Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 15 Nomor 2 2015, 87 – 96
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

STUDI MASALAH PEMROGRAMAN GEOMETRIK DENGAN METODE DUAL

(Study on Geometric Programming using Dual Method)

Fitriya dan Agustina Pradjaningsih
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121, Indonesia
Email:agustina.fmipa@unej.ac.id

Abstract. Geometric programming is an optimization technique developed for solving a class of non-linear programming problems. It is used to minimize function which are in the form of posynomial subject to constraints of the same type. To find the solution, this technique consider dual problem that related to primal problem. In this paper, we discuss about minimize solution with constrained of geometric programming problems on the basis of Lagrangian function and Kuhn-Tucker Conditions.

Keywords: geometric programming, posynomial
MSC 2020: 90C46

1. Pendahuluan

Pemrograman non linier merupakan masalah optimisasi dengan fungsi tujuannya non linier. Pemrograman geometrik merupakan metode untuk menyelesaikan salah satu kelas dari masalah pemrograman non linier yang diperkenalkan pertama kali oleh Clarence Zener dan Richard Duffin pada tahun 1961[2]. Pemrograman geometrik digunakan untuk meminimumkan suatu fungsi tujuan berbentuk khusus yang disebut posinomial. Jika ada kendala maka kendala juga berbentuk posinomial. Sebuah posinomial mempunyai bentuk

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N} c_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}}$$

dengan $c_j > 0,\ a_{ij} \in R,\ x_i > 0,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le N.$ Masalah minimisasi ini selanjutnya disebut masalah primal. Teknik ini menentukan solusi dengan mempertimbangkan masalah dual yang berkaitan dengan masalah primal, yang penyelesaiannya lebih sederhana.

Sebuah fungsi $f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dikatakan mempunyai minimum relatif atau lokal di $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ jika $f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h})$ untuk semua $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_n)^T$ sehingga $|h_j|$ cukup kecil untuk semua j [1]. Titik $\mathbf{X}^*$ adalah titik maksimum lokal atau relatif jika $f(\mathbf{X}^*) \ge f(\mathbf{X}^* + \mathbf{h})$. Fungsi $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum global atau absolut di titik $\mathbf{X}^*$ jika $f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X})$ untuk setiap $\mathbf{X}$ pada daerah asal tempat $f(\mathbf{X})$ didefinisikan. Titik $\mathbf{X}^*$ akan menjadi titik maksimum global atau absolut dari $f(\mathbf{X})$ jika $f(\mathbf{X}^*) \ge f(\mathbf{X})$.

Misalkan titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in R^n$ dan S menunjukkan himpunan konveks, secara matematis dapat didefinisikan sebagai berikut:[3]

Jika titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$, maka titik $\mathbf{X} \in S$

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan konveks atau cembung (*convex*) jika setiap dua titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in R^n$ dan untuk semua $0 \le \lambda \le 1$,

$$f(\lambda \mathbf{X}_2 + (1-\lambda)\mathbf{X}_1) \le \lambda f(\mathbf{X}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_1)$$

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan konkaf atau cekung (*concave*) jika merupakan negatif dari fungsi konveks.

Teorema 1. Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ adalah konveks jika matrik Hessian $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = [\partial^2 f(\mathbf{X}) / \partial x_i \partial x_j]$ adalah semi definit positif.

Teorema 2. Suatu minimum lokal dari fungsi konveks $f(\mathbf{X})$ adalah minimum global.

Metode pengali Lagrange merupakan suatu metode yang dipergunakan untuk pencarian titik optimum dari suatu fungsi dengan kendala yang berbentuk persamaan. Permasalahan minimisasi dari fungsi yang kontinu dengan kendala persamaan berbentuk:

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimumkan } f = f(\mathbf{X}),\ \mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \\ \text{dengan kendala } g_j(\mathbf{X}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \text{ , dengan } m \le n . \end{array}\right\}$$

Untuk memecahkan masalah tersebut, kita menyusun fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{X})$$

dengan $\lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$ disebut pengali Lagrange dan m adalah banyaknya kendala. Titik minimum relatif dapat diperoleh dengan menggunakan teorema berikut ini.

Teorema 3. Kondisi perlu untuk fungsi $f(\mathbf{X})$ dengan kendala $g_j(\mathbf{X}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$ mempunyai minimum relatif di $\mathbf{X}^*$ adalah bahwa turunan parsial pertama dari fungsi Lagrange yang didefinisikan oleh $L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ yang terkait dengan

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 15 Nomor 2 2015, 87 – 96
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

masing-masing argumennya harus sama dengan nol.

Teorema 4. Kondisi cukup untuk $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum relatif di $\mathbf{X}^*$ adalah bentuk kuadratik Q, yang didefinisikan

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

yang dievaluasi di $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$, definit positif untuk semua nilai $d\mathbf{X}$ yang memenuhi kendala. Jika $Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ negatif untuk semua nilai $d\mathbf{X}$ maka $\mathbf{X}^*$ adalah titik maksimum relatif dari $f(\mathbf{X})$. Bentuk kuadratik Q akan definit positif (atau negatif) untuk semua $d\mathbf{X}$ bila setiap akar polinomial z_i didefinisikan pada persamaan determinan berikut adalah positif (atau negatif):[3]

$$\begin{vmatrix}
(L_{11}-z) & L_{12} & \cdots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} \\
L_{21} & (L_{22}-z) & \cdots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{m2} \\
\vdots & & & & & & & \\
L_{n1} & L_{n2} & \cdots & (L_{nn}-z) & g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{mn} \\
g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix} = 0$$

dengan $L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\left(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\lambda}\right)$, dan $g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\left(\mathbf{X}^*\right)$

Kondisi Kuhn-Tucker digunakan untuk optimisasi fungsi dengan kendala pertidaksamaan sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{l}\text{minimumkan } f(\mathbf{X}) \\[2ex] \text{dengan kendala } g_j(\mathbf{X}) \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m\end{array}\right\}$$

Masalah di atas merupakan masalah minimisasi tetapi kondisi Kuhn-Tucker juga dapat diterapkan untuk masalah maksimisasi. Kondisi Kuhn-Tucker merupakan pengembangan dari metode Lagrange. Kondisi Kuhn-Tucker untuk masalah minimisasi di atas, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}=0, && i=1,2,\ldots,n\\
&\lambda_j g_j=0 &&, \; j=1,2,\ldots,m\\
&g_j\le 0 &&, \; j=1,2,\ldots,m\\
&\quad\text{dan} && \\
&\lambda_j\ge 0 &&, \; j=1,2,\ldots,m
\end{aligned}\right\}$$

Kondisi di atas tidak cukup untuk menjamin suatu minimum relatif di $\mathbf{X}^*$. Pada masalah pemrograman konveks yaitu masalah minimisasi dengan fungsi tujuan dan kendala adalah konveks maka kondisi Kuhn-Tucker merupakan kondisi perlu sekaligus kondisi cukup yang menjamin hanya ada satu titik yaitu minimum global [3].

Bentuk Umum Posinomial

Sebuah posinomial didefinisikan [3]:

$$f(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{N}U_j(\mathbf{X})=U_1(\mathbf{X})+U_2(\mathbf{X})+\ldots+U_N(\mathbf{X})$$

dengan $U_j(\mathbf{X})=c_j\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ij}}=c_jx_1^{a_{1j}}x_2^{a_{2j}}\ldots x_n^{a_{nj}}$

$$c_j>0,\;\; a_{ij}\in R,\;\; x_i>0,\;\; 1\le i\le n,\;\; 1\le j\le N$$

Bentuk Umum Pemrograman Geometrik

Terdapat dua macam masalah dalam pemrograman geometrik yaitu:

1. masalah minimisasi tanpa kendala yang dapat dirumuskan sebagai berikut:
   tentukan $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ yang meminimumkan fungsi tujuan

   $$f(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{N}U_j(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{N}c_j\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ij}}=\sum_{j=1}^{N}\left(c_jx_1^{a_{1j}}x_2^{a_{2j}}\ldots x_n^{a_{nj}}\right)$$

   dengan $c_j>0,\;\; \mathrm{x}_i>0,\;\; \text{dan } \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\in R$.
2. masalah minimisasi dengan kendala dapat dinyatakan sebagai berikut:
   tentukan $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ yang meminimumkan fungsi tujuan

   $$f(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{N_0}c_{0j}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{0ij}}$$

   dan memenuhi kendala

   $$g_k(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{N_k}c_{kj}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{kij}}\,(\le,\ge)\,1,\quad k=1,2,\ldots,m$$

dengan $c_{0j}>0,c_{kj}>0,a_{0ij}\in R,a_{kij}\in R,x_i>0$. Kedua Masalah minimisasi ini kemudian disebut masalah primal.

2. Hasil dan Pembahasan

Pertama-tama fungsi tujuan $f(\mathbf{X})$ dimisalkan dengan

$$x_0 = g_0(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{N_0} c_{0j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}} \tag{1}$$

Sedangkan fungsi kendala dapat dituliskan dalam bentuk berikut

$$f_k = \sigma_k [1 - g_k(\mathbf{X})] \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

σ_k disebut fungsi tanda dan bernilai +1 atau –1 tergantung apakah $g_k \leq 1$ atau ≥ 1.
Didefinisikan bobot untuk masing-masing suku dalam fungsi tujuan

$$\Delta_{0j} = \frac{c_{oj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{0ij}}}{x_0} > 0, \; j = 1, 2, \ldots, N_0 \quad \text{dan} \quad \sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} = 1 \tag{3}$$

sedang bobot untuk masing-masing suku dalam kendala didefinisikan

$$\Delta_{kj} = c_{kj} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{kij}} > 0, \; k = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, N_k \tag{4}$$

Masalah asal meminimumkan $f(\mathbf{X})$ dengan kendala $g_k \leq 1$ atau ≥ 1, $k = 1, 2, \ldots, m$ akan berubah menjadi meminimumkan x_0 dengan kendala (2), (3) dan (4). Didefinisikan transformasi eksponensial $x_i = e^{w_i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. masalah di atas dapat ditulis kembali menjadi

Minimumkan e^{w_0}

dengan kendala $e^{w_0} \left[\dfrac{\Delta_{oj}}{c_{oj}} \right] = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i \right); \quad j = 1, 2, \ldots, N_0$

$$f_k = \sigma_k \left[1 - \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} \right] \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i \right); \; k = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, N_k$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} - 1 = 0$$

Dengan mengambil logaritma, diperoleh

Minimumkan w_0

dengan kendala $\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 = \ln\left(\frac{\Delta_{0j}}{c_{0j}} \right); \; j = 1, 2, \ldots, N_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i = \ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}}\right);\ k = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,N_k$$

$$f_k = \sigma_k\left[1 - \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj}\right] \geq 0, \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

Semua bobot harus bernilai positif dan $w_0, w_1, \ldots, w_n$ tidak terbatas dalam tanda. Untuk memecahkan masalah dengan kendala ini, disusun fungsi Lagrange dengan $\lambda_0, \lambda_{0j}, \lambda_{kj}$ dan λ_k adalah pengali Lagrange. Karena *m* kendala adalah pertidaksamaan agar memenuhi kondisi Kuhn-Tucker, kendala diubah dalam bentuk $f_k \leq 0$ sehingga λ_k terbatas bernilai nonnegatif $(\lambda_k \geq 0, k = 1,2,\ldots,m)$. Kemudian $\lambda_k f_k$ ditambahkan pada fungsi Lagrange tanpa mengubah nilainya. Fungsi Lagrange untuk masalah tersebut adalah sebagai berikut:

$$L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\lambda}) = w_0 + \lambda_0\left(\sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{0j} - 1\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sigma_k \left(\sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} - 1\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j}\left[\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\Delta_{0j}}{c_{0j}}\right)\right] + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj}\sigma_k\left[\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i - \ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}}\right)\right] \tag{5}$$

Pada titik stasioner dari *L*, didapat

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{oj} - 1 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} a_{0ij} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj}\sigma_k a_{kij} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_{0j}} = \lambda_0 - \frac{\lambda_{0j}}{\Delta_{oj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta_{kj}} = \lambda_k\sigma_k - \frac{\lambda_{kj}\sigma_k}{\Delta_{kj}} = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = \sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{oj} - 1 = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = \sigma_k\left(\sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} - 1\right) = 0,\ k = 1,2,\ldots,m \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{oj}} = \sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\Delta_{0j}}{c_{0j}}\right) = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{kj}} = \sigma_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i - \ln\left(\frac{\Delta_{kj}}{c_{kj}} \right) \right] = 0,\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \tag{13}$$

dikenalkan σ_0 dengan nilai satu dan persamaan (7) dapat ditulis kembali menjadi

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} \sigma_k \lambda_{kj} a_{kij} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n \tag{14}$$

Dari persamaan (6), (8) dan (10) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{oj} = 1 = \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_o \Delta_{0j} = \lambda_0 \sum_{j=1}^{N_0} \Delta_{oj} = \lambda_0 = 1 \tag{15}$$

Dari persamaan (8) dan (15), didapatkan bahwa

$$\lambda_{0j} = \lambda_0 \Delta_{0j} = \Delta_{0j},\ j = 1,2,\ldots,N_0 \tag{16}$$

Dengan cara yang sama, persamaan (9) dan (11) mengarah pada

$$\lambda_{kj} = \lambda_k \Delta_{kj} \quad \text{dan} \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} = \lambda_k \sum_{j=1}^{N_k} \Delta_{kj} = \lambda_k,\ k = 1,2,\ldots,m \tag{18}$$

Dengan demikian Δ_{kj} dapat dinyatakan sebagai berikut (dari persamaan (17)):

$$\Delta_{kj} = \frac{\lambda_{kj}}{\lambda_k} = \frac{\lambda_{kj}}{\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj}},\ j = 1,2,\ldots,N_k;\ k = 1,2,\ldots,m \quad \text{dengan } \lambda_k \neq 0 \tag{19}$$

Karena persamaan (16) dan (19) menyatakan Δ_{0j} dan Δ_{kj} dalam suku-suku dari λ_{0j} dan λ_{kj}, pengali Lagrange dapat diperlakukan sebagai variabel yang tidak diketahui dalam masalah, sehingga fungsi Lagrange dari persamaan (5) dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{f}) &= w_0 + \lambda_0 \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} - \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k + \ldots \\ &+ \sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{0ij} w_i - w_0 - \ln\left(\frac{\lambda_{0j}}{c_{0j}} \right) \right] + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} \sigma_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_{kij} w_i - \ln \frac{\lambda_{kj}}{c_{kj} \left(\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj} \right)} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

dengan $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_m\}^T \equiv \left\{ \sigma_1 \left(\sum_{j=1}^{N_1} \Delta_{1j} - 1 \right), \ldots, \sigma_m \left(\sum_{j=1}^{N_m} \Delta_{mj} - 1 \right) \right\}^T$.

Mengingat bahwa $\sum_{j=1}^{N_0} \lambda_{0j} = \lambda_0 = 1$ dan $\sigma_0 = 1$, persamaan (20) menjadi

$$L(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{f}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k\lambda_{kj}\ln\left[\frac{c_{kj}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}}{\lambda_{kj}}\right] + (w_0-1)\left(1-\sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j}\right) + \ldots$$

$$+\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k a_{kij}\lambda_{kj} + \sum_{k=1}^{m} f_k\lambda_k \tag{21}$$

Fungsi ini $L(\mathbf{w},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{f})$ dapat dipandang sebagai fungsi Lagrange dari masalah optimisasi lain dengan fungsi tujuannya adalah

$$\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k\lambda_{kj}\ln\left[\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\right] \tag{22}$$

dan kendala $$1-\sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j} = 0 \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k a_{kij}\lambda_{kj} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{24}$$

dan $$\lambda_k = \sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj} \geq 0,\;\; k = 1,2,\ldots,m \tag{25}$$

$(w_0-1), w_1, w_2, \ldots, w_n$ dan $f_1, f_2, \ldots, f_m$ berperan sebagai pengali Lagrange dalam persamaan (21). Variabel $\lambda_{kj}, j = 1,2,\ldots,N_k;\; k = 0,1,2,\ldots,m$ dapat dicari dengan menyelesaikan pers. (23) dan (24) yang masing-masing mewakili kondisi normalitas dan ortogonalitas. Dapat dilihat bahwa terdapat $n+1$ persamaan linier dalam N variabel dengan $N = \sum_{k=0}^{m} N_k$. Jadi derajat kesulitannya adalah $N-n-1$.

Fungsi dual $v(\boldsymbol{\lambda})$ merupakan eksponensial dari $\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})$

$$v(\boldsymbol{\lambda}) = e^{\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})} = \prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{N_k}\left(\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\right)^{\sigma_k\lambda_{kj}} \tag{26}$$

yang juga dibatasi kendala normalitas (23), kendala ortogonalitas (24) dan kendala tak negatif (25).

Prosedur Perhitungan

Masalah Minimisasi dengan kendala dapat diselesaikan dengan memaksimumkan $v(\boldsymbol{\lambda})$ dengan kendala normalitas dan ortogonalitas. Jika masalah mempunyai derajat kesulitan nol, maka dihasilkan solusi tunggal untuk $\boldsymbol{\lambda}^*$. Nilai stasioner fungsi tujuan dapat diperoleh dengan mensubstitusi $\boldsymbol{\lambda}^*$ pada persamaan (26).

Jika masalah mempunyai derajat kesulitan positif D (yaitu $D = N - n - 1$), persamaan linier (23) dan (24) dapat dipakai untuk menyatakan ($n+1$) variabel λ_{kj} dalam suku-suku dari sisa D dari variabel λ_{kj}. Fungsi dual v dapat dinyatakan sebagai fungsi dari D variabel λ_{kj} yang independen. Titik stasioner dari v dapat dicari dengan menggunakan sebarang teknik optimisasi tanpa kendala atau dengan teknik kalkulus dipakai yaitu turunan pertama fungsi v adalah sama dengan nol yang memberikan pendekatan solusi yang bagus.

Setelah solusi $\boldsymbol{\lambda}^*$ diperoleh, maka maksimum fungsi dual v^* diperoleh dari persamaan (26) yang juga merupakan minimum fungsi primal f^*. Untuk menentukan nilai optimal variabel $x_i^* (i = 1, 2, \ldots, n)$ dapat digunakan hubungan

$$\Delta_{0j}^* = \lambda_{0j}^* \equiv \frac{c_{oj} \prod_{i=1}^{n} (x_i^*)^{a_{0ij}}}{x_0^*} > 0,\ j = 1, 2, \ldots, N_0 \tag{27}$$

$$\Delta_{kj}^* = \frac{\lambda_{kj}^*}{\sum_{j=1}^{N_k} \lambda_{kj}^*} = c_{kj} \prod_{i=1}^{n} (x_i^*)^{a_{kij}},\ j = 1, 2, \ldots, N_k;\ k = 1, 2, \ldots, m \tag{28}$$

Jika masalah seluruh kendalanya berbentuk $g_k(\mathbf{X}) \le 1$, maka fungsi tujuan $g_0(\mathbf{X})$ menjadi fungsi konveks ketat dari variabel transformasi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dan kendala juga akan konveks sehingga mempunyai satu minimum lokal yang juga minimum global. Fungsi dual transformasi adalah fungsi konkaf yang memiliki satu titik stasioner yaitu maksimum global. Dengan demikian minimum w_0 dapat dicari dengan memaksimumkan fungsi $\tilde{v}(\boldsymbol{\lambda})$ atau eksponensialnya $v(\boldsymbol{\lambda})$.

Jika masalah pemrograman geometrik berisi kendala campuran $g_k(\mathbf{X})(\le, \ge) 1,\ \ k = 1, 2, \ldots, m$, tidak ada pernyataan umum yang dapat dibuat tentang kekonveksan atau kekonkafan dari himpunan kendala. Akan tetapi, karena fungsi tujuan kontinu dan terbatas di bawah oleh nol, kasus ini harus mempunyai minimum yang dilengkapi bahwa ada titik yang memenuhi kendala.

3. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan dapat ditarik kesimpulan bahwa untuk menentukan solusi masalah minimisasi dengan kendala dalam pemrograman geometrik adalah dengan menyelesaikan bentuk dualnya, yaitu

tentukan $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0N_0}, \lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1N_1}, \ldots, \lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{mN_m})^T$

yang memaksimumkan

$$v(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{N_k}\left(\frac{c_{kj}}{\lambda_{kj}}\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj}\right)^{\sigma_k \lambda_{kj}}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{N_0}\lambda_{0j} = 1 \qquad \text{(kondisi normalitas)}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_k}\sigma_k a_{kij}\lambda_{kj} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n \qquad \text{(kondisi ortogonalitas)}$$

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{N_k}\lambda_{kj} \geq 0,\ k = 1,2,\ldots,m \qquad \text{(kendala tak negatif)}$$

Untuk $k = 1,2,\ldots,m \begin{cases} \sigma_k = 1 \ \text{ jika } \ g_k(\mathbf{X}) \leq 1 \\ \sigma_k = -1 \ \text{ jika } \ g_k(\mathbf{X}) \geq 1 \end{cases}$; sedangkan $\sigma_0 = 1$.

Daftar Pustaka

[1] Hamdy A Taha, 1997, Riset Operasi Suatu Pengantar Jilid 2 (alih bahasa oleh Daniel Wirajaya), Binarupa Aksara, Jakarta.

[2] K.V. Mital, 1976, Optimization Methods in Operations Research and System Analysis, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[3] S.S. Rao, 1984, Optimization Theory and Applications, Wiley Eastern Limited, San Diego.