Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 16 Nomor 2 2016, 71 – 78
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

UPPER RADICAL DAN LOWER RADICAL

Agustina Pradjaningsih

Jurusan Matematika, Fakultsa MIPA, Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia
e-mail: agustina.fmipa@unej.ac.id

Abstract. The attribute of Radical is expansion from ring character. This radical attribute could classified became two class of radical. That were u*pper radical* and *lower radical*. This article will tell about two class of those radicals. Finally, from *upper radical* and *lower radical* concept could reborn the others radicals characters, which were essentially based from those two types of radicals.

Keywords: radical, upper radical, lower radical

MSC 2020 : 13B99

1. Pendahuluan

Sifat-sifat dasar radical pada *ring* telah diperkenalkan oleh Agustina (2003). Sifat dasar radical tersebut dipartisi menjadi dua klas radical yaitu *upper radical* dan *lower radical*.[3]. Semua pengertian dasar dari ring pada tulisan ini diambil dari [2]. Sebelum sampai ke sifat dua klas radical tersebut perlu diingat terlebih dahulu definisi dari radical.

R adalah sifat suatu *ring*. Suatu ring dengan sifat **R** disebut **R**-*ring*. Ideal **I** dari ring A disebut **R**-*ideal*, jika I merupakan **R**-ring. Jika ada **R**-ideal dari ring A yang memuat setiap **R**-ideal yang lain dalam A maka **R**-ideal tadi disebut dengan **R**-*radical* dari A ditulis dengan **R**(A). Ring A dikatakan **R**-*semisimpel* jika **R**-ideal di A hanyalah **R**-ideal nol $\{0\}$.

Definisi 1. Diberikan **R** sifat suatu ring. **R** adalah *radical* jika memenuhi
(i) Setiap homomorphic image A' dari **R**-ring A merupakan **R**-ring
(ii) Setiap ring A mempunyai **R**-radical **R**(A).
(iii) Ring kuosen A/**R**(A) merupakan **R**-semisimpel [**R**(A/**R**(A))=$\{0\}$]

Definisi 2. Diberikan ring A dan **R** sifat radical. Jika **R**(A) = A terpenuhi maka dikatakan A adalah **R-radical** ring.

Selanjutnya, disamping Definisi 1 diatas, untuk menunjukkan apakah **R** suatu ring yang bersifat radical juga dapat digunakan teorema dibawah ini yang ekuivalen dengan definisi diatas.

Teorema 1. Sifat **R** adalah *radical* jika dan hanya jika
(i') Setiap homomorpic image A' dari **R**-ring A adalah **R**-ring
(ii') Jika setiap *homomorphic image* tidak nol dari ring A memuat **R**-ideal tidak nol maka A adalah **R**-ring.
Bukti dapat dilihat di [1].

Tujuan dari tulisan ini adalah untuk memahami dua klas radical yaitu upper radical dan lower radical ditinjau dari sifat-sifatnya. Dua klas radical tersebut menmdasari sifat radical yang lain seperti sifat radical hereditary dan dekomposisi klas radical [3].

2. Hasil dan Pembahasan

2.1 Upper Radical

K sebarang klas dari ring-ring. Pada klas ini, sifat radical **R** untuk semua ring dalam **K** adalah **R**-semisimple ring. Selanjutnya akan diberikan sifat-sifat yang berkaitan dengan **R**-semisimple.

Teorema 2. Diberikan ring A **R-**semisimple. Setiap ideal A adalah **R**-semisimple ring.

Bukti :

Ambil sebarang I ideal A sehingga terdapat **R**(I) **R-**radical I. Akan ditunjukkan **R**(I)=$\{0\}$. Diketahui setiap ring A mempunyai **R-**radical **R**(A). A adalah **R**-semisimple ring sehingga **R**(A)=$\{0\}$. Karena I ideal A sehingga **R**(I)$\subseteq$ **R**(A). Jadi **R**(I)=$\{0\}$. Terbukti setiap ideal dari **R**-semisimple ring A adalah **R**-semisimple ring.

Teorema 3. Diberikan ring tidak nol A. Untuk suatu sifat radical **R** dari ring tidak nol A, maka A adalah **R**-radical ring jika dan hanya jika A tidak dapat dipetakan secara epimorphisma ke **R**-semisimple ring tidak nol.

Bukti :

(1) Jika A **R**-radical ring, maka menurut Teorema 1 maka homomorphic image dari **R**-ring A juga merupakan **R**-ring.
Andaikan diambil B **R**-semisimpel ring tidak nol sehingga
$\phi : A \to B$ epimorphisma dengan $\phi(A) = B \neq 0$.
Diketahui B **R**-semisimpel ring sehingga **R**(B)=$\{0\}$. Karena $\phi(A) = B$ jadi $\mathrm{R}[\phi(A)] = \mathrm{R}(B) = \{0\}$. Padahal $\mathrm{R}[\phi(A)]$ tidak selalu sama dengan nol. Tetapi $\{0\} \subseteq \phi(A)$ sehingga $\mathrm{R}(B) \subseteq \phi(A)$ dan $\phi(A)$ bukan himpunan bagian $\mathrm{R}(B)$. Kontradiksi . Terbukti A tidak dapat dipetakan secara epimorphisma ke **R**-semisimpel ring tidak nol. ($\Rightarrow$)

(2) Andaikan A bukan **R**-radical ring. Menurut Teorema 1 tidak setiap homomorphic image tidak nol dari ring A memuat **R**-ideal tidak nol. Jadi ada homomorphic image tidak nol yang memuat **R**-ideal nol.Sehingga $\{0\} \subseteq \phi(A)$. Jadi homomorphic image $\phi(A)$ adalah **R**-semisimpel ring tidak nol. Padahal A tidak dapat dipetakan secara epimorphisma ke **R**-semisimpel ring tidak nol. Kontradiksi. Jadi A **R**-radical ring. $(\Leftarrow)$

Teorema 4. Diberikan sebarang klas K, maka pernyataan dibawah ini ekuivalen.
(i) Setiap ideal dari suatu ring dalam K berada dalam klas K.
(i′) Setiap ideal tidak nol I dari ring A dalam K dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol B dalam K.

Bukti :

(1) Ambil A ring dalam **K** maka A **R**-semisimpel. Ambil I ideal A dengan $I \neq \{0\}$ maka $I \in$**K**. Jadi I **R**-semisimpel. Karena I **R**-semisimpel maka **R**(I)=$\{0\}$. Dibentuk pemetaan dari I ke $\phi(I)$ dengan $\phi(I) \neq \{0\}$. $\phi(I)$ pasti mempunyai $\mathrm{R}[\phi(I)]$. Akan ditunjukkan $\mathrm{R}[\phi(I)] = \{0\}$.
$\mathrm{R}(I) \to \phi[\mathrm{R}(I)]$
Karena **R**(I)=$\{0\}$maka $\mathrm{R}[\phi(I)] = \{0\}$. Andaikan $\phi[\mathrm{R}(I)]$bukan **R**-radical maka ada ideal J dengan $\phi[\mathrm{R}(I)] \subseteq J \subseteq \phi(I)$. J merupakan peta dari suatu ideal di I yang memuat **R**(I), padahal **R**(I) **R**-radical I. Kontradiksi. Maka $\phi[\mathrm{R}(I)]$ **R**-radical $\phi(I)$. Jadi $\phi[\mathrm{R}(I)] = \mathrm{R}[\phi(I)] = \{0\}$. Jadi $\phi(I)$ **R**-semisimpel. Sebut $\phi(I) = B$. $B \in$**K**. $(\mathrm{i} \to \mathrm{i}')$

(2) Diberikan ring A **R**-semisimpel dan I ideal A dengan $I \neq \{0\}$. $A \in$**K** sedangkan $I \in A$ maka $I \in$**K.** $(\mathrm{i}' \to \mathrm{i})$

Teorema 5. Diberikan suatu klas **K**. Klas **K** adalah keluarga ring-ring yang **R**-semisimple untuk suatu sifat radical **R** jika dan hanya jika
(i) Setiap ideal dari suatu ring dalam **K** berada dalam klas **K**.
(ii) Jika setiap ideal tidak nol dari suatu ring A dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol dalam **K** maka A berada dalam klas **K**.

Bukti :

(1) Ambil sebarang **K** klas dari semua **R**-semisimple ring dan I ideal A dengan $A \in$**K**. Jadi A **R**-semisimple ring. Menurut Teorema 2 $I \in$**K**.terbukti (i).
Ambil A bukan **R**-semisimple, berarti **R**(A)≠(0). Jadi A mempunyai **R**-radical **R**(A) tidak nol. **R**(A) **R**-ideal sekaligus **R**-ring. Sehingga **R**(A) merupakan ring tidak nol. Menurut Teorema 3 ring **R**(A) ini tidak dapat dipetakan secara epimorphisma ke **R**-semisimple ring tidak nol. Jadi A **R**-semisimple dan $A \in$**K**. terbukti (ii).$(\Rightarrow)$

(2) Diberikan klas **K** yang memenuhi Teorema 5. Didefinisikan sifat radical **R** untuk **K** yang merupakan klas dari semua ring yang **R**-semisimple di mana jika *A* tidak dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol dalam klas **K** maka *A* **R**-ring. Akan ditunjukkan memenuhi Teorema 1.

(a) Menurut Teorema 4 diketahui bahwa setiap ideal tidak nol *I* dari ring *A* dalam **K** dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol *B* dalam **K**. Karena *I* merupakan ring tidak nol, maka homomorphic image dari *I* merupakan ring tidak nol.

(b) Diketahui *A* ring dengan setiap homomorphic image dari *A* memuat **R**-ideal tidak nol. Andaikan *A* bukan **R**-ring, maka *A* dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol A' dalam **K.**. A' juga mempunyai **R**-ideal tidak nol *I*, yang diasumsikan mempunyai sifat seperti *A*. Jadi *I* bukan **R**-ring maka *I* dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol dalam **K**, sehingga $I \in$ **K** tetapi disamping itu *I* bersifat seperti *A* yang berarti jika *I* tidak dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol dalam **K** maka *I* **R**-ring, sehingga *A* **R**-ring.

(c) Ambil sebarang ring $A \in$ **K**. Ambil sebarang ideal $I \subseteq A$ maka $I \in$ **K**. Ideal *I* selalu dapat dipetakan secara epimorphisma ke *I* sendiri, maka *I* bukan **R**-ring, jadi *I* bukan **R**-ideal. Akibatnya **R**-ideal satu-satunya hanya $\{0\}$. Sehingga *A* **R**-semisimple. Ambil *B* **R**-semisimple maka menurut teorema 2.1 untuk setiap ideal $J \subseteq B$, $J \neq \{0\}$ adalah **R**-semisimple. Sehingga *J* dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol di **K,** yaitu *J* dapat dipetakan oleh homomorphisma identitas ke *J*. Andaikan $J \notin$ **K** maka *J* bukan **R**-semisimple, jadi $J \in$ **K.** Terbukti $B \in$ **K**.($\Leftarrow$)

Diberikan **K** sebarang klas dari ring-ring, $\overline{\mathrm{K}}$ perluasan dari klas **K** yang memuat semua subring yang diperoleh dari **K**. Diberikan pula $\overline{\overline{\mathrm{K}}}$ klas dari semua ring dengan sifat bahwa setiap ideal tidak nol dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol dari $\overline{\mathrm{K}}$, maka $K \subseteq \overline{\overline{\mathrm{K}}}$, dan $\overline{\overline{\mathrm{K}}}$ memenuhi teorema 5. Oleh karena itu semua ring yang berada dalam $\overline{\overline{\mathrm{K}}}$ adalah **R**-semisimple.

Sifat radical **R** disini disebut dengan sifat ***upper radical*** yang ditentukan oleh **klas K**. Selanjutnya **R**-radical ring dari ring *A* disebut **upper radical dari *A***. Setiap ring dalam **K** adalah **R**-semisimple sebab $K \subseteq \overline{\overline{\mathrm{K}}}$. Selanjutnya akan diberikan teorema yang berhubungan dengan klas upper radical tersebut.

Teorema 6. Jika diberikan **K** sebarang klas dari ring-ring, $\overline{\mathrm{K}}$ klas semua subring yang diperoleh dari **K**, $\overline{\overline{\mathrm{K}}}$ klas dari ring-ring dengan sifat setiap ideal tidak nol dapat dipetakan secara epimorphisma ke ring tidak nol dalam **K**, R' sebarang sifat radical dimana semua ring dalam **K** adalah R'-semisimple ring dan **R** sifat upper radical yang ditentukan oleh klas **K**, maka $\mathrm{R}' \leq \mathrm{R}$.

Bukti :

Ambil sebarang ring $A \in \mathbf{K}$ sehingga A R'-semisimple. Diketahui $K \subseteq \overline{\overline{\mathrm{K}}}$ sehingga $A \in \overline{\overline{\mathrm{K}}}$. Diketahui pula bahwa semua ring yang berada dalam $\overline{\overline{\mathrm{K}}}$ adalah **R**-semisimple, sehingga A juga **R**-semisimple maka terbukti $\mathrm{R}' \leq \mathrm{R}$.

2.2 Lower Radical

Diberikan **K** sebarang klas dari ring-ring. Pada bagian ini sifat radical untuk semua ring dalam **K** adalah **R**-radical ring. Bentuk-bentuk disini menggunakan pengertian bilangan ordinal.

Definisi 3. Ring A dikatakan berderajat dua atas **K**, jika setiap homomorphic image tidak nol dari A memuat ideal tidak nol, dan ideal ini merupakan ring berderajat satu atas **K** atau A sendiri berderajat satu atas **K**.

Definisi 4. Diberikan β bilangan ordinal sehingga β-1 ada untuk bilangan ordinal β. Ring A dikatakan berderajat β atas **K** jika setiap homomorphic image tidak nol dari A memuat ideal tidak nol dan ideal ini merupakan ring berderajat β-1 atas **K.**

Definisi 5. Diberikan β bilangan limit ordinal. Ring A dikatakan berderajat β atas **K**, jika A berderajat α untuk sebarang bilangan ordinal α dan $\alpha<\beta$.

Teorema 7. Setiap homomorphic image dari ring berderajat α atas **K** merupakan ring berderajat α.

Bukti :

Ambil A ring berderajat α atas **K**. Akan ditunjukkan $\phi(A)$ berderajat α atas **K**.

(1) Untuk α=1. Karena ring A berderajat satu atas **K** maka $\phi(A)$ juga berderajat satu atas **K**.

(2) Untuk $\alpha\neq 1$ dan α bukan bilangan limit ordinal. Jika ring A berderajat α atas **K** dan $\phi(A)$ adalah sebarang homomorphic image A maka setiap homomorphic image $\varphi[\phi(A)]$ dari $\phi(A)$ merupakan homomorphic image A, dan jika $\varphi[\phi(A)] \neq \{0\}$ maka $\varphi[\phi(A)]$ pasti memuat ideal tidak nol yang berderajat α-1 atas **K**. Dari Definisi 4 jelas $\phi(A)$ berderajat α atas **K**.

(3) Jika α bilangan limit ordinal, maka A berderajat γ atas **K**, untuk suatu bilangan ordinal γ dengan $\gamma<\alpha$. Dipilih γ sekecil mungkin maka $\gamma\leq\delta$ untuk setiap bilangan ordinal $\delta<\alpha$ sehingga A berderajat δ atas **K**. Dibentuk $\phi(A)$ sebarang

homomorphic image A, sehingga setiap $\varphi[\phi(A)]$ homomorphic image dari $\phi(A)$ merupakan homomorphic image A. Jika $\varphi[\phi(A)] \neq \{0\}$ maka $\varphi[\phi(A)]$ pasti memuat ideal tidak nol yang berderajat δ-1 atas **K**. Diambil δ-1=γ sehingga $\phi(A)$ berderajat δ atas **K**. Karena $\delta<\alpha$ maka menurut Definisi 5. $\phi(A)$ berderajat α atas **K**.

Teorema 8. Diberikan dua bilangan ordinal α dan β. Jika $\alpha<\beta$ maka setiap ring berderajat α atas **K** juga berderajat β atas **K**.

Bukti :

Ambil A ring berderajat α atas **K**.

(1) Untuk $\beta>1$ telah jelas dari Definisi 3.

(2) Jika β bukan bilangan limit ordinal. Ambil A ring berderajat β-1 atas **K** maka setiap homomorphic image $\phi(A) \neq \{0\}$ juga berderajat β-1 atas **K**. Diambil β-1=α. Dari Definisi 4 A ring berderajat β atas K.

(3) Untuk β bilangan limit ordinal dan A ring berderajat α dengan $\alpha<\beta$ maka menurut Definisi 5. A merupakan ring berderajat β atas **K**.

Definisi 6. K* klas semua ring berderajat tertentu atas **K**. A merupakan **R**-ring jika dan hanya jika $A \in$ **K*** sehingga **K**$\leq$ **K***.

Akan ditunjukkan bahwa sifat **R** pada Definisi 6 bersifat radical.

Teorema 9. R bersifat radical

Bukti :

Akan ditunjukkan **R** memenuhi Teorema 1.

(i') terpenuhi dari Teorema 7. Akan ditunjukkan (ii') terpenuhi. Ambil A ring di mana setiap homomorphic image tidak nol $\phi(A)$ memuat ideal tidak nol I berderajat β atas **K**. Misalkan γ adalah bilangan ordinal yang lebih besar atau sama dengan β. Jelas γ ada. Menurut Teorema 8 ideal I berderajat γ dan A berderajat γ+1 atas **K**. Jadi A berderajat tertentu atas **K** sehingga $A \in$ **K***. Jadi A **R**-ring. Terbukti **R** bersifat radical.

Sifat radical **R** disini disebut lower radical yang ditentukan oleh klas **K**. Selanjutnya **R**-radical dari ring A disebut lower radical dari ***A***.

Teorema 10. Jika **K** klas dari ring-ring, **R** sifat lower radical yang ditentukan oleh klas **K** dan R' sebarang sifat radical dan untuk setiap ring yang berada dalam **K** adalah R' -radical ring maka $R \leq R'$.

Bukti :

Diketahui **R** dan R' memenuhi teorema 1 dan setiap ring dalam **K** adalah R'-radical ring. Andaikan setiap ring berderajat $\alpha<\beta$ adalah R'-ring.

Jika β bilangan limit ordinal dan ring *A* berderajat α dimana $\alpha<\beta$ maka *A* R'-ring.

Jika β-1 ada dan *A* ring berderajat β maka setiap homomorphic image tidak nol dari *A* memuat ideal tidak nol *I* berderajat β-1. Oleh karena itu *I* adalah R'-ring. Jelas *A* sendiri R'-ring dari teorema 1. Terbukti $R \leq R'$.

3. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di bagian pembahasan dapat diambil kesimpulan bahwa sifat radical dibagi menjadi dua klas sifat yaitu upper radical dan lower radical. Semua ring pada klas upper radical bersifat **R**-semisimpel ring sedang pada klas lower radical bersifat **R**-radical ring.

Jika diberikan **R1** dan **R2** dua sifat radical dan **R1≤ R2** maka terdapat dua kejadian berikut :

1. Jika **R1**-radical ring maka **R2**-radical ring.
2. Jika **R2**-semisimpel ring maka **R1**-semisimpel ring.

Selanjutnya dari klas upper radical dan lower radical dapat diturunkan sifat radical hereditary dan dekomposisi dari keduanya yang mendasari pembagian jenis-jenis radical lebih lanjut.

Daftar Pustaka

[1] Agustina P. 2002. *Sifat-sifat Dasar Radical pada Ring*, Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Vol. 2, No. 2, 130 – 135.

[2] Birkhoff, Garrett, Mac Lane, Saunders., 1979. *Algebra*, Second Edition, Macmilan Publishing Co., Inc. New York.

[3] FA Szasz. 1981. *Radical of Rings*, John Wiley & Sons, Chichester.