebuah sistem. Dalam sebuah sistem fisika diindikasikan bahwa kuantitas-kuantitas yang meliputi relasi *scaling* lebih banyak yang berhubungan secara *rigid*, walaupun terjadi perubahan parameter dari sistem. Sebagai contoh adalah Sistem transport air dalam tanah yang digambarkan oleh persamaan (1), yang berhubungan dengan bergantungnya konsentrasi terhadap jarak dan waktu, persamaan (3). Propagator fraktal dalam sierpinski gasket juga menghadirkan sebuah *scaling* yang bergantung pada jarak dan waktu dalam bentuk asimtotik [11]. Sebuah contoh lain yang menghadirkan relasi *scaling* ditunjukkan oleh potensial Gibbs dalam wilayah titik kritis [13].

Untuk menginvestigasi relasi scaling dari persamaan diffusi fraksional non-linear ini digunakan pendekatan terhadap definisi Riemann-Lioville dan Caputo pada turunan fraksional sebagai berikut:

$$D^{\alpha}_{RL(z)} f(z) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dz^n} \int_0^z \frac{f(\tau)}{(z-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \tag{5}$$

dan

$$D^{\alpha}_{C(z)} f(z) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^z \frac{f^n(\tau)}{(z-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \tag{6}$$

dimana,

$D^{\alpha}_{RL(z)}$ mengindikasikan Operator Riemann-Lioville dan

$D^{\alpha}_{C(z)}$ mengindikasikan Operator Caputo

Dan dua definisi operator tersebut dihubungkan oleh ekspresi berikut:

$$D^{\alpha}_{RL(z)} f(z) = D^{\alpha}_{C(z)} f(z) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \Phi_{(k-\alpha+1)}(z) , \tag{7}$$

dimana,

$$\Phi_{\beta}(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & z\geq 0\\ 0, & z<0\end{pmatrix} \tag{8}$$

Pertama, akan dijelaskan turunan fraksional Riemann-Lioville terhadap jarak yang diterapkan ke dalam persmaan (1):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=D^{\alpha}_{RL(x)}\left[D_{\alpha}(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right],\qquad 0<\alpha<1 \tag{9}$$

Pada persamaan ini, dengan $D_{\alpha}(\theta)=D$, telah digunakan pada studi anomali diffusi untuk *L'evy flight.* Sedangkan untuk $D_{\alpha}(\theta)=D\theta^{\alpha}$ telah dipelajari dalam [14]. Melalui generalisasi variable *scaling*, persamaan (4), yang diperoleh dari persamaan (9) dihasilkan persamaan berikut:

$$-q\frac{\lambda_q}{t}\frac{d\theta}{d\lambda_q}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x\frac{D_{\alpha}(\theta)\partial_{\tau}\theta}{(x-\tau)}d\tau \tag{10}$$

dengan memasukkan variabael $u=\tau/t^{q}$ ke dalam persamaan (10) dihasilkan:

$$-q\lambda_q\frac{d\theta}{d\lambda_q}=D^{\alpha}_{RL(\lambda_q)}\left[D_{\alpha}(\theta)\frac{d\theta}{d\lambda_q}\right] \tag{11}$$

dengan, $q=1/(1+\alpha)$. Terlihat, persamaan (9) dapat diekspresikan sebagai fungsi generalisasi relasi *scaling* (persamaan (4)). Perlu dicatat, untuk $\alpha=1$, telah me*recover* variable boltzman.

Untuk Operator Caputo terhadap jarak, dapat juga digunakan prosedur yang sama. Dan hasilnya adalah sama dengan persamaan (11), yaitu:

$$-q\lambda_q\frac{d\theta}{d\lambda_q}=D^{\alpha}_{C(\lambda_q)}\left[D_{\alpha}(\theta)\frac{d\theta}{d\lambda_q}\right] \tag{12}$$

dengan, $q=1/(1+\alpha)$. Sedangkan, untuk turunan fraksional terhadap waktu, dapat dijelaskan bahwa Operator Caputo beraksi pada sisi sebelah kiri persamaan (1),

$$D^{\alpha}_{C(t)}\theta=\frac{\partial}{\partial x}\left[D_{\alpha}(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right],\qquad 0<\alpha<1 \tag{13}$$

Persamaan ini telah digunakan dalam studi anomali diffusi untuk wilayah *subdiffusive* [11]. Dengan memasukkan $u=\dfrac{x}{t^{1+q}}\tau$ ke dalam persamaan (13) dan menggunakan variable persamaan (4) diperoleh:

$$\frac{\lambda_q^{\alpha}}{t^{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\lambda_q}\frac{\partial_u\theta}{(\lambda_q-u)^{\alpha}}du=\frac{1}{t^{2q}}\frac{d}{d\lambda_q}\left[D_{\alpha}(\theta)\frac{d\theta}{d\lambda_q}\right] \tag{14}$$

bila disetting $\alpha=2q$, diperoleh:

$$\lambda_q^{\alpha}O^{\alpha}_{C(t)}\theta=\frac{d}{d\lambda_q}\left[D_{\alpha}(\theta)\frac{d\theta}{d\lambda_q}\right] \tag{15}$$

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 16 Nomor 2 2016, 91 – 98
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

(perlu dicatat: bahwa singularitas yang didekati dalam variabel $u = \frac{x}{t^{1+q}}\tau$ untuk $t \to 0$ tidaklah membuat tidak berlakunya integrasi dari persamaan (13), dikarenakan fakta bahwa limit yang menghubungkan integral cenderung kepada nilai yang sama.) Bagaimanapun, persamaan (14) adalah valid untuk t >0. Relasi *scaling* persamaan (4) yang berhubungan dengan persamaan (13) juga dibenarkan oleh hasil analitik yang telah diperoleh dalam penelitian [11]. Sebuah pengamatan terhadap integral pada sisi sebelah kiri persamaan (14) tidaklah mewakili definisi biasa dari turunan fraksional persamaan (5) disebabkan fakta bahwa variabel θ bergantung kepada λ_q dan variabel integrasi *u*. Untuk alasan tersebut maka diterapkan operator $O^{\alpha}_{C(t)}$ yang dimasukkan ke $D^{\alpha}_{C(t)}$.

Untuk Operator Riemann-Lioville yang beraksi terhadap waktu pada sisi sebelah kiri persamaan (1), hubungan persamaan fraksional terhadap variabel *scaling* persamaan (4), telah diberikan oleh:

$$\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)\lambda_q^{\alpha-1}}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\lambda_q}\frac{\theta}{(\lambda_q-u)^{\alpha}}du-\frac{\alpha}{2}\lambda_q^{\alpha}O^{\alpha}_{RL(\lambda_q)}\theta=\frac{d}{d\lambda_q}\left[D_\alpha(\theta)\frac{d\theta}{d\lambda_q}\right] \tag{16}$$

dimana, $q=\alpha/2$. Sedangkan untuk sisi kanannya persamaan (1), dapat digantikan oleh Operator Caputo yang beraksi terhadap waktu pada sisi sebelah kiri persamaan (13), lihat referensi [11]. Hubungan persamaan fraksionalnya adalah:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=D^{\alpha}_{RL(t)}\left[D_\alpha(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial_x[D_\alpha(\theta)\partial_x\theta]}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \tag{17}$$

Transport Air di dalam Tanah dan Persamaan Diffusi Fraksional

Seperti yang sudah dijelaskan, beberapa transport air di dalam tanah pada kolom tanah horisontal, telah dapat disimulasikan oleh persamaan (1) dan relasi *scaling* persamaan (2). Namun, relasi *scaling* dalam persamaan (2) tidaklah menghasilkan hasil yang sesuai dengan eksprimen [9, 10]. Untuk itu, sekarang akan dijelaskan bentuk generalisasi dari persamaan (1) yang telah dijelaskan dalam [10] dengan koefisien diffusi yang bergantung waktu, yaitu:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[t^{-\beta}D_\beta(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] \tag{18}$$

dimana,

β adalah parameter real

θ adalah kandungan air volumetrik

Secara khusus, persamaan (18) untuk nilai $D_\beta(\theta)=D$ dan $\beta=-2$, dijelaskan oleh Batchelor, telah digunakan untuk mensimulasikan aliran turbulen [15]. Untuk transport air dalam tanah, kondisi perbatas (*boundary conditions*) seringkali dipilih sebagai berikut [7]:

$$x>0,\quad \theta=\theta_i,\quad t=0 \tag{19}$$

$$x=0,\quad \theta=\theta_0,\quad t>0 \tag{20}$$

dimana, θ_i adalah kandungan air mula-mula sepanjang kolom tanah

θ_0 adalah konstanta kandungan air pada x=0

Persamaan (18) berhubungan dengan relasi *scaling* (persamaan (4)), dan juga telah digunakan untuk mensimulasikan data *attenuasi sinar single-energy gamma* untuk tanah Salkum bertekstur *silty clay loam* [10].

Sekarang, akan diterapkan cara lain untuk menganalisa persamaan (18) dalam pembandingan dengan persamaan fraksional (persamaan (17)). Pengintegralan persamaan (18) terhadap waktu didapatkan:

$$\theta(x,t)-\theta(x,0)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{\partial_x\lfloor D_\beta(\theta)\partial_x\theta\rfloor}{\tau^\beta}d\tau \tag{21}$$

konstanta $\Gamma(1-\beta)$ dijelaskan dalam perjanjian. Dengan memasukkan variabel $\tau=t-u$,dihasilkan:

$$\theta(x,t)-\theta(x,0)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{\partial_x\lfloor D_\beta(\theta)\partial_x\theta\rfloor}{(t-u)^\beta}d\tau \tag{22}$$

Bila dilakukan penurunan terhadap waktu diperoleh:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial_x\lfloor D_\beta(\theta)\partial_x\theta\rfloor}{(t-u)^\beta}d\tau \tag{23}$$

Ini sangat menarik untuk dicatat bahwa persamaan tersebut mirip dengan persamaan (17) namun tidak sama. Dalam persamaan (23), variabel θ bergantung pada *x, t* dan *u*, sedangkan pada persamaan (17) variabel θ bergantung hanya kepada x dan τ. Secara operasional dikatakan bahwa denominator integral persamaan (17), $t-\tau$, berjalan dari nol ke *t*. Sedangkan denominator integral dari persamaan (23), $\tau=t-u$, berjalan dari nol ke *t*. Jadi, ini merupakan fenomena kebalikan satu sama lain. Persamaan (17) dan persamaan (23) adalah sama untuk satu kasus khusus, yaitu jika numerator integral dari persamaan ini adalah symmetris dengan relasinya terhadap titik *t/2* untuk semua *t* sesaat. Generalisasi persamaan (1) telah dijelaskan dalam [9], dengan koefisien diffusi yang bergantung terhadap jarak:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[J]=\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{-\beta}D_\beta(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right] \tag{24}$$

dimana, J adalah fluks. Secara khusus, persamaan (24), bila $D_\beta(\theta)=D$ dan $\beta=-4/3$, dijelaskan oleh Richardson, telah digunakan untuk mensimulasikan aliran turbulen [16]. Persamaan (9) dapat diperoleh dari persamaan (24) dengan mempertimbangkan kontribusi mula-mula dari fluks.

Seharusnya perlu dipahami bahwa kompleksitas dari struktur tanah tidaklah dapat dijelaskan dalam deskripsi transport air dalam tanah melalui persamaan diffusi. Dalam deskripsi ini dijelaskan perubahan porositas media dan kerapatan bulk (*bulk density*), dan sistem yang dikategorikan sebagai berikut [10]: (1) media berpori yang *rigid* dengan kerapatan bulk yang tidak berubah. (2) Media berpori *semirigid* dengan kerapatan bulk yang tidak berubah. (3)

media berpori *swelling* dengan kerapatan bulk yang berubah. Kategori pertama seringkali digambarkan oleh persamaan (1) dengan koefisien diffusi yang hanya bergantung kepada kandungan air volumetrik, θ. Untuk kategori kedua dan ketiga, dengan kemungkinan perubahan struktur media berpori dan kerapatan bulk, deskripsi dari sistem ini yang mungkin adalah dengan persamaan (18), (24) atau persamaan diffusi fraksional non-linear dalam teks di atas dengan menggunakan lebih banyak fungsi diffusivitas yang kompleks. Perlu dicatat bahwa persamaan diffusi fraksional yang bergantung waktu dengan nilai $q = \alpha / 2$ adalah lebih kecil dari 1/2, sedangkan untuk persamaan diffusi fraksional yang bergantung jarak dengan nilai $q = 1/(1+\alpha)$ adalah lebih besar dari 1/2, untuk 0 < α < 1. Kedua persamaan tersebut dapat di*cover* oleh *range* 0 < q < 1.

4. Kesimpulan

Telah diinvestigasi bahwa terdapat relasi *scaling* (persamaan (4)) untuk beberapa tipe persamaan diffusi fraksional non-linear. Relasi ini mengindikasikan bahwa persamaan diffusi fraksional non-linear memainkan aturan yang penting dalam transport air di dalam tanah saat *Scaling Boltzmann* telah rusak. Juga telah ditunjukkan bahwa seringkali persamaan diffusi non-linear yang bergantung waktu (persamaan (18)) berhubungan dekat dengan persamaan diffusi fraksional non-linear (persamaan (17).

Diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi terkait dengan beberapa aspek yang berhubungan dengan persamaan diffusi fraksional dan juga persamaan antara fraksional dan persamaan diffusinya.

Daftar Pustaka

[1] U. Even et al., 1984. Phys. Rev. Lett. 52, 2164.

[2] H. Schiessel and A. Blumen. 1995. Fractals 3, 483.

[3] G. Niklasson and C. Granqvist, 1986. Phys. Rev. Lett. 56, 256.

[4] B. Berkowitz and H. Scher, 1997. Phys. Rev. Lett. 79, 4038.

[5] F. Mainardi, 1997. Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continnum Mechanics, Springer-Verlag, NY, 1997, 291 – 348.

[6] N. Laskin, 2000. Physica A 287, 482.

[7] D. Hillel, Soil and Water, 1997. Physical Principles and Processes, 1971, Academic Press, NY.

[8] H.Ferguson and W.R. Gardner, 1963. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 27, 243.

[9] Y. Pachepsky and D. Timlin, J. 198. Hydrology 204, 98.

[10] I.A. Guerrini and D. Swartzendruber, 1992. Soil Sci. Soc. Am. J. 56, 335.

[11] R. Metzler and J. Klafter, 2000. Phys. Rep. 339, 1.

[12] K. B. Oldham and J. Spannier, 1974. The fractional calculus (Academic Press, NY).

[13] H. B. Callen, Thermodynamics and an introduction to thermostatistics (second edition), 1985, John Wiley & Sons.

[14] M. Bologna, C. Tsallis and P. Grigolini, 2000. Phys. Rev. E 62, 2213.

[15] J. Klafter, A. Blumen and M. F. Shlesinger 35, 3081 (1987).

[16] G. Boffetta and I. M. Sokolov, 2002. Phys. Rev. Lett. 88, 094501.