Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 16 Nomor 1 2016, 31 – 38
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

RANCANG BANGUN BENTUK PIPA EVOLUTIF

(Design Of Evolutive Pipe Shape)

Kusno, Rusli Hidayat, Bagus Julianto
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, kusno.fmipa@unej.ac.id

Abstact: We formulate evolution tube defined by Bezier dan natural curve in three steps as the following. Firstly, calculating the parametric surfaces of Bezier and natural evolution tube defined by Serret Frenet frame is done. Secondly, we formulate parametric continuity for joining the tubes. Finally, the application of those formulas for modeling the tubes by using computer are simulated.

Keywords: Evolution tubes, Serret Frenet frame, continuity, joining the tubes.
MSC 2020: CIS- 298430

1. Pendahuluan

Rancang bangun bentuk pipa pada sistem aliran fluida/gas dapat dibangun dari keluarga tabung/silinder, torus dan sebagian dari potongan kerucut. Bentuk-bentuk ini terdefinisi dari formulasi matematis benda standar dalam penyajian implisit ataupun dapat berupa perumusan parametrik. Namun karena alasan untuk meningkatkan efisiensi proses dan kualitas hasil produksi, diperlukan selanjutnya komponen rangkaian pipa berbentuk hampir silinder, kapsul ataupun model tabung evolutif. *Kendalanya* adalah teknik desain sketsa/denah dan model *wireframe* yang saat ini sering digunakan untuk rancang bangun bentuk pipa, umumnya dapat menjawab aspek visualisasi model, tetapi untuk aspek fabrikasi benda aslinya, belum dapat memberikan ukuran benda secara pasti/optimal. Oleh sebab itu untuk perspektif pengembangan teknik konstruksi pemodelan bentuk-bentuk pipa ke depan, diperlukan studi *formulasi geometrik konstruksi bentuk pipa evolutif* guna dapatnya memodelisasi dan mendeteksi kepastian ukuran setiap bagian pipa/benda yang dikonstruksi/dibutuhkan.

Desain rancang bangun bentuk pipa banyak menggunakan teknik penggabungan beberapa potongan tabung/silinder maupun torus. Namun dalam kenyataannya, agar bagian interior/eksterior rangkaian pipa dapat halus dan memiliki kekuatan tekan atas gerakan fluida/gas, teknik desain yang diperkenalkan masih banyak berfokus pada bentuk pipa yang homogen (baik ketebalan ataupun penampangnya) tanpa memperhitungkan persoalan perlunya variasi panjang jari-jari tabung guna mendukung kekuatan pipa. Oleh sebab itu, untuk solusi masalah tersebut, diperlukan studi tentang penggabungan kontinyu dua pipa berdekatan.

Di lain pihak, dalam pengembangan industri berbasis rangkaian aliran fluida/gas, diperlukan teknik desain rancang bangun bentuk pipa yang mampu melakukan efisiensi dan efektifitas sistem produksi dan kontrol penggunaan (volume) fluida saat proses fabrikasi. Oleh karena itu lebih lanjut, diperlukan tidak hanya studi tentang teknik hitung sistem pengaturan ruang fabrikasi, tetapi juga dalam hal hitung kontrol output fluida sesuai dengan yang diinginkan maupun untuk perhitungan konservasi volume benda (dalam kasus benda padat diperkenalkan oleh Aumann [1]). Mengingat permasalahan-permasalahan desain rancang bangun bentuk pipa pada sistem aliran fluida/gas tersebut, dalam paper ini dibahas beberapa teknik desain bentuk pipa evolutif jari-jari homogen beserta hitung kekontinyuannya.

2. Hasil Dan Pembahasan

Kurva Bezier parametrik derajat n dinyatakan dalam bentuk ([3],[4]):

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \, \mathrm{B}_i^n(u) \quad \text{dan } 0 \le u \le 1 \tag{1a}$$

dengan $\mathrm{B}_i^n(u) = C_i^n (1-u)^{n-i}.u^i$ dan $C_i^n = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Dalam persamaan (1), titik-titik $\mathbf{P}_i$ disebut **koefisien geometrik atau titik kontrol** kurva $\mathbf{C}(u)$. Dalam hal kurva Bezier berbentuk kubik maka derivasi kurva terhadap variabel parameter u dapat diuraikan sebagai berikut

$$\mathbf{C}_3(u) = \mathbf{P}_0 (1-u)^3 + 3\,\mathbf{P}_1 (1-u)^2.u + 3\,\mathbf{P}_2 (1-u).u^2 + \mathbf{P}_3 u^3 \tag{1b}$$

$$\mathbf{C}_3'(u) = \mathbf{P} = 3\,(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)(1-u)^2 + 2\,(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)(1-u).u + 3\,(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).u^2 \tag{1c}$$

$$\mathbf{C}_3''(u) = \mathbf{Q} = 6\,[\,(\mathbf{P}_2 - 2\,\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0).(1-u) + (\mathbf{P}_3 - 2\,\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1).u]. \tag{1d}$$

Oleh sebab itu jika dari bentuk (1c) notasi P_x, P_y, dan P_z masing-masing merupakan komponen skalar untuk vektor basis **i** , **j** dan **k** dari vektor singgung kurva $\mathbf{C}(u)$, maka dapat diperoleh bentuk vektor singgung satuan kurva dari bentuk Serret Frenet sebagai berikut ([5],[6]):

$$\mathbf{T}(u) = \mathbf{C}'(u) = \frac{< P_x(u), P_y(u), P_z(u) >}{s} \tag{2}$$

dengan $s = (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^{1/2}$. Penyajian vektor normal dari kurva diperoleh

$$\mathbf{N}(\mathrm{u}) = \mathbf{C}''(u) = \frac{< Q_x.s - P_x.s', Q_y.s - P_y.s', Q_z.s - P_z.s' >}{s^2}. \tag{3}$$

Dengan demikian vektor binormal $\mathbf{B}(u)$ dari kurva $\mathbf{C}(u)$ dapat ditentukan melalui perhitungan

$$\mathbf{B}(u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x / s & P_y / s & P_z / s \\ \dfrac{Q_x.s - P_x.s'}{s^2} & \dfrac{Q_y.s - P_y.s'}{s^2} & \dfrac{Q_z.s - P_z.s'}{s^2} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Berdasarkan teknik hitung penyajian bentuk trihedron kurva Bezier kubik dalam formula

(2), (3), dan (4) maupun untuk penyajian kurva natural, selanjutnya dapat dilakukan **evaluasi konstruksi tabung** evolutif dari beberapa jenis derajat kurva dan tipe pipa berikut.

Hitung Tabung Evolutif Jari-jari Homogen

Andaikan kurva Bezier Kuadratik

$$\mathbf{C}_2(u) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}_i \, B_i^2(u) \quad \text{dan } 0 \le u \le 1,$$

maka diperoleh:

1) Turunan pertama Bezier Kuadratik

$$P_x = 2((P_{1x} - P_{0x}).(1-u) + (P_{2x} - P_{1x}).u);$$
$$P_y = 2((P_{1y} - P_{0y}).(1-u) + (P_{2y} - P_{1y}).u);$$
$$P_z = 2((P_{1z} - P_{0z}).(1-u) + (P_{2z} - P_{1z}).u);$$

2) Vektor satuan singgung **t** dari kurva Bezier Kuadratik:

$$t_x = Px/(P_x . P_x + P_y . P_y + P_z . P_z)^{1/2};$$
$$t_y = Py/(P_x . P_x + P_y . P_y + P_z . P_z)^{1/2};$$
$$t_z = Pz/(P_x . P_x + P_y . P_y + P_z . P_z)^{1/2};$$

3) Vektor normal **N** ditentukan sebagai:

$$r = (P_x.P_x + P_y.P_y + P_z.P_z)^{1/2};$$
$$r_1 = 0.5.(2.Px.2.(P_{2x} - 2P_{1x} + P_{0x}) + 2.Py.\,2.(P_{2y} - 2P_{1y} + P_{0y}) + 2.Pz.\,2.(P_{2z} - 2P_{1z} + P_{0z}))/r;$$
$$n_x = (2.(P_{2x} - 2P_{1x} + P_{0x}).r - r_1.P_x)/r^2;$$
$$n_y = (2.(P_{2y} - 2P_{1y} + P_{0y}).r - r_1.P_y)/r^2;$$
$$n_z = (2.(P_{2z} - 2P_{1z} + P_{0z}).r - r_1.P_z)/r^2;$$

4) Vektor Binormal **B** dan panjang dari vektor **N** dan **B** dari kurva Bezier Kuadratik:

$$b_x = -(t_y . n_z - n_y . t_z);$$
$$b_y = -(n_x . t_z - t_x . n_z);$$
$$b_z = -(t_x . n_y - n_x . t_y);$$
$$P_N = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}; \qquad P_B = (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)^{1/2}.$$

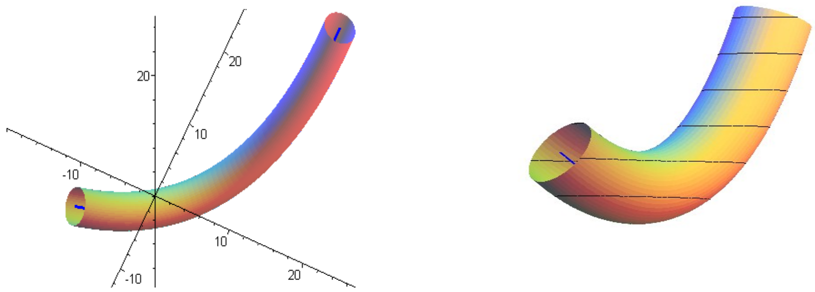
Dengan demikian tabung evolutif dari pembangkit kurva kuadratik jari-jari r dapat dirumuskan sebagai:

$$\mathbf{T}_2(u,v) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}_i \, B_i^2(u) + r.((\mathbf{N}/P_N).\cos(v) + (\mathbf{B}/P_B).\sin(v)) \tag{5}$$

dengan $0 \le u \le 1$ dan $0 \le v \le 2\pi$. Dalam kasus ini jari-jari tabung r dipilih konstan. Jika titik-titik kontrol Bezier dipilih

$$P_{0x} = -12\,; \quad P_{1x} = 2; \quad P_{2x} = 10;$$
$$P_{0y} = 0\,; \quad P_{1y} = -2; \quad P_{2y} = 5;$$
$$P_{0z} = 9\,; \quad P_{1z} = -12; \quad P_{2z} = 10,$$

maka hasilnya seperti disajikan dalam Gambar 1.

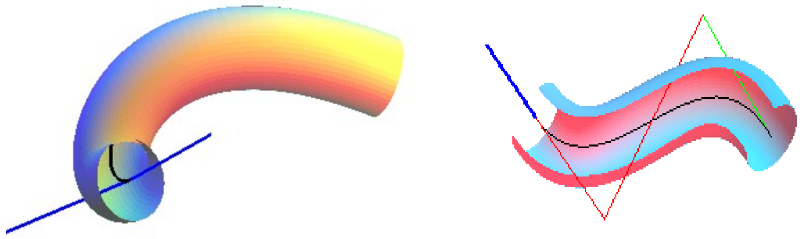


Gambar 1. Tabung evolutif dari kurva bezier kuadratik jari-jari konstan

Untuk kurva Bezier derajat n dengan vektor-vektor normal dan binormalnya masing-masing adalah **N** dan **B**, maka bentuk (5) dapat diperumum menjadi

$$\mathbf{T}_{n}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \; B_i^n(u) \; + r.(\mathbf{N}/P_{N}).\cos(v)+(\mathbf{B}/P_{B}).\sin(v)). \qquad (6)$$

Dengan mengambil harga n = 3 untuk persamaan (6), yaitu kurva Bezier kubik, contoh hasilnya dapat dilihat dalam Gambar 2 berikut.



a) b)

Gambar 2. Tabung evolutif dari kurva bezier kubik

Kontruksi Tabung Evolutif Model Pilin/Puntir

Dalam kontruksi tabung evolutif model pilin/puntir, dapat dilakukan dengan pendekatan aproksimasi dan eksak. Pendekatan pertama dilakukan melalui penentuan titik-titik kontrol sepanjang sekitar kurva pusat tabung yang bentuknya pilin/puntir. Pendekatan kedua dilakukan dengan hitung eksak yaitu menggunakan formula natural dari heliks dan torus serta gabungannya. Hitung tabung evolutif untuk heliks terformulasi sebagai berikut . Andaikan kurva heliks

$$\mathbf{C}_{H}(u) = < p.\cos(u), p.\sin(u), q.u>$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan skalar-skalar vektor singgung satuan serta normalnya adalah

$$H_x = -p.\sin(u)/s; \quad H_y = p.\cos(u)/s; \quad H_z = q/s;$$
$$K_x = p.\cos(u)/s; \quad K_y = p.\sin(u)/s; \quad K_z = 0;$$

dengan s =$(p^2 + q^2)^{1/2}$, maka didapat skalar untuk vektor binormalnya berupa

$$b_x = -(H_y.K_z - K_y.H_z);$$
$$b_y = -(K_x.H_z - H_x.K_z);$$
$$b_z = -(H_x.K_y - K_x.H_y);$$

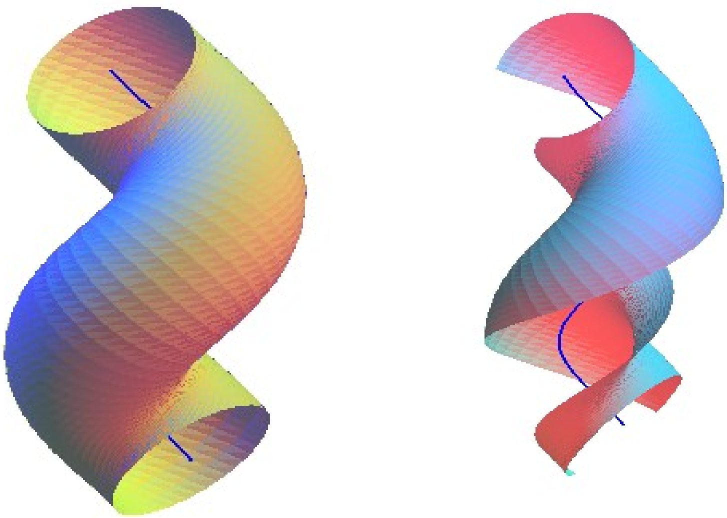
dan panjang vektor normal dan binormal sebagai:

$$H_n = (K_x.K_x + K_y.K_y + K_z.K_z)^{1/2}$$
$$H_b = (b_x.b_x + b_y.b_y + b_z.b_z)^{1/2}.$$

Oleh karena itu formula untuk tabung pilin yang terkonstruksi dari kurva heliks dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_L(u,v) := <\ & p.\cos(u) + r.(((1/H_n).K_x).\cos(v) + ((1/H_b).b_x).\sin(v)), \\ & p.\sin(u) + r.(((1/H_n).K_y).\cos(v) + ((1/H_b).b_y).\sin(v)), \\ & q.u \quad + r.(((1/H_n).K_z).\cos(v) + ((1/H_b).b_z).\sin(v))> \end{aligned} \tag{7}$$

dengan $0 \le u \le 1$ dan $0 \le v \le 2\pi$. Dengan mengambil harga p dan q bernilai 3, didapat bentuk seperti terlihat pada Gambar 3.



a) b)

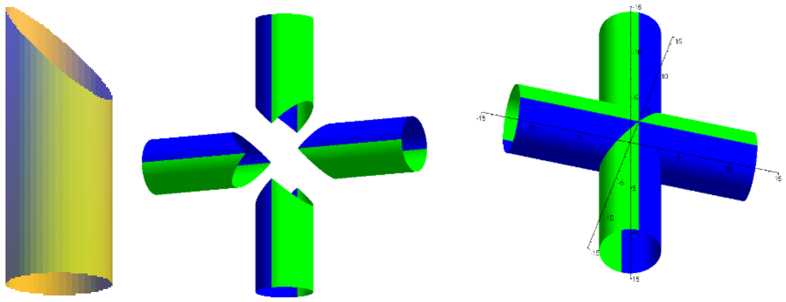
Gambar 3. Tabung evolutif pilin dari kurva heliks

Kondisi Kontinyu Penggabungan Dua Tabung Evolutif

Pada bagian ini, kita evaluasi beberapa penggabungan antara dua tabung (lurus), tabung dengan tabung evolutif dan penggabungan antar dua tabung evolutif. Uraian detailnya sebagai berikut. Andaikan suatu vektor satuan **E** dan dua vektor satuan **N** dan **B** yang masing-masing tegak lurus pada vector **E**. Maka dapat dirumuskan suatu tabung terpancung dengan jari-jari lingkaran alas r, berketinggian a dan pemilihan parameter sudut pancungan $\theta \le 0{,}5\,\pi$ dalam bentuk interpolasi linier u pada interval $0 \le u \le 1$ dan $0 \le v \le 2\pi$ berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_L(u,v) = r.[& u.\{\cos v\,.\,\mathbf{N} + \sin v\,.\,\mathbf{B}\} + \\ & (1-u).\{(a + \sin\theta)\,.\,\mathbf{E} + \mathbf{N}).\cos v + \sin v\,.\,\mathbf{B}\}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Jika dipilih $\theta = 0.5\,\pi$, $a = 4$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$, maka akan diperoleh bentuk seperti terlihat pada Gambar 4a. Dengan memilih titik pusat penyabungan, beberapa komposisi pasangan harga θ, a, dan v yang sesuai untuk membentuk model tabung terpancung, maka penyambungan tabung dapat dilaksanakan baik untuk penyambungan pertemuan 3 tabung ataupun 4 tabung (seperti dalam Gambar 4b,c).



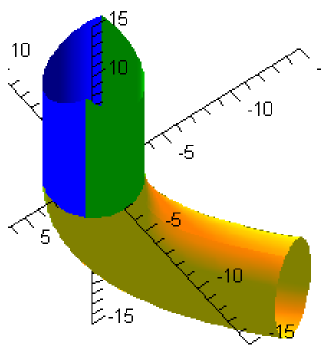
a) b) c)

Gambar 4. Penyambungan antar tabung lurus

Dalam hal penyambungan 2 tabung yang berupa tabung lurus bentuk persamaan (8) dengan tabung Bezier persamaan (6), maka kondisi kontinyu penyambungan yang harus dipenuhi adalah([2],[4]):

a) pusat lingkaran $\mathbf{T}_L(1,v)$ dan $\mathbf{T}_n(0,v)$ untuk $0 \leq v \leq 2\pi$ sama
b) panjang jari-jari pada masing-masing tabung di $\mathbf{T}_L(1,v)$ dan $\mathbf{T}_n(0,v)$ sama
c) arah vektor satuan $\mathbf{E}$ dari tabung $\mathbf{T}_L(u,v)$ searah dengan $\mathbf{T}_n{}'(0,v)$.

Dalam Gambar 5 diperlihatkan gabungan antara tabung lurus dengan tabung evolutif Bezier.



Gambar 6. Penyambungan antara tabung lurus dan evolutif bergelembung

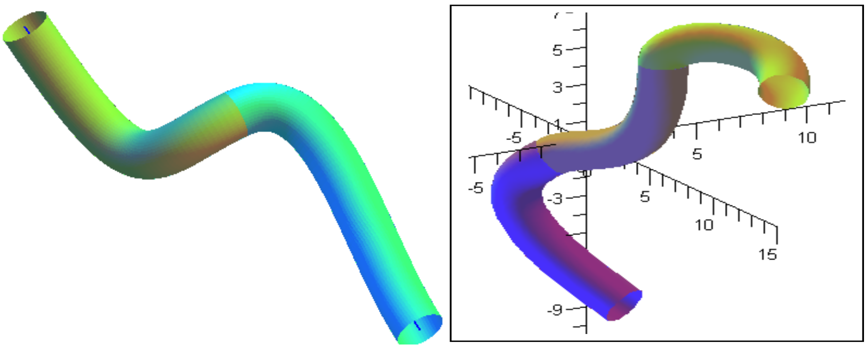
Andaikan 2 (dua) tabung Bezier berderajat sama dari persamaan (6), yaitu $\mathbf{T}_{n\_1}(u,v)$ dan $\mathbf{T}_{n\_2}(u,v)$, maka untuk mendapatkan kontinyu penyambungan order satu sepanjang $0 \leq v \leq 2\pi$ harus dipenuhi:

a) pusat lingkaran $\mathbf{T}_{n\_1}(1,v)$ dan $\mathbf{T}_{n\_2}(0,v)$ untuk $0 \leq v \leq 2\pi$ sama;

b) panjang jari-jari tabung di $\mathbf{T}_{n\_1}(1,v)$ dan $\mathbf{T}_{n\_2}(0,v)$ sama.

c) turunan pertama terhadap parameter u memenuhi $\mathbf{T}_{n\_1}{}^{u}(1,v) = \mathbf{T}_{n\_2}{}^{u}(0,v)$, yaitu vektor: $(\mathbf{P}_{n\_1,\,n} - \mathbf{P}_{n\_1,\,n-1}) = (\mathbf{P}_{n\_2,\,1} - \mathbf{P}_{n\_2,\,0})$.

Contoh dari hasil penyambungan dua tabung evolutif Bezier menurut kondisi tersebut diperlihatkan seperti dalam Gambar 7.



a) b)

Gambar 7. Penyambungan antara dua tabung evoluti Bezier

3. Kesimpulan

Dari uraian di bagian pembahasan dan penerapan programasi untuk tabung evolutif, dapat disimpulkan sebagai berikut:

a. beragam bentuk pipa evolutif dapat didesain melalui kontrol bentuk kurva pusat pipa.
b. rangkaian pipa evolutif kontinyu order satu dapat dibangun melalui penggabungan beberapa barisan potongan pipa dimaksud dengan syarat, pertama, gabungan kurva pusatnya secara berurutan kontinyu dan jari-jari pipa di masing-masing titik sambungannya berukuran sama.

Ucapan Terima Kasih

Tim Peneliti mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu terlaksananya kegiatan penelitian Fundamental khususnya kepada institusi DP2M Dikti yang telah memberikan dukungan dana dengan kontrak kerja tahun anggaran 2008.

Daftar Pustaka

[1] Aumann, G., (1992). Two Algorithms for Volume-preserving Approximations of Surfaces of Revolution, *Computer Aided Design,* Volume 24 (P. 649-657).

[2] Du, W.H., Schmitt, F.J.M., (1990). On the G^1 Continuity of Piecewise Bezier Surfaces: a Review with New Results. *Computer Aided Design,*, Volume 22, No.9 (P.556-571).

[3] Kusno, Hidayat R., Julianto, B. (2008). Studi Geometri Rancang Bangun Bentuk Pipa Evolutif Bahan Besi, Gelas dan Plastik (Laporan Penelitian Hibah Fundamental). Lemlit UNEJ.

[4] Kusno, (2010). Geometri Rancang Bangun (Studi tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer). Jember University Press, Universitas Jember.

[5] Leon, J.C. (1991). Modelisation et Construction de Surfaces pour la CFAO. Hermes, Paris-France.

[6] Lipcchutz, M.M. --. Theory and Problems of Differential Geometry, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.