

# LIMIT CYCLE PERSAMAAN VAN DER POL DAN PERSAMAAN DUFFING

(Limit Cycle Equation Van Der Pol and Duffing Equation)

Yuan Ursulasari dan Moh. Hasan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember  
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121, Indonesia  
Email: [hasan.fmipa@unej.ac.id](mailto:hasan.fmipa@unej.ac.id)

**Abstract.** Van der Pol Equation and Duffing Equation are the second order differential equation which are read as  $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$  and  $x'' + kx' - x + x^3 = F \cos(\omega t)$ . The aim of this paper is to study about the limit cycle of both equations. The discussion will be focused on the existence and the stability of the limit cycle and also the difference between the limit cycle of van der Pol equation and the Duffing equation. The results are limit cycle exist in van der Pol equation and Duffing equation. The form of limit cycle of the van der Pol equation is depended to the  $\mu$  values and the the form of limit cycle of the Duffing equation is depended to the  $k$ ,  $F$ , and  $\omega$  values. The difference of both equations is that van der Pol equation is globally stable while the Duffing equation is locally stable. Duffing equation may be having more than one limit cycle while van der Pol equation can only has single limit cycle.

**Keywords:** limit cycle, Van der Pol Equation, Duffing Equation  
**MSC 2020:** 35B05

## 1. Pendahuluan

Persamaan van der Pol dirumuskan oleh Balthazar van der Pol, fisikawan Belanda, yang merupakan sebuah model dari tipe rangkaian elektronik yang berupa rangkaian RLC, tetapi dengan resistor pasif diganti dengan sebuah elemen aktif [3]. Persamaan van der Pol berbentuk  $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$ , dengan  $\mu$  adalah koefisien konstan. Sedangkan persamaan Duffing dirumuskan oleh G. Duffing untuk memodelkan sistem mekanik magnet-elastis [4]. Persamaan Duffing mempunyai bentuk  $x'' + kx' - x + x^3 = F \cos(\omega t)$ , dengan  $k$ ,  $F$  dan  $\omega$  masing-masing adalah koefisien konstan.

Kedua persamaan diatas merupakan persamaan diferensial tak linier. Hal menarik dari persamaan diferensial tak linier adalah dimungkinkan adanya suatu penyelesaian yang berbentuk orbit dan membentuk suatu *cycle* yang disebut dengan *limit cycle*. Tujuan dari artikel ini adalah ingin mengkaji persamaan dan perbedaan *limit cycle* dari persamaan van der Pol dan persamaan Duffing.

## Kestabilan

Misal diberikan sistem persamaan diferensial dalam bentuk

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \text{ dengan } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Solusi persamaan (1) adalah sebuah fungsi  $\mathbf{x} = \phi(t)$  yang dapat dipandang sebagai tampilan parametrik sebuah kurva dalam bidang  $xy$ . Bidang  $xy$  disebut sebagai bidang phase. Kurva yang mempresentasikan solusi dari sistem persamaan (1) dipandang sebagai jejak yang dibentuk oleh partikel bergerak dengan kecepatan  $\mathbf{x}'$  dan disebut sebagai trayektori.

Titik-titik yang memenuhi  $f(\mathbf{x}) = 0$  disebut titik-titik kritis atau titik-titik kesetimbangan dari sistem (1). Sebuah titik kritis  $\mathbf{x}^*$  dari sistem (1) dikatakan stabil jika diberikan sebarang  $\varepsilon > 0$ , maka terdapat  $\delta > 0$  sehingga untuk setiap solusi  $\mathbf{x} = \phi(t)$ , untuk  $t = 0$  terdapat  $\|\phi(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$ , memenuhi  $\|\phi(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ ,  $\square t \geq 0$ .

Jika  $\mathbf{x} = \phi(t)$  tidak mendekati  $\mathbf{x}^*$  saat  $t \rightarrow \infty$  maka titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil. Titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dikatakan stabil asimtotik jika terdapat sebuah  $\delta_0$ , dengan  $0 < \delta_0 < \delta$  sehingga solusi  $\mathbf{x} = \phi(t)$  memenuhi  $\|\phi(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta_0$  dan  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^*$  [1].

Dalam prakteknya, analisis kestabilan suatu sistem didasarkan pada kelakuan titik kesetimbangan setelah titik tersebut mengalami sedikit gangguan. Jika terjadi perubahan kecil pada kesetimbangan, maka perubahan kecil tersebut dapat dituliskan

$$\begin{aligned} x &= x^* + x_1 \\ y &= y^* + y_1 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema Taylor untuk melinierkan persamaan di dekat kesetimbangan, didapatkan pendekatan berikut;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\cong \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} x_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} y_1 \\ \frac{dy}{dt} &\cong \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x^*, y^*} x_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x^*, y^*} y_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Persamaan (2) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (3)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x^*y^*} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{x^*y^*} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x^*y^*} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{x^*y^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

adalah matriks Jacobian [3].

Nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$  diberikan oleh  $\lambda$ , yakni

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(A_{11} + A_{22})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}}{2} \quad (3)$$

Untuk mengetahui suatu persamaan bersifat stabil lokal atau tidak, dapat digunakan kriteria Routh-Hurwitz. Menurut kriteria ini, untuk memenuhi kestabilan lokal maka bagian real dari semua nilai eigen (4) harus negatif;  $(A_{11} + A_{22}) < 0$  dan  $A_{11}A_{22} > A_{12}A_{21}$ . Kriteria Routh-Hurwitz ini merupakan cara cepat untuk menentukan apakah suatu titik kesetimbangan merupakan stabil lokal atau tidak [2].

Setelah diketahui kesetimbangan stabil lokal atau tidak, dapat diketahui apakah kesetimbangan tersebut stabil global atau tidak dengan ketentuan jika sebuah persamaan diferensial tak linier mempunyai kestabilan global maka dapat ditunjukkan bahwa untuk sebarang wilayah, persamaan tersebut mempunyai titik-titik kesetimbangan yang bersifat stabil lokal [7].

Jika untuk semua kondisi awal, solusi persamaan diferensial tersebut konvergen ke kesetimbangan saat  $t$  bertambah tanpa batas, maka kesetimbangan dikatakan stabil global (*globally stable*), sedangkan untuk semua kondisi awal yang cukup dekat pada kesetimbangan saja yang solusinya konvergen ke kesetimbangan saat  $t$  bertambah tanpa batas, maka kesetimbangan dikatakan stabil lokal (*locally stable*). Jika kesetimbangan tidak stabil global ataupun stabil lokal maka kesetimbangan dikatakan tidak stabil [3].

### ***Limit cycle***

Misal diberikan sistem persamaan diferensial order satu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Sistem persamaan (5) memenuhi solusi  $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$  untuk semua  $t$  dan untuk konstanta tak negatif  $T$  yang disebut sebagai periode.

Menurut Boyce dan Diprima [1], *limit cycle* adalah trayektori tertutup pada bidang phase dengan trayektori-trayektori lain yang tak tertutup akan berputar ke arah trayektori tertutup ini saat  $t \rightarrow \infty$ , baik dari luar maupun dari dalam. Sebelum menganalisa kestabilan *limit cycle*, perlu diketahui keberadaan *limit cycle* tersebut. Karena hanya persamaan yang mempunyai solusi periodik yang mempunyai *limit cycle* [6], maka digunakan teorema Poincaré-Bendixson untuk mengetahui apakah persamaan tersebut mempunyai solusi periodik atau tidak.

Dalam membahas teorema Poincaré-Bendixson perlu ditulis kembali persamaan (5) dalam bentuk

$$dx/dt = F(x, y), \quad dy/dt = G(x, y). \quad (6)$$

### **Teorema Poincaré-Bendixson**

Misal fungsi  $F$  dan  $G$  pada persamaan (6) mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam domain  $D$  dari bidang  $xy$ . Misal  $D_1$  adalah subdomain terbatas dalam  $D$ , dan misalkan  $R$  adalah wilayah yang terdiri dari  $D_1$  ditambah batasnya (semua titik  $R$  di dalam  $D$ ). Anggap bahwa  $R$  tidak mengandung titik kritis sistem (6). Jika terdapat konstanta  $t_0$  sehingga  $x = \phi(t)$  dan  $y = \psi(t)$  adalah solusi dari sistem (6) berada di  $R$  untuk semua  $t \geq t_0$ , maka  $x = \phi(t)$  dan  $y = \psi(t)$  adalah (a) periodik, atau (b) spiral ke arah solusi periodik saat  $t \rightarrow \infty$  [5].

Beberapa terminologi kestabilan *limit cycle* dijelaskan oleh Boyce dan Diprima [1] sebagai berikut:

- jika semua trayektori yang berputar mendekati sebuah trayektori tertutup (baik dari luar ataupun dari dalam) saat  $t \rightarrow \infty$ , maka *limit cycle* dikatakan stabil asimtotik (*asymptotically stable*);
- jika trayektori yang mendekati adalah sebuah orbit periodik itu sendiri dari sebuah titik kesetimbangan, maka tipe kestabilan ini disebut kestabilan orbit (*orbital stability*);
- jika trayektori-trayektorinya pada satu sisi berputar ke arah trayektori tertutup, sementara trayektori-trayektori tersebut pada sisi lain berputar menjauh saat  $t \rightarrow \infty$ , maka *limit cycle* dikatakan semi stabil (*semistable*);
- jika trayektori-trayektori pada kedua sisi dari trayektori tertutup spiral menjauh saat  $t \rightarrow \infty$ , maka *limit cycle* dikatakan tidak stabil;
- jika trayektori-trayektori lainnya tidak mendekat ataupun menjauh dari trayektori tertutup tersebut maka trayektori tertutup itu dikatakan stabil.

## 2. Hasil dan Pembahasan

### Titik Kritis Persamaan van der Pol dan Persamaan Duffing

Pada pendahuluan telah disebutkan bahwa Persamaan van der Pol dan Persamaan Duffing merupakan persamaan diferensial orde dua. Kedua persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan diferensial order satu, yang masing-masing disajikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} x' &= dx/dt = y \\ y' &= dy/dt = -x + \mu(1-x^2)y \end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= (x-x^3) - ky + F \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

Titik kritis-titik kritis persamaan (7) diperoleh dari penyelesaian persamaan

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Dari persamaan (7) dan (8) didapatkan titik kritis persamaan van der Pol adalah titik (0,0). Sedangkan jika gaya pada persamaan Duffing dianggap tidak ada, maka titik kritisnya adalah titik-titik (0,0), (-1,0) dan (1,0).

### Eksistensi *Limit Cycle*

#### 1. Persamaan Van der Pol

Penerapan teorema Poincaré-Bendixson untuk menganalisis keberadaan *limit cycle* pada persamaan Van der Pol dapat dilaksanakan secara lebih mudah dengan menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk koordinat polar, yakni

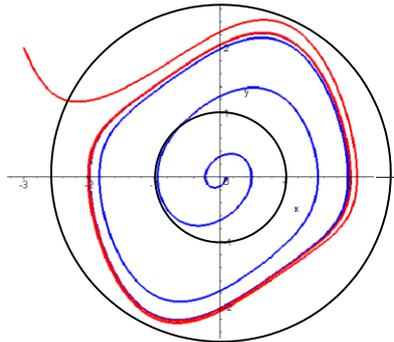
$$r' = \mu(1-r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta, \quad (9)$$

dengan  $\theta$  menyatakan sudut antara sumbu  $x$  dan garis yang menghubungkan titik (0,0) dan titik  $(x,y)$ , dan  $r$  menyatakan jarak antara kedua titik tersebut.

Misal diberikan sebuah wilayah berbentuk cincin  $R$  yang dibentuk oleh  $r_1 < r < r_2$  dan berpusat di titik kritisnya. Saat  $r = r_1$  didapatkan  $1-r^2 \cos^2 \theta > 0$ , sehingga  $r' > 0$ , kecuali pada sumbu  $x$  dimana  $\sin \theta = 0$ . Hal ini menyebabkan setiap trayektori yang dimulai dari titik di dalam lingkaran  $r = r_1$  akan berputar ke luar memasuki wilayah  $R$ . Pada saat  $r = r_2$  didapatkan  $1-r^2 \cos^2 \theta < 0$ , sehingga  $r' < 0$ , kecuali pada sumbu  $x$  dan di dekat sumbu  $y$  dengan  $r^2 \cos^2 \theta < 0$ . Hal ini menyebabkan setiap trayektori-trayektori yang berasal dari luar lingkaran  $r = r_2$  berputar ke dalam memasuki wilayah  $R$ . Karena trayektori yang

berasal dari dalam berputar ke arah luar dan trayektori yang berasal dari luar berputar ke dalam, maka terdapat sebuah trayektori tertutup yang didekati sistem persamaan van der Pol. Jadi sistem persamaan van der Pol mempunyai solusi periodik.

Sebagai contoh yaitu persamaan Van der Pol dengan  $\mu=1$ . Persamaan dalam koordinat polar (9) menjadi  $r' = (1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta$ . Kelakuan solusi dari persamaan tersebut disajikan dalam Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. *Limit Cycle* persamaan van der Pol

Dari Gambar 1 terlihat bahwa pada lingkaran dengan jari-jari  $r_1 = 1$  trayektori berputar ke arah luar lingkaran, sedangkan trayektori lain yang dimulai dari titik di luar lingkaran dengan jari-jari  $r_2 = 2,6$  berputar ke dalam lingkaran. Kedua trayektori ini bertemu dan membentuk *limit cycle*.

## 2. Persamaan Duffing

Analog dengan perlakuan yang dikenakan pada Persamaan Van der Pol, Persamaan Duffing dalam bentuk koordinat polar diberikan oleh

$$r' = \sin \theta \{2r \cos \theta - r^3 \cos^3 \theta - kr \sin \theta + F \cos(\omega t)\}. \quad (10)$$

Misal untuk  $F = 20$  dan  $k = 2$ , diberikan sebuah cincin  $R$  yang dibentuk oleh  $r_1 < r < r_2$  dan berpusat di titik kritisnya. Untuk  $r = r_1$  didapatkan dari persamaan (10) bahwa  $2r \cos \theta - r^3 \cos^3 \theta - kr \sin \theta + F \cos(\omega t) > 0$ , sehingga  $r' > 0$ . Oleh karena, itu trayektori yang dimulai dari titik-titik di dalam lingkaran dengan  $r = r_1$  akan berputar memasuki  $R$ . Pada saat  $r = r_2$  didapatkan  $2r \cos \theta - r^3 \cos^3 \theta - kr \sin \theta + F \cos(\omega t) < 0$  sehingga  $r' < 0$ . Hal ini berarti bahwa trayektori yang dimulai dari titik-titik di luar lingkaran  $r = r_2$  berputar memasuki  $R$ . Dengan demikian terdapat sebuah *limit cycle* yang dibentuk oleh Persamaan Duffing.

## Analisa Kestabilan

### 1. Persamaan van der Pol

Substitusi persamaan (7) untuk Persamaan Van der Pol pada persamaan (6) didapatkan  $P(x, y) = y$  dan  $G(x, y) = -\mu(x^2 - 1)y - x$ . Turunan parsial dari  $P$  dan  $G$  terhadap  $x$  dan  $y$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= 0, & P_y(x, y) &= 1, \\ G_x(x, y) &= -2\mu xy - 1, & G_y(x, y) &= -\mu(x^2 - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Substitusi persamaan (11) pada persamaan (4) diperoleh matriks Jacobian dari Persamaan Van der Pol di titik  $(0,0)$ , yakni

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}. \quad (12)$$

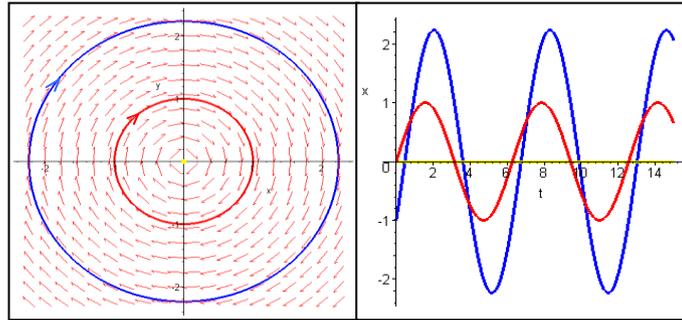
Nilai eigen dari (12) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}. \quad (13)$$

Dari persamaan (13) didapatkan berbagai kemungkinan nilai  $\mu$  berikut ini.

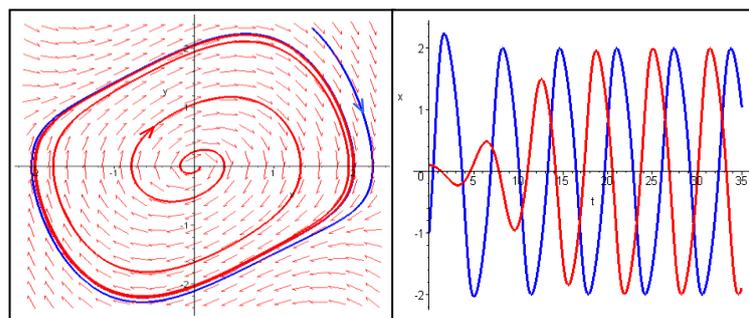
- Saat  $\mu = 0$  maka nilai eigennya adalah imajiner murni yaitu  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Persamaan menjadi osilator linier harmonik dengan solusi periodik  $-2\pi$ .
- Saat  $0 < \mu < 2$ , maka nilai eigen yang didapat adalah  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\mu \pm \omega i$ ,  $\omega < \mu$  sehingga hanya ada satu periodik yang membentuk *limit cycle*.
- Saat  $\mu = 2$  persamaan hanya mempunyai satu nilai eigen. Trayektorinya berputar ke arah luar dari titik  $O(0,0)$ .
- Saat  $\mu > 2$  didapatkan dua nilai eigen yang berbeda dengan dua vektor eigen yang independen linier.

Dari berbagai kemungkinan nilai  $\mu$  di atas didapatkan bahwa persamaan van der Pol stabil setiap saat. Gambar 2 menjelaskan bahwa, pada bidang  $xy$  (bidang fase), persamaan ini mengalami kestabilan orbit saat  $\mu = 0$ ; trayektori mendekati sebuah orbit yang tak lain adalah trayektori itu sendiri. Pada bidang  $xt$ , terlihat bahwa amplitudo yang dibentuk konstan.



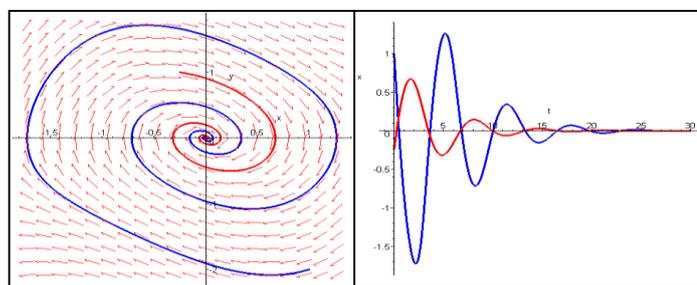
Gambar 2. Kelakuan Persamaan van der Pol saat  $\mu = 0$  pada bidang  $xy$  dan bidang  $xt$

Saat  $\mu > 0$ , trayektori dari luar ataupun dari dalam mendekati sebuah trayektori tertutup. Seperti ditunjukkan pada Gambar 3, Persamaan Van der Pol stabil. Pada bidang fase persamaan ini membentuk *limit cycle*. Pada bidang  $xt$ , solusi yang awalnya memiliki amplitudo kecil membesar hingga amplitudonya konstan, begitu pula grafik yang semula amplitudonya besar.



Gambar 3. Bidang fase dan bidang- $xt$  Persamaan van der Pol saat  $\mu = 0,5$

Sedangkan untuk  $\mu < 0$ , seperti yang tampak pada Gambar 4, trayektori yang terbentuk pada bidang fase berputar ke dalam dan terus mendekati titik  $O(0,0)$  saat  $t \rightarrow \infty$ . Besar amplitudo grafik yang terbentuk pada bidang  $xt$  menuju nol saat  $t \rightarrow \infty$ .



Gambar 4. Bidang fase dan bidang  $xt$  Persamaan van der Pol saat  $\mu = -0,5$

## 2. Persamaan Duffing

Substitusi persamaan (7) untuk Persamaan Duffing pada persamaan (6) didapatkan  $P(x, y) = y$  dan  $G(x, y) = x(1-x^2) - ky + F \cos(\omega t)$ . Turunan parsial dari  $P$  dan  $G$  terhadap  $x$  dan  $y$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= 0, & P_y(x, y) &= 1, \\ G_x(x, y) &= 1-3x^2, & G_y(x, y) &= -k. \end{aligned} \quad (14)$$

Substitusi persamaan (14) pada persamaan (4) diperoleh matriks Jacobian dari Persamaan Duffing di titik  $(0,0)$  dan  $(\pm 1,0)$  masing-masing diberikan oleh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -k \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Masing-masing nilai eigen dari (15) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -k \pm \sqrt{k^2 + 4} \right), \text{ dan} \quad (16 \text{ a})$$

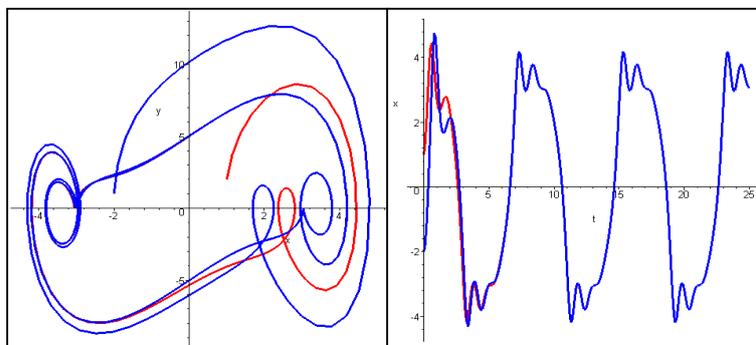
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -k \pm \sqrt{k^2 - 8} \right). \quad (16 \text{ b})$$

Dari persamaan (16 a) dapat diketahui bahwa nilai eigen yang terkait dengan titik kritis  $(0,0)$  adalah real. Karena  $|k| < \sqrt{k^2 + 4}$  maka salah satu akarnya positif, yang berimplikasi bahwa titik  $(0,0)$  tidak stabil. Sedangkan kestabilan titik-titik  $(\pm 1,0)$  ditentukan oleh berbagai kemungkinan nilai  $k$  yang dapat dirinci sebagai berikut:

- jika  $k > 0$  maka  $\lambda_{1,2} < 0$ , sehingga titik  $(\pm 1,0)$  bersifat stabil asimtotik;
- jika  $k = 0$  maka  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ , sehingga titik  $(\pm 1,0)$  bersifat stabil linier;
- jika  $k \in (-2\sqrt{2}, 0)$  maka radikalnya memberikan bagian imajiner sehingga bagian realnya positif, karenanya titik  $(\pm 1,0)$  bersifat tidak stabil;
- jika  $k < -2\sqrt{2}$  maka  $|k| < \sqrt{k^2 - 8}$ , sehingga kedua akarnya positif dan titik  $(\pm 1,0)$  bersifat tak stabil.

Dari berbagai kemungkinan nilai  $k$  tersebut didapatkan bahwa persamaan Duffing stabil saat  $k \geq 0$ . Persamaan Duffing mengalami kestabilan orbit saat  $k = 0$ . Persamaan Duffing juga

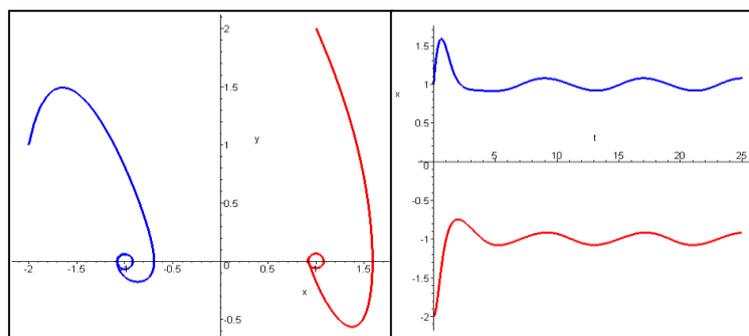
membentuk *limit cycle* saat  $k > 0$  walaupun terkadang bentuknya sedikit lebih kompleks bila dibandingkan dengan *limit cycle* persamaan van der Pol. Besar amplitudo yang terbentuk pada bidang  $xy$  mengalami perubahan, namun perubahan tersebut tetap berulang. Kelakuan persamaan Duffing disajikan pada Gambar 5.



Gambar 5. Bidang fase dan bidang  $xt$  Persamaan Duffing saat  $F = 40$  dan  $k = 2$

*Limit cycle* persamaan Duffing ini hanya terbentuk jika  $F > 0$ . Jadi walaupun  $k > 0$  tetapi  $F$  tidak lebih besar dari nol maka *limit cycle* tidak terbentuk. Misalnya untuk  $F = 0$  dan  $k > 0$ , persamaan Duffing bersifat stabil asimtotik. Setiap trayektori yang dibentuk berputar mendekati sebuah titik.

Pada persamaan Duffing, dua trayektori yang dimulai dari dua nilai awal yang berbeda belum tentu mendekati *limit cycle* yang sama. Besar amplitudo yang terbentuk pada bidang  $xt$  sama namun letaknya berbeda seperti diilustrasikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Bidang fase dan bidang  $xt$  Persamaan Duffing saat  $F = 1/6$  dan  $k = 2$

Persamaan Duffing dengan  $k < 0$  bersifat tidak stabil dan trayektorinya berputar terus menjauh saat  $t \rightarrow \infty$ . Pengaruh koefisien lain yang dapat diamati adalah pengaruh  $\omega$  terhadap persamaan Duffing. Dari analisa grafik persamaan Duffing yang dibuat dengan program Maple, besar  $\omega$  tidak mempengaruhi kestabilan sistem. Berapapun besar  $\omega$ , sistem tetap stabil dengan syarat  $F \geq 0$  dan  $k \geq 0$ . Saat  $F > 0$  dan  $k > 0$ , persamaan Duffing bersifat stabil asimtotik saat  $\omega = 0$  dan membentuk *limit cycle* saat  $\omega \neq 0$ .

## Perbedaan Antara Persamaan van der Pol dan Persamaan Duffing

Persamaan van der Pol dan persamaan Duffing memiliki kesamaan yaitu keduanya mempunyai kestabilan dan *limit cycle*. Sedangkan perbedaan antara persamaan van der Pol dan persamaan Duffing yaitu persamaan van der Pol mempunyai satu titik kritis dan satu *limit cycle* sedangkan persamaan Duffing mempunyai tiga titik kritis dan bisa mempunyai dua *limit cycle*, misal untuk kasus yang kelakuannya disajikan Gambar 6.

Pada saat persamaan van der Pol bersifat stabil, trayektori pada bidang fase berputar mendekati satu *limit cycle* untuk semua kondisi awal. Sedangkan pada persamaan Duffing, pada saat persamaan ini bersifat stabil asimtotik hanya solusi awal yang dekat dengan *limit cycle* saja yang trayektorinya mendekati *limit cycle* tersebut, sedangkan titik awal yang dekat dengan *limit cycle* lain tidak akan mendekati *limit cycle* tersebut seperti yang tampak pada Gambar 6. Karenanya persamaan van der Pol dikatakan stabil global dan persamaan Duffing dikatakan stabil lokal.

### 3. Kesimpulan

Berdasarkan uraian yang disajikan dalam Subbab hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

- a. persamaan van der Pol dan persamaan Duffing merupakan persamaan diferensial tak linier yang mempunyai *limit cycle*;
- b. perbedaan persamaan van der Pol dan persamaan Duffing adalah
  - persamaan van der Pol bersifat stabil global sedangkan persamaan Duffing bersifat stabil lokal;
  - persamaan van der Pol mempunyai *limit cycle* tunggal sedangkan persamaan Duffing bisa mempunyai lebih dari satu *limit cycle*.

### Daftar Pustaka

- [1] Boyce, W. E. & Diprima, R. C. 1997. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. New York: John Wiley & Sons.
- [2] Cronin, J. 1994. Differential Equations Introduction and Qualitative Theory Second Edition. New Jersey: Marcel Dekker, Inc.
- [3] Duke. 2000. The Van der Pol System. [on line]. <http://www.math.duke.edu>. Copyright CCP and author(s).

- [4] Fraser, B. 1997. The Double Well Oscillator. [on line]. <http://www.apmaths.uwo.ca>.
- [5] Rabenstein, A.L., 1972, Introduction to Ordinary Differential Equations, New York, Academic Press.
- [6] Tuwankotta, M. J. 2000. Integral vol. 5, [on line] <http://home.unpar.ac.id>. Bandung: Mathematic Department ITB.
- [7] Wang, Z. & Paganini, F. 2004. Global Stability of Nonlinear Congestion Control With Time-Delay. [on line]. <http://www.ee.ucla.edu>. Los Angeles: University of California.