Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 16 Nomor 2 2016, 63 – 70
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

MODEL GERAKAN PELURU DENGAN HAMBATAN LINIER

(*Projectile Motion Modeling with Linear Resistance*)

Rusli Hidayat

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia

Abstract. When the projectile is shot into the air, the main force affecting the motion of projectile, other than gravity, is air resistance. This slowing down force is drag force, and it acts in a direction opposite to the velocity of the projectile. For the projectiles moving through the air at relatively low speeds, however, the drag force is proportional to the speed and so is called linear. The aim of this paper is to discuss the projectile motion by considering air friction as linear resistance. The results obtained show that the projectile motion model with linear resistance is more complex in formulating maximum height and range than the model without air friction force.

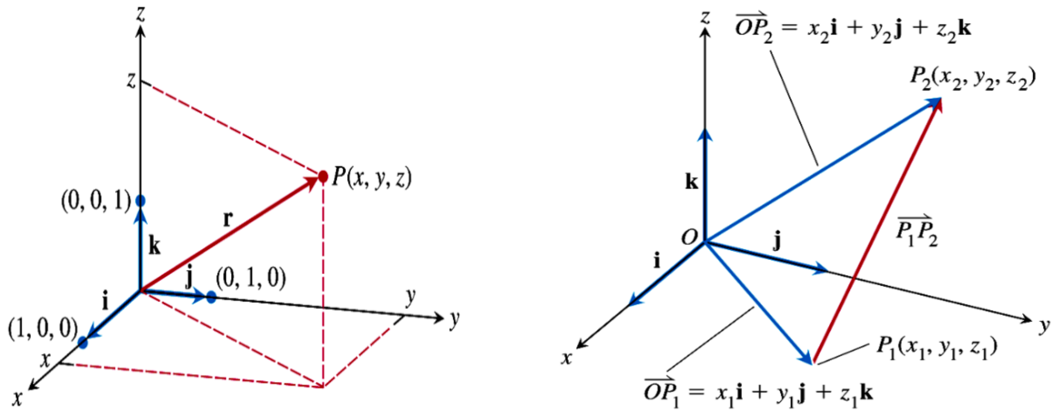
Keywords: *Modeling, Projectile Motion, Linear Resistance Model*
MSC 2020 : 34A05

1. Pendahuluan

Ketika sebuah peluru ditembakkan keudara, banyak hal yang ingin kita ketahui berkenaan dengan gerakan peluru tersebut sehingga munculah beberapa pertanyaan seperti: 1) Berapa jauh jarak tembak yang dapat dicapai oleh peluru? 2) Apakah peluru akan mengenai sasaran dengan tepat? 3) Berapa ketinggian maksimum yang bisa dicapai peluru agar jarak tembakan juga maksimum? 4). Berapa lama waktu yang diperlukan oleh peluru untuk mencapai sasaran dan lain sebagainya yang kesemuanya itu membutuhkan akurasi perhitungan yang tinggi. Agar semua pertanyaan diatas dapat dijawab, diperlukan suatu model gerakan peluru yang dapat mengaproksimasi gerakan peluru yang ideal serta memperhitungkan segala hambatan yang mungkin muncul. Oleh karena itu pada tulisan ini, akan dibahas tentang bagaimana membangun model gerakan peluru (derivasi) tanpa hambatan, menentukan ketinggian peluru, menentukan waktu yang diperlukan peluru diudara, menghitung jarak tembakkan (*range*) dan membangun model gerakan peluru yang diberi hambatan linier.

Untuk mendeskripsikan gerak suatu objek matematika (dengan massa m) dalam ruang tanpa ukuran dan bentuk objek, dipergunakan istilah *partikel*. Posisi suatu partikel dalam ruang dapat diketahui dengan membangun sistem koordinat. Posisi partikel untuk sebarang waktu misalkan dititik P(x, y, z) dinyatakan dengan *vektor posisi*

$r(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yang dimulai dari titik asal (gambar 1). *Kecepatan* didefinisikan sebagai rata-rata perubahan posisi terhadap waktu: $v(t) = \frac{dr}{dt}$, dan *percepatan (akselerasi)* didefinisikan sebagai rata-rata perubahan kecepatan terhadap waktu: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ ([1] & [2]).



Gambar 1. Vektor posisi

Rata-rata perubahan momentum dari suatu partikel atau benda adalah sebanding dengan gaya yang bekerja ([3]). Secara matematis diformulasikan sebagai:

$$\frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = F \text{ (jika } m \text{ konstan).}$$

Sudut elevasi atau *sudut tembakan* (α) adalah sudut yang terbentuk oleh arah kecepatan awal peluru terhadap bidang horizontal. *Trajektori* adalah lintasan yang terbentuk oleh gerakan peluru (lintasan peluru) dan *Jarak Tembakan (Range*) adalah jarak antara titik awal tembakan dengan titik dimana trajektori memotong bidang horizontal ([4]).

Gaya-gaya dalam fisika yang bekerja menghambat suatu benda yang bergerak dalam fluida disebut gaya hambat. Gaya ini menyebabkan gerak benda menjadi melambat. Besar dari gaya hambat ini secara normal tergantung pada kecepatan benda. Jika benda bergerak jatuh melalui suatu medium maka selain gaya hambat terdapat gaya gravitasi bumi ([4]).

2. Hasil dan Pembahasan

2.1. Membangun Model Gerakan Peluru

Misalkan sebuah peluru ditembakkan keudara dengan kecepatan awal pada saat $t = 0$ adalah v_0 dan posisi awal r_0. Jika v_0 membentuk sudut dengan permukaan horizontal sebesar α (sudut elevasi) maka v_0 dapat dinyatakan sebagai:

$$v_0 = (|v_0|\cos\alpha)\mathbf{i} + (|v_0|\sin\alpha)\mathbf{j}$$

Karena kecepatan $v_0 \geq 0$, maka notasi $|v_0|$ cukup ditulis dengan v_0 sehingga persamaan diatas menjadi:

$$v_0 = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha)\mathbf{j} \tag{1}$$

Posisi awal peluru adalah

$$r_0 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 0 \tag{2}$$

Menurut hukum Newton II tentang gerak; gaya yang bekerja pada peluru adalah massa peluru dikali dengan percepatan peluru ($m.\frac{d^2r}{dt^2}$) sama dengan total gaya ([4]), dimana r adalah vektor posisi dari peluru dan t adalah waktu. Jika gaya yang bekerja hanya gaya gravitasi ($-m.g\mathbf{j}$) maka $m.\frac{d^2r}{dt^2} = -m.g\mathbf{j}$ atau dapat disederhanakan menjadi $\frac{d^2r}{dt^2} = -g\mathbf{j}$ (dalam hal ini hambatan seperti gesekan udara diabaikan).

Selanjutnya akan dicari r sebagai fungsi dari t dengan menyelesaikan persamaan diferensial $\frac{d^2r}{dt^2} = -g\mathbf{j}$. Integrasikan persamaan tersebut sehingga diperoleh $\frac{dr}{dt} = -gt\mathbf{j} + c$., kemudian substitusikan nilai awal ($t = 0$) dimana posisi $r = r_0$ dan kecepatan $\frac{dr}{dt} = v_0$ sehingga didapat $c = v_0$ dan persamaannya menjadi:

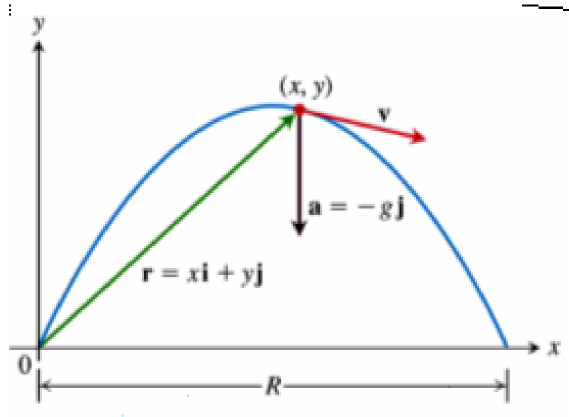
$$\frac{dr}{dt} = -gt\mathbf{j} + v_0 \tag{3}$$

Dengan mengintegrasikan sekali lagi persamaan (3), diperoleh $r = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + v_0t + c_2$, dan untuk $t = 0$, $r = r_0$ maka $c_2 = r_0$ dan diperoleh persamaan:

$$r = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + v_0t + r_0, \tag{4}$$

Dari persamaan (1) dan (4), dimana menurut persamaan (2) $r_0 = 0$ diperoleh persamaan vektor untuk gerakan peluru:

$$r = (v_0\cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \tag{5}$$



Gambar 2. Posisi, kecepatan dan percepatan setelah $t>0$

Untuk $t>0$, posisi peluru $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (gambar 2.), dengan x sebagai komponen horizontal dan y komponen vertikal (tinggi), dimana $x = (v_0 \cos\alpha)t$ dan $y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$.

Sebagai ilustrasi misalkan sebuah peluru ditembakkan dengan kecepatan awal 500m/det dan sudut elevasi 60^0. Dimanakah posisi peluru setelah 10 detik? Untuk menjawab pertanyaan ini dapat kita gunakan persamaan (5) dengan nilai-nilai $v_0 = 500m/\det, \alpha = 60^0, g = 9{,}8m/\det^2$ dan $t = 10$ detik. Hasil yang diperoleh adalah $r = 2500\mathbf{i} + 3840\mathbf{j}$, hal ini menunjukkan bahwa setelah 10 detik posisi peluru mencapai ketinggian 3840 meter dari permukaan tanah dan 2500 meter pada posisi horizontal.

2.2. Ketinggian Maksimum dan Waktu Mencapai Ketinggian Maksimum

Ketinggian maksimum diperoleh ketika kecepatan pada komponen vertikal bernilai nol yaitu:

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{6}$$

Nilai t pada persamaan (6) adalah waktu yang diperlukan untuk mencapai ketinggian maksimum, dengan nilai tersebut didapat ketinggian maksimum yang dicapai oleh peluru adalah:

$$y_{maks} = v_0 \sin\alpha\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \tag{7}$$

2.3. Jarak Maksimum dan Waktu Mencapai Jarak Maksimum

Untuk mendapatkan waktu yang diperlukan peluru ketika mendarat dipermukaan tanah, maka komponen vertikal harus sama dengan nol dan penyelesaian persamaan untuk mendapatkan waktu tersebut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}&(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0\\ &t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \Rightarrow t = 0, t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\end{aligned} \tag{8}$$

Dari persamaan (8) diperoleh nilai $t = 0$ dan $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Karena $t = 0$ adalah waktu penembakkan, maka haruslah $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ waktu yang diperlukan peluru untuk mencapai sasaran. Jarak maksimum yang dapat dicapai oleh peluru (jarak dari titik asal ketitik sasaran tembak dipermukaan tanah) adalah:

$$x_{maks} = (v_0 \cos\alpha)t = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{(v_0)^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{9}$$

Dari persamaan (9), x_{maks} tercapai ketika $\sin 2\alpha = 1$ atau $\alpha = 45^0$.

2.4. Trajektori

Trajektori dari gerakan peluru adalah berbentuk parabola. Hal ini dapat dilihat dari lintasan yang dibentuk oleh persamaan $y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ .dan $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ .yang merupakan fungsi kuadrat berikut:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x. \tag{10}$$

Persamaan (10) merupakan persamaan yang berbentuk $y = ax^2 + bx$ dan grafiknya berbentuk parabola.

2.5. Posisi Penembakan Pada Ketinggian (x_0, y_0)

Jika peluru ditembakan pada posisi ketinggian dititik (x_0, y_0) sebagai titik asal seperti yang terlihat pada gambar 3. dengan sudut elevasi α dan kecepatan awal v_0, maka persamaan diferensial dan syarat awal untuk kondisi tersebut adalah seperti yang dinyatakan oleh persamaan-persamaan berikut:

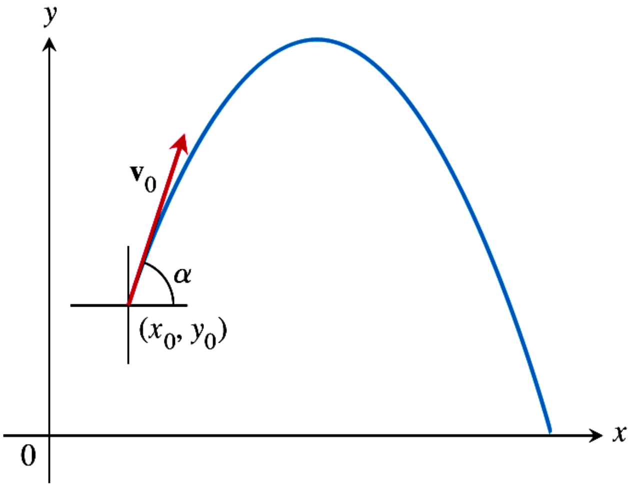
$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\mathbf{j}, \; r_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} \text{ dan } \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j} \tag{11}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (11), didapat vektor posisi untuk syarat awal yang diberikan seperti yang dinyatakan oleh (12):

$$r = [x_0 + (v_0 \cos\alpha)t]\mathbf{i} + \left[y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j} \tag{12}$$

Perhitungan ketinggian dan range dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti pada seksi 3.2 dan 3.3 sehingga untuk posisi penembakan awal di (x_0, y_0), diperoleh ketinggian dan waktu yang diperlukan untuk mencapai ketinggian maksimum

$$y_{maks} = y_0 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \text{ dan } t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$



Gambar 3. Penembakan pada posisi (x_0, y_0)

2.6. Model Gerakan Peluru Dengan Hambatan Linier

Ketika peluru ditembakkan keudara, gaya yang bekerja berlawanan arah dengan kecepatan selain gaya gravitasi adalah gaya gesek udara. Gaya ini sebanding dengan kecepatan sedemikian hingga jika k kerapatan udara, v_0 kecepatan awal dan α sudut elevasi maka model yang terbentuk adalah:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\mathbf{j} - k\frac{dr}{dt}, \quad r_0 = 0 \text{ dan } \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j} \tag{13}$$

Persamaan (13) merupakan masalah nilai awal dari persamaan diferensial biasa orde-2 nonhomogen. Penyelesaian umum dari persamaan tersebut adalah

$$r(t) = c_1 + c_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t\mathbf{j}$$

dimana $\frac{dr}{dt} = -kc_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}$. Masukkan nilai awal kedalam 2 persamaan tersebut diperoleh $c_1 = -\left[\frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}\right]$ dan $c_2 = \left[\frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}\right]$, sehingga vektor posisi untuk model ini adalah:

$$r(t) = \frac{v_0}{k}\cos\alpha\left[1 - e^{-kt}\right]\mathbf{i} + \left\{\frac{v_0}{k}\sin\alpha\left[1 - e^{-kt}\right] + \frac{g}{k^2}\left[1 - kt - e^{-kt}\right]\right\}\mathbf{j} \tag{14}$$

Komponen horizontal dan komponen vertikal untuk vektor posisi yang diperoleh:

$$x = \frac{v_0}{k}\cos\alpha\left[1 - e^{-kt}\right]$$
$$y = \frac{v_0}{k}\sin\alpha\left[1 - e^{-kt}\right] + \frac{g}{k^2}\left[1 - kt - e^{-kt}\right] \tag{15}$$

2.6.1. Ketinggian Maksimum dan Waktu

Analog dengan seksi 3.2, ketinggian maksimum tercapai ketika kecepatan pada komponen vertikal bernilai nol.

$$y = \frac{v_0}{k}\sin\alpha\left[1 - e^{-kt}\right] + \frac{g}{k^2}\left[1 - kt - e^{-kt}\right]$$
$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow (v_0 \sin\alpha)e^{-kt} - \frac{g}{k} + \frac{g}{k}e^{-kt} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{kv_0\sin\alpha + g}{g}\right] \tag{16}$$

Jadi $t = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{kv_0\sin\alpha + g}{g}\right]$ adalah waktu yang diperlukan untuk mencapai ketinggian maksimum. Dengan nilai t tersebut, didapat ketinggian maksimum:

$$y_{maks} = \frac{v_0\cos\alpha}{k}\left[1 - \frac{g}{kv_0\sin\alpha + g}\right] + \frac{g}{k^2}\left[1 - \ln\left(\frac{kv_0\sin\alpha + g}{g}\right) - \frac{g}{kv_0\sin\alpha + g}\right] \tag{17}$$

Dapat dilihat dari hasil yang diperoleh pada persamaan (17) bahwa dengan memperhitungkan gaya gesek udara, formulasi untuk menghitung ketinggian maksimum menjadi tidak sederhana.

2.6.2. Jarak Maksimum (Range) dan Waktu

Jarak maksimum terjadi ketika komponen vertikal bernilai nol:

$$y = \frac{v_0}{k}\sin\alpha\left[1 - e^{-kt}\right] + \frac{g}{k^2}\left[1 - kt - e^{-kt}\right] = 0 \text{ atau } \left[\frac{v_0\sin\alpha}{g} + \frac{1}{k}\right]\left[1 - e^{-kt}\right] = t \tag{18}$$

Dengan menggunakan teknik perpotongan grafik ganda maka nilai t yang memberikan harga $y = 0$ adalah $t = 0$ dan $t = \left[\frac{v_0\sin\alpha}{g} + \frac{1}{k}\right]$. Karena $t = 0$ adalah waktu awal maka $t = \left[\frac{v_0\sin\alpha}{g} + \frac{1}{k}\right]$ merupakan waktu yang diperlukan peluru untuk mencapai jarak tembakan. Sehingga dengan memasukan nilai $t = \left[\frac{v_0\sin\alpha}{g} + \frac{1}{k}\right]$ ke komponen horizontal diperoleh: $x_{maks} = \frac{v_0\cos\alpha}{k}\left[1 - e^{-\left[\frac{kv_0\sin\alpha + g}{g}\right]}\right]$.

3. Kesimpulan

Gerakan peluru yang ideal bila ditembakan dengan kecepatan awal v_0 dan sudut elevasi α tanpa ada hambatan udara, akan berlaku formulasi:

Ketinggian maksimum = $\dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$ dengan waktu = $\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

Jarak Maksimum (Range) = $\dfrac{(v_0)^2 \sin 2\alpha}{g}$ dengan waktu = $\dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Untuk model dengan memperhitungkan hambatan udara perhitungannya menjadi
Ketinggian maksimum :

$$y_{maks} = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}\left[1 - \frac{g}{kv_0 \sin\alpha + g}\right] + \frac{g}{k^2}\left[1 - \ln\left(\frac{kv_0 \sin\alpha + g}{g}\right) - \frac{g}{kv_0 \sin\alpha + g}\right]$$

dengan waktu $t = \dfrac{1}{k}\ln\left[\dfrac{kv_0 \sin\alpha + g}{g}\right]$,

range $= \dfrac{v_0 \cos\alpha}{k}\left[1 - e^{-\left[\frac{kv_0 \sin\alpha + g}{g}\right]}\right]$, dan waktu $t = \left[\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} + \dfrac{1}{k}\right]$.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Bivens, Davis, 2002. *Calculus (Seventh Edition)*, John-Wiley and Sons, New York

[2] Finney, Weir, Giordano, 2001. *Thomas'Calculus (Tenth Edition)*, Addison-Wesley Longman, New York

[3] Richard Haberman, 1998. *Mathematical Models*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

[4] Wu Yong Hong, 2002. *Mathematical Modeling*, Curtin University Press, Perth.