

PROFIL PERSAMAAN GELOMBANG DENGAN VARIASI SYARAT BATAS (Profile of Wave Equation Using Boundary Condition)

Mokhamad Akhsan, Rusli Hidayat, Agustina Pradjaningsih

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121, Indonesia
Email:agustina.fmipa@unej.ac.id

Abstract. The wave equation is one of hyperbolic equation forms which its solution can be solved by various methods, such as Alembert and series approximation methods. Basically, the Alembert method is a coordinate transfer technique and the series approximation method is the classical separation of variable. Performance of the wave equation can be known by both of the methods with the variation of boundary conditions. The results show that both of the methods gave some equalities or differences of the profile. The different values of the velocity c 's will have the same performance of the wave equation in the case of Dirichlet and Von Neumann boundary conditions. Calculating the profiles with a discrete version of the solution and showing some profiles at various times have been done resulting oscillation wave and moving wave.

Keywords: Wave equation, Boundary condition, Alembert method, Series Approximation method.

MSC 2020: 35L05

1. Pendahuluan

Persamaan gelombang adalah contoh klasik dari persamaan hiperbolik yang merupakan salah satu kelas dalam persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut dapat juga dikatakan sebagai persamaan Newton tentang gerak yang diaplikasikan pada senar yang menyatakan perubahan momentum $m.u_{tt}$ suatu segmen kecil dari senar sama dengan total gaya yang bekerja ([4], [8] & [9]). Secara matematis persamaan gelombang tersebut ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = f, \quad (x,t) \in (0,1) \times R \quad (1)$$

Dalam hal $f = 0$ persamaan (1) dapat direduksi menjadi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (2)$$

Karena kedua persamaan diatas merupakan persamaan diferensial parsial orde dua dengan turunan terhadap t (waktu); u_{tt} , hal ini memerlukan dua syarat awal yaitu

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq 1 \text{ (posisi dan kecepatan awal dari senar).} \quad (3)$$

Selanjutnya syarat batas diperoleh dengan mengikat kedua ujung senar pada titik tetap $x = 0$ & $x = 1$, sehingga senar tidak bergetar pada kedua ujungnya yang dinyatakan dengan

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 ; t \geq 0 \quad (4)$$

Untuk model persamaan gelombang (1) & (2) dengan syarat awal dan syarat batas seperti yang dinyatakan oleh persamaan (3) & (4), telah dikembangkan beberapa teknik solusi analitiknya, seperti metode pemisahan peubah dan teknik dengan memperkenalkan koordinat baru (transformasi kedalam koordinat kanonik) ditemukan suatu solusi persamaan gelombang yang disebut sebagai solusi Alembert ([3], [5] & [7]).

Pada penelitian ini kami ingin mengetahui bagaimana profil solusi persamaan gelombang dengan metode Alembert ataupun metode aproksimasi deret yang diberi variasi syarat batas Dirichlet atau syarat batas Von Neumann. Manfaat yang diharapkan yaitu menambah pemahaman tentang persamaan gelombang, khususnya dalam kegunaannya di bidang maritim/kelautan, meteorologi dan geofisika, bidang kedokteran, fisika matematika dan bidang teknologi lainnya.

Persamaan Gelombang Dimensi-1 (1D – Wave Equation)

Persamaan gelombang dimensi-1 dengan gaya internal diberikan oleh persamaan (1) dan tanpa gaya internal oleh persamaan (2) dengan syarat awal (3) dan syarat batas (4) ([3], [4], [5], [7], [8] & [9]). Secara umum dituliskan sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right\} -\infty < x < \infty, \\ u(0,t) &= 0, u(L,t) = 0 ; t \geq 0$$

Solusi Alembert

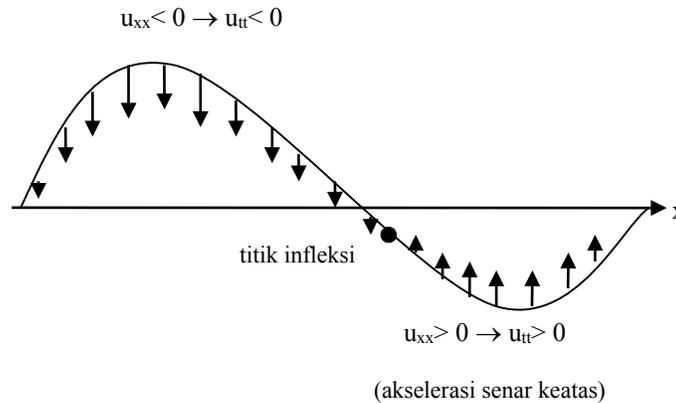
Solusi Alembert dilakukan dalam 4 langkah berikut:

- 1). Mengganti (x,t) dengan koordinat kanonik yang baru (ξ,η) dimana $\xi = x + ct$ dan $\eta = x - ct$ sehingga masalah diatas ditransformasi menjadi $u_{\xi\eta} = 0$.

- 2). Menyelesaikan persamaan yang telah ditransformasi.
- 3).Melakukan transformasi balik penyelesaian yang ditemukan di langkah-2 ke-koordinat asal x dan t dan langkah terakhir
- 4) adalah mensubstitusikan syarat awal dan syarat batasnya ([6], [11] & [13])

Interpretasi Persamaan Gelombang

Ekspresi u_{tt} pada persamaan gelombang yang dinyatakan oleh (1) & (2) merupakan akselerasi vertikal dari senar pada suatu titik x . Jadi persamaan (2) dapat diinterpretasikan sebagai akselerasi senar pada setiap titik yang diakibatkan oleh adanya tekanan pada senar u_{xx} ([5], [7] & [8]), seperti yang diilustrasikan oleh gambar 1 berikut



Gambar 1. interpretasi persamaan $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

Masalah Nilai Awal (Initial Value Problem)

Solusi dari persamaan $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$ dengan nilai awal

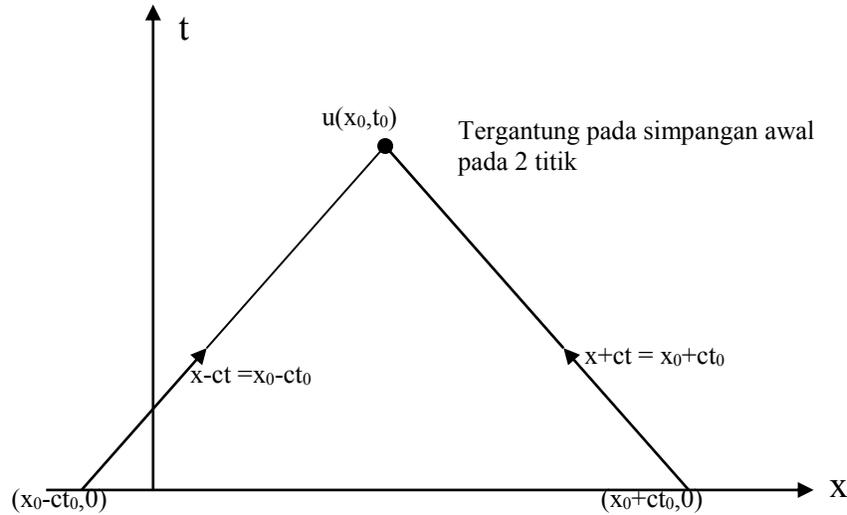
$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right\} -\infty < x < \infty, \text{ diberikan oleh persamaan berikut ([1],[7] \& [8])}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \quad (5)$$

Simpangan Awal Diberikan dan Kecepatan Awal Nol

Bila simpangan awal diberikan dan kecepatan awalnya nol maka masalah nilai awalnya menjadi $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$ dengan solusi ([1], [2], [7] & [8])

$u(x,t) = \frac{1}{2} \{f(x+ct) + f(x-ct)\}$ Solusi u pada titik (x_0, t_0) merupakan rata-rata $f(x)$ pada titik $(x_0 - ct_0)$ dan $(x_0 + ct_0)$ sepanjang garis seperti terlihat pada gambar 2.



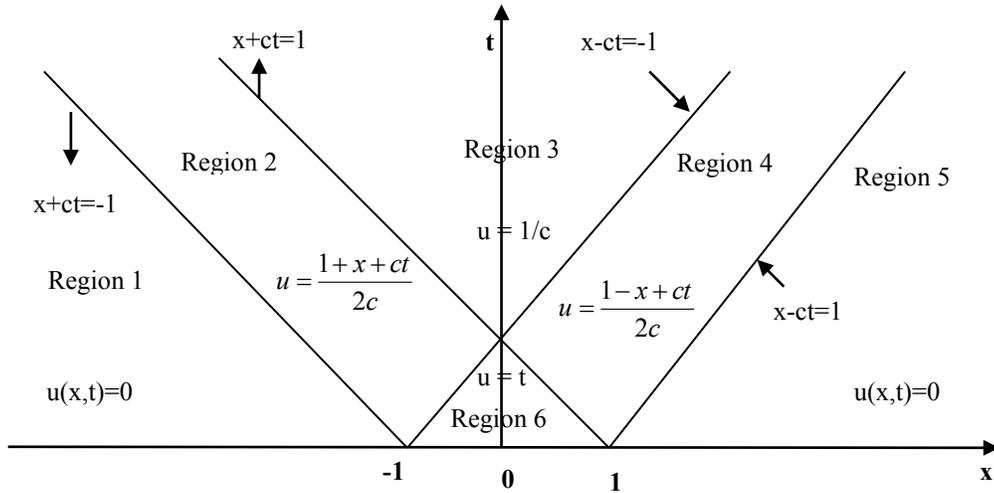
Gambar 2. $u(x,t) = \frac{1}{2} \{f(x+ct) + f(x-ct)\}$ pada bidang- xt

Simpangan awal Nol dan Kecepatan Awal Diberikan

Bila simpangan awalnya nol dan kecepatan awal diberikan maka masalah nilai awalnya dinyatakan oleh $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = g(x)$ dengan solusi ([1], [2], [7] & [8]) dengan solusi

$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$. Misalkan masalah nilai awal dinyatakan oleh fungsi berikut

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$ dengan syarat awalnya $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ untuk $-1 < x < 1$ dan $u_t(x,0) = 0$ untuk yang lainnya maka plot dari solusinya seperti yang terlihat pada Gambar 3.



Gambar 3. plot solusi dari simpangan awal nol

sehingga solusi dari masalah persamaan gelombang dengan metode Alembert adalah

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi .$$

Approksimasi deret

Solusi persamaan gelombang dengan aproksimasi deret dilakukan dengan :

Langkah 1 : Memisahkan variabel x dan t untuk menentukan solusi umum,

Langkah 2 : Menentukan solusi yang memenuhi syarat batas.

Langkah 3 : Menentukan nilai-nilai a_n dan b_n dari kondisi syarat awal.

Langkah 4 : Mensubstitusikan nilai-nilai a_n dan b_n kedalam solusi yang memenuhi syarat batas , sehingga diperoleh solusi persamaan gelombang sebagai berikut

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \left(a_n \cos \frac{cn\pi}{L} t + b_n \sin \frac{cn\pi}{L} t \right)$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

dan persamaan diatas disebut Solusi Aproksimasi Deret, ([2]).

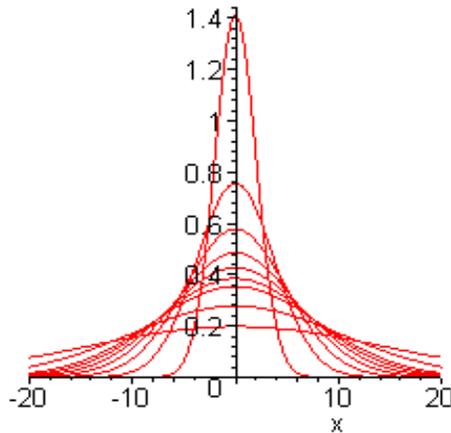
2. Hasil dan Pembahasan

2.1. Evolusi Gelombang

Persamaan translasi orde satu dinyatakan oleh persamaan (6) berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

dengan solusi $u(x,t) = f(x-ct)$. Solusi ini merupakan profil gelombang berjalan yang ditranslasi dengan kecepatan c sepanjang sumbu- x (dengan arah positif untuk $c > 0$ dan arah negative untuk $c < 0$). Misalkan kita gunakan suatu solusi yang berbentuk gelombang harmonik $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ yang mempunyai bilangan gelombang k , frekwensi ω , periode T dan panjang gelombang λ , dimana $k = 2\pi/\lambda$ dan $\omega = 2\pi/T$. Kecepatan c diperoleh dengan mensubstitusikan solusi harmonic kepersamaan (6); $c = \omega/k$. Selanjutnya bila kita investigasi pengaruh $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pada $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ akan diperoleh solusi $u(x,t) = e^{ik(x-ct)} e^{-vk^2 t}$ yang akan meluruh dengan rata-rata $-vk^2$ yang bergantung pada bilangan gelombang k . Proses evolusi peluruhan ini disebut dengan dissipasi (lihat gambar 4.)



Gambar 4. Evolusi gelombang harmonik

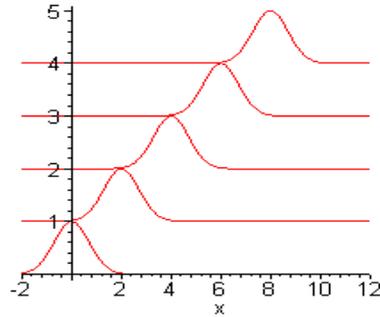
2.2. Gelombang Bergerak (Moving Wave)

Suatu fungsi yang secara umum berbentuk

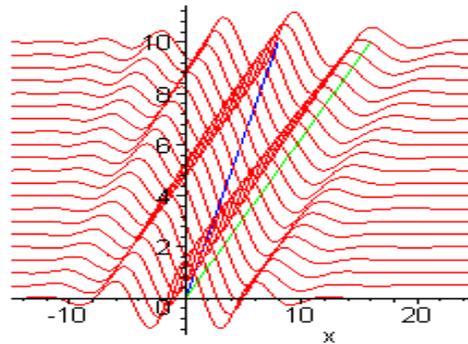
$$u(x,t) = \psi(x+ct) + \phi(x-ct) \quad (7)$$

merupakan persamaan gelombang bergerak dengan gerakan dua arah ([7] & [12]). Jadi secara fisik bila $u(x,t) = \sin(x-ct)$ gelombang bergerak kekanan dan $u(x,t) = (x+ct)^2$ gelombang

bergerak kekiri maka $u(x, t) = \sin(x - ct) + (x + ct)^2$ adalah gelombang yang bergerak kekedua arah (kekiri dan kekanan). Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar 5. dan 6. dibawah ini



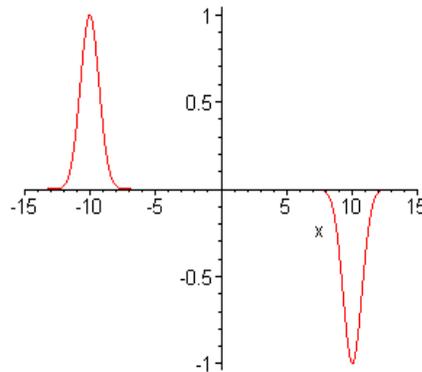
Gambar 5. gelombang bergerak kekanan



Gambar 6. gelombang bergerak kekiri & kekanan

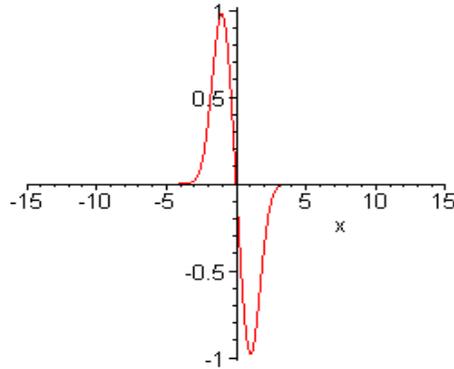
2.3. Profil Solusi Alembert Dengan Syarat Batas Dirichlet

Solusi persamaan gelombang menggunakan metode Alembert dengan syarat batas Dirichlet pada sebarang syarat awal yang diberikan, misal dengan mengambil $f(x) = \exp - (x)^2$, $c = 1$ dan panjang selang $[-15, 15]$ diperoleh profil sebagai berikut,

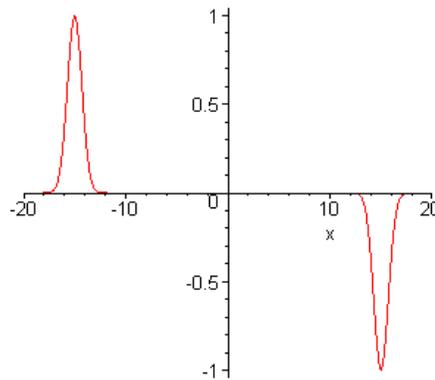


Gambar 7. Profil dengan $c = 1$

Simpangan maksimum terjadi pada saat $t > 1$ yaitu pada $x = -10$ dimana kurvanya berada di atas sumbu- x dan $x = 10$ kurvanya berada di bawah sumbu- x . Jika dilihat dari gerak animasinya, gelombang yang berada di atas sumbu- x bergerak ke kanan, selanjutnya gelombang yang berada di bawah sumbu- x bergerak ke kiri. Kemudian gelombang yang dari sumbu- x negatif saat berada pada posisi di sumbu- x positif ketika melewati batas selang yang diberikan maka akan berubah berada pada posisi di bawah sumbu- x . Demikian juga sebaliknya. Di bawah ini diberikan plot untuk nilai c berbeda.

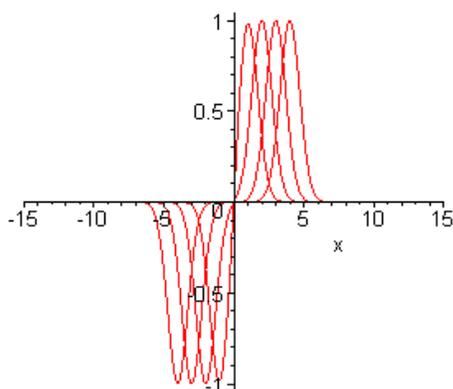


Gambar 8. Profil dengan $c = 0,1$



Gambar 9. Profil dengan $c = 1,5$

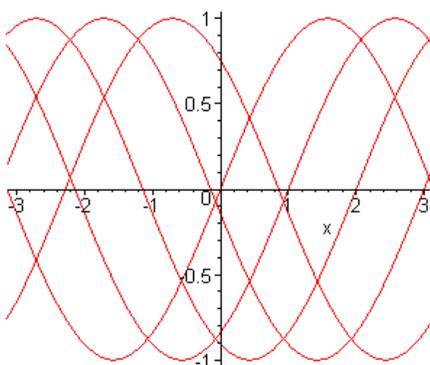
Gelombang diatas dapat juga dilihat dengan cara lain yaitu dengan melihat profilnya untuk waktu yang berbeda dalam satu plot (Gambar 10).



Gambar 10. Pergerakan gelombang dengan $c = 1$

2.4. Profil Solusi Alembert Dengan Syarat Batas Neumann

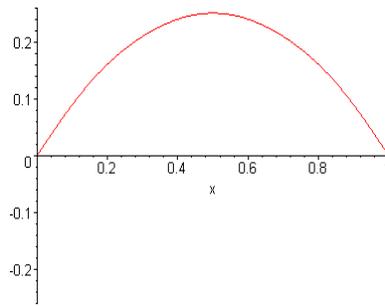
Gerakan gelombang dengan syarat batas Neumann diberikan oleh gambar 11 dengan $f(x)=\sin(x)$ dan nilai $c = 1$.



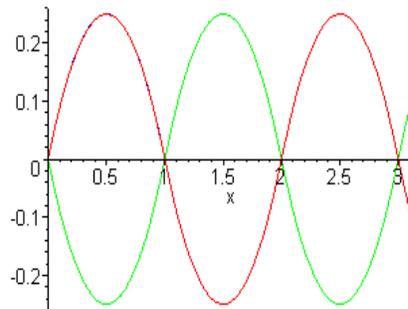
Gambar 11. Profil gelombang dengan syarat batas Neumann

2.5. Profil Solusi Dengan Aproksimasi Deret

Aproksimasi deret pada selang $[0,1]$ dengan syarat batas Dirichlet pada $x = 0$ dan $x = 1$, dengan syarat awal $f(x)=x(1-x)$ dan $g(x)=0$ menghasilkan profil berikut.

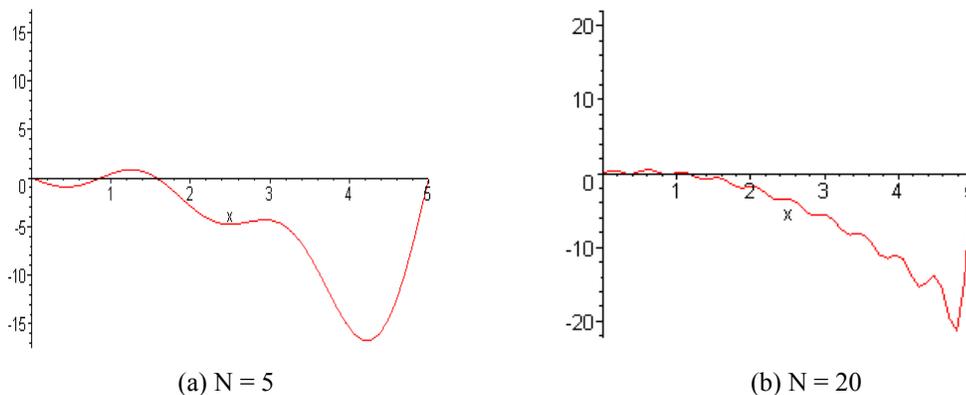


Gambar 12. Profil dengan syarat awal $f(x)=x(1-x)$ dan $g(x)=0$



Gambar 13. Gelombang periodik selang $[0,3]$

Profil persamaan gelombang di atas menunjukkan bahwa simpangan maksimum atau amplitudo dihasilkan pada saat $t > 0,2$ dan ini berlaku untuk semua nilai N yang diberikan pada selang $[0,1]$. Kemudian jika dilihat pada selang yang lebih panjang misal $x = 0$ sampai $x = 3$ diperoleh bentuk grafik periodik seperti gambar 13. Gambar tersebut menunjukkan bahwa terjadi gerak periodik, oleh karena setiap gerak periodik dapat dinyatakan sebagai superposisi atas gerak sederhana maka biasanya memudahkan untuk menganalisis suatu gerak periodik sembarang dengan memakai dalil Fourier. Gelombang diatas dapat juga dilihat dengan cara lain yaitu dengan mem-plot profilnya pada waktu yang berbeda. Gambar 14 adalah profil perubahan waktu pada syarat batas Dirichlet di $x = 0$ dan $x = 5$ dengan aproksimasi deret yang berbeda..



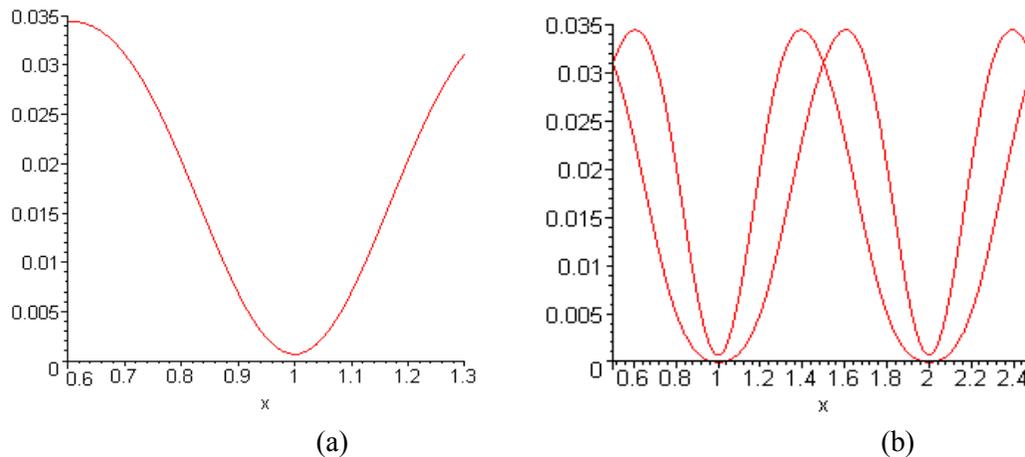
(a) $N = 5$

(b) $N = 20$

Gambar 14. Profil dengan selang $[0,5]$

Dari kalkulasi profil di atas menunjukkan bahwa amplitudo maksimum terjadi pada saat $t > 15$ seperti yang terlihat pada gambar 14 (b). Dari profil tersebut terlihat bahwa getaran senar pada selang $[0,1]$ dengan syarat batas Dirichlet dari $x = 0$ dan $x = 1$ memiliki amplitudo maksimum di atas sumbu- x , juga untuk selang $[0,5]$ dan $[0,10]$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa panjang senar berpengaruh terhadap simpangan dari suatu getaran senar. Semakin panjang senar yang digetarkan semakin besar simpangan yang dihasilkan, demikian juga sebaliknya.

Profil gelombang dengan metode aproksimasi deret pada selang $[0,1]$ dengan syarat batas Neumann dan syarat awal $f(x)=x^3(1-x)^2$ serta $g(x)=0$ diperoleh grafik seperti di bawah ini



Gambar 15. Syarat batas Neumann

Profil pada Gambar 15 (a) menghasilkan amplitudo maksimum pada saat $t = 0,035$ dan ini berlaku untuk nilai $N = 5$. Jika ditinjau dari gerak animasinya berbeda dengan yang menggunakan syarat batas Dirichlet, karena pada kasus ini kedua ujung senar ikut digetarkan sesuai dengan fungsi syarat batas yang diberikan. Profil untuk waktu yang berbeda dengan syarat batas Neumann dapat dilihat pada gambar 15 (b).

3. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan sebagai berikut. Profil gelombang dengan metode Alembert mempunyai karakter yang berbeda jika nilai kecepatan c -nya diubah baik pada syarat batas Dirichlet ataupun Neumann. Sementara profil gelombangnya untuk syarat batas Dirichlet mengalami perubahan fasa, sedangkan pada syarat batas Neumann tidak mengalami perubahan fasa. Profil gelombang dengan syarat batas Dirichlet bergerak searah sumbu- y , sedangkan untuk syarat batas Neumann gelombangnya bergerak kekanan searah dengan sumbu- x . Profil

gelombang dengan metode Alembert merupakan jenis dari gelombang berjalan, sedangkan pada metode aproksimasi deret merupakan gelombang periodik.

Daftar Pustaka

- [1] A. David Snider. (1999), *Partial Differential Equations Sources and Solutions*, Simon & Schuster.
- [2] A. Pipes Louis dan R. Harvill Lawrence. (1991), *Matematika Terapan untuk para Insinyur dan Fisikawan*, Jilid 1, Edisi ketiga, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.
- [3] Bassanini, P. & Elcrat, A.R. (1997) *Theory and Applications of Partial Differential equation*, Plenum Press.
- [4] DiBeneditto E. (1995) *Partial Differential Equations*, Birkh.
- [5] DuChateau P. & Zachmann D. (1989) *Applied Partial Differential Equations*, Harper & Row Publisher, Inc.
- [6] Duffy D.G. (1994) *Transform methods for Solving Partial Differential Equations*, CRC Press, Inc.
- [7] Farlow S.J. (1982) *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*, John Wiley & Sons.
- [8] Fritz. J. (1978) *Applied Mathematical Sciences 1: Partial Differential Equations (3rd Edition)*, Springer-Verlag.
- [9] Gribben R.J. (1975) *Elementary Partial Differential Equations*, Van Nostrand Reinhold Company.
- [10] Guest, P.B. (1991) *Laplace Transforms and An Introduction to Distributions*, Ellis Horwood Limited.
- [11] Kevorkian J. (1993) *Partial Differential Equations; Analytical Solution Techniques*, Chapman & Hall.
- [12] Myint-U T. (1973) *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, American Elsevier Publishing Company, Inc..
- [13] Zauderer E. (1989) *Partial Differential Equations of Applied Mathematics 2nd Edition*, John Wiley & Sons.