

# OPTIMASI KOMBINASI PRODUK DENGAN METODE GOAL PROGRAMMING

(Optimizations of Product Combinations with Goal Programming Method)

Rika N.B., Agustina Pradjaningsih dan Yuliani Setia Dewi

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

Jl. Kalimantan 37, Jember 68121, Indonesia

Email: [agustina.fmipa@unej.ac.id](mailto:agustina.fmipa@unej.ac.id), [yulidewi.fmipa@unej.ac.id](mailto:yulidewi.fmipa@unej.ac.id)

**Abstract:** Goal programming is linear programming technique which is used to solve problem with some goals. This method used to minimize the undesirable deviation from some targets which want to be reached. The targets expressed in a mathematic equation called constraint function. There are two constraint functions, goal constraint function and structural constraint function. On this paper solution of the optimal product combinations problems will be found from nata de coco packs which have purpose to minimize ripening and sale maximization.

**Keyword:** Goal Programming, Product Combination.

**MSC 2020:** 90C29

## 1. Pendahuluan

Suatu perusahaan yang bergerak dibidang produksi, tujuan utamanya adalah untuk mencari keuntungan yang optimal. Oleh karena itu untuk mendapatkan keuntungan yang optimal, perusahaan harus mengetahui faktor-faktor yang berhubungan dengan penekanan biaya produksi seminimal mungkin dan pendapatan yang semaksimal mungkin. Salah satu cara untuk mendapatkan keuntungan optimal adalah dengan jalan kombinasi produk. Yang dimaksud kombinasi produk adalah suatu metode untuk mengoptimalkan keuntungan dengan jalan memproduksi satu jenis produk dengan ukuran (kemasan) yang berbeda atau banyaknya masing-masing kemasan yang harus diproduksi dengan tujuan khusus agar dapat mencapai pangsa pasar yang lebih luas. Namun dalam kenyataannya perusahaan terkadang masih mengalami kesulitan dalam menentukan banyaknya produksi untuk masing-masing kemasan produk yang harus dihasilkan. Untuk menentukan kombinasi produk yang mempunyai lebih dari satu tujuan yang ingin dicapai sekaligus dapat digunakan metode *goal programming*. Konsep *goal programming* diperkenalkan pertama kali tahun 1955 oleh Abraham Charness dan William Cooper dan dicetuskan pada tahun 1961 [3].

*Goal programming* merupakan teknik yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah yang mempunyai beberapa tujuan. Dalam *goal programming* semua tujuan digabungkan dalam sebuah fungsi tujuan dan model *goal programming* seluruhnya terdiri dari fungsi linier. Untuk mengekspresikan tujuan itu ditulis dalam bentuk fungsi kendala (*constraint*)

dengan memasukkan suatu variabel simpangan (*deviational variable*) dalam kendala itu dan menggabungkan variabel simpangan dalam sebuah fungsi tujuan.

Fungsi tujuan dalam *goal programming* bertujuan untuk meminimumkan penyimpangan-penyimpangan yang tidak diinginkan dari tujuan-tujuan. Karena penyimpangan-penyimpangan yang tidak diinginkan dari tujuan-tujuan itu diminimumkan, sebuah model *goal programming* dapat menangani aneka ragam tujuan dengan dimensi atau satuan ukuran yang berbeda [1].

Model *goal programming* secara umum adalah sebagai berikut [3]:

1. Fungsi tujuan

$$\text{Meminimumkan } Z = \sum_{p=1}^M (d_p^+ + d_p^-)$$

dengan  $d_p^+$  = penyimpangan *overachievement* ke- $p$ ;  
 $d_p^-$  = penyimpangan *underachievement* ke- $p$ .

2. Fungsi kendala

a. Fungsi kendala tujuan

$$\sum_{j=1}^k a_{pj} X_j - d_p^+ + d_p^- = b_p \text{ untuk } p = 1, 2, \dots, M$$

dengan  $a_{pj}$  = koefisien yang berhubungan dengan  $X_j$  untuk tujuan ke- $p$ ;

$X_j$  = variabel keputusan ke- $j$ ;

$b_p$  = nilai tujuan ke- $p$ ;

$p$  = banyaknya tujuan.

b. Fungsi kendala struktural

$$X_j (\geq, \leq) g_j \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, k$$

dengan  $g_j$  adalah banyaknya sumber daya yang tersedia ke- $j$ .

Model regresi linier berganda adalah model dengan sebuah variabel tidak bebas  $Y$  yang dihubungkan pada  $k$  variabel bebas  $X$ . Model regresi linier berganda dengan  $n$  pengamatan dan melalui titik asal pada  $(0,0)$  dapat dinyatakan sebagai berikut [4]:

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \tag{1}$$

dengan  $Y_i$  adalah variabel tidak bebas;

$X_i$  adalah variabel bebas;

$\beta_j$  adalah koefisien regresi;

$\varepsilon_i$  adalah galat pada pengamatan ke  $i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$k$  = banyaknya variabel bebas.

Asumsi-asumsi dasar dalam model regresi linier berganda adalah  $\varepsilon_i$  merupakan variabel random yang berdistribusi normal dengan mean sama dengan nol dan varians konstan atau  $\varepsilon_i \sim NID(0, \sigma^2)$  dan  $\varepsilon_i$  dan  $\varepsilon_j$  tidak berkorelasi untuk  $i \neq j$ , yaitu  $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ . Untuk

menduga parameter  $\beta_j$  yang tidak diketahui pada persamaan (1) digunakan metode kuadrat terkecil karena metode ini proses perhitungannya sederhana. Solusi penduga kuadrat terkecil  $\hat{\beta}$  dari parameter  $\beta_j$  untuk persamaan (1) adalah  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$ .

### Uji Hipotesis untuk Koefisien Regresi

#### Secara Simultan

Pengujian ini digunakan untuk mengukur ketepatan model dengan menentukan apakah ada hubungan linier antara variabel tidak bebas  $Y$  dan variabel bebas  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Hipotesis untuk pengujian koefisien regresi secara simultan adalah sebagai berikut

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ untuk minimal satu } j \text{ dengan } j = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Penolakan  $H_0$  menunjukkan bahwa minimal ada satu variabel bebas  $X_j$  mendukung signifikansi pada model. Daerah penolakan  $H_0$  adalah sebagai berikut:

$F > F_{\alpha, k, n-k}$ . Jumlah Kuadrat Total ( $JKT$ ) adalah penjumlahan dari Jumlah Kuadrat Regresi ( $JKR$ ) dan Jumlah Kuadrat Galat ( $JKG$ ) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$JKT = JKR + JKG$$

dengan

$$JKT = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2}{n} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2}{n};$$

$$JKG = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T\mathbf{Y};$$

$$JKR = \hat{\beta}^T \mathbf{X}^T\mathbf{Y} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2}{n}.$$

Uji statistik yang digunakan adalah

$$F = \frac{JKR/k}{JKG/(n-k)} = \frac{KTR}{KTG}.$$

#### Secara Individual

Pengujian ini digunakan untuk mengetahui pengaruh masing-masing koefisien regresi terhadap variabel tidak bebas  $Y$  secara individual. Untuk menguji koefisien regresi secara individual, digunakan uji- $t$ . Hipotesis untuk pengujian koefisien regresi secara individu adalah

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, k.$$

Uji statistiknya adalah  $t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}}$  dengan  $C_{jj}$  = elemen diagonal  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  yang bersesuaian

dengan  $\hat{\beta}_j$ ,  $\hat{\sigma}^2$  = perkiraan varian error, yaitu:

$$\hat{\sigma}^2 = KTG = \frac{JKG}{n-k} = \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}}{n-k}$$

Penolakan  $H_0$  menunjukkan bahwa variabel bebas  $X_j$  mendukung signifikansi pada model tersebut. Daerah penolakan  $H_0$  adalah  $|t_0| > t_{\alpha/2, n-k}$

### Koefisien Determinasi Berganda ( $R^2$ )

Koefisien determinasi berganda ( $R^2$ ) digunakan untuk mengukur kecocokan sebuah model regresi berganda. Rumus koefisien determinasi berganda adalah  $R^2 = \frac{JKR}{JKT}$ . Jika nilai  $R^2$  mendekati 1 makin baik kecocokan data dengan model dan jika nilai  $R^2$  mendekati 0 makin jelek kecocokan data dengan model.

### Metode Regresi Bertatar (*The Stepwise Regressions Method*)

Dalam membuat model peramalan, belum pasti bahwa seluruh variabel bebas perlu untuk model. Dalam keadaan tersebut, dilakukan seleksi variabel-variabel bebas untuk memperoleh sebuah model yang memuaskan. Metode regresi bertatar hanya akan memeriksa model regresi terbaik yang mengandung sejumlah tertentu variabel bebas. Dimulai dengan menyisipkan variabel bebas satu demi satu sampai diperoleh persamaan regresi yang lebih baik. Urutan penyisipannya ditentukan dengan menggunakan koefisien korelasi parsial sebagai ukuran pentingnya variabel yang masih diluar persamaan. Untuk setiap kali pemasukan variabel bebas yang lain pada model, dilakukan pengujian terhadap model (uji- $F$ ,  $R^2$ , uji- $t$ ) untuk tetap memasukkan variabel bebas atau mengeluarkannya[1].

## 2. Metodologi

Sumber data yang digunakan dalam penulisan ini adalah data sekunder dari Agroindustri “Sari Mayang” Desa Jubung Kecamatan Sukorambi Kabupaten Jember. Untuk mendapatkan fungsi kendala tujuan, digunakan analisis regresi linier berganda dan menganalisisnya menggunakan komputer dengan software SPSS versi 10.00.

Fungsi kendala tujuan pemasakan dan penjualan nata de coco dalam model *goal programming* terdiri dari fungsi linier dengan lebih dari satu variabel bebas  $X$  yang diperoleh dari model regresi linier berganda setelah diubah kedalam bentuk yang sesuai dengan model *goal programming*. Adapun perubahan-perubahan yang terjadi pada model regresi linier berganda setelah disesuaikan dengan model *goal programming* adalah sebagai berikut:

1.  $X_j$  adalah variabel keputusan ke- $j$  pada model *goal programming* sedangkan pada model regresi linier berganda  $X_i$  adalah variabel bebas.

2.  $a_{pj}$  adalah koefisien yang berhubungan dengan  $X_j$  untuk tujuan ke- $p$  pada model *goal programming* sedangkan pada model regresi linier berganda analog dengan  $\beta_j$  yaitu koefisien regresi.
3. Menambah variabel penyimpangan ( $d_p^+$  dan  $d_p^-$ ) pada model regresi linier berganda yang diperoleh.
4. Mengganti  $Y_i$  dengan  $b_p$

Langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisis data adalah sebagai berikut:

1. Menentukan variabel tidak bebas  $Y$ , yaitu  $Y_1$  pemasakan (panci) dan  $Y_2$  penjualan (Rp). Satuan panci untuk pemasakan adalah ukuran banyaknya panci dengan diasumsikan bentuk dan volume panci adalah tetap.
2. Menentukan variabel bebas  $X$ , yaitu  $X_1$  Nata de coco kemasan gelas (buah),  $X_2$  Nata de coco kemasan kecil (buah),  $X_3$  Nata de coco kemasan jumbo (buah) dan  $X_4$  Nata de coco kemasan kilo (buah).
3. Menyusun model regresi linier berganda dengan variabel tidak bebas  $Y_1$  dan  $Y_2$  dan variabel bebas  $X_1, X_2, X_3$ , dan  $X_4$  dilanjutkan dengan regresi bertatar untuk seleksi variabel.

Persamaan regresi yang diperoleh dipakai untuk menyusun fungsi kendala tujuan setelah disesuaikan kedalam model *goal programming*, untuk perhitungannya menggunakan program AB:QM 3.0. Langkah-langkah yang digunakan dalam metode *goal programming* adalah sebagai berikut:

1. Perumusan fungsi tujuan, yaitu meminimalkan pemasakan nata de coco dan memaksimalkan penjualan nata de coco

Model fungsi tujuan adalah sebagai berikut

$$\text{Meminimumkan } Z = d_1^+ + d_2^-$$

dengan

$d_1^+ / d_1^-$  = penyimpangan *overachievement/ underachievement* dari tujuan pemasakan nata de coco

$d_2^+ / d_2^-$  = penyimpangan *overachievement/ underachievement* dari tujuan penjualan nata de coco

2. Perumusan fungsi kendala

- a. Fungsi kendala tujuan, meliputi kendala tujuan pemasakan dan kendala tujuan penjualan.

1. Fungsi kendala tujuan pemasakan

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 + d_1^- - d_1^+ = b_1$$

2. Fungsi kendala tujuan penjualan

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + d_2^- - d_2^+ = b_2$$

dengan  $b_1$  = nilai tujuan pemasakan

$b_2$  = nilai tujuan penjualan

- b. Fungsi kendala struktural, meliputi kendala struktural produksi nata de coco, yaitu  $0 \leq X_j \leq g_j$  dengan  $g_j$  = banyaknya produksi nata de coco kemasan  $j$  (buah).

### 3. Hasil Dan Pembahasan

#### 3.1 Analisis Regresi

Dalam menganalisis menggunakan taraf signifikansi 5% artinya pada uji- $F$  dan uji- $t$   $H_0$  ditolak jika nilai signifikansinya  $\leq 0,05$ . Dari hasil analisis didapatkan model regresi linier berganda dari variabel tidak bebas  $Y_1$  dan  $Y_2$  sebagai berikut:

$$Y_1 = 0,009034 X_1 + 0,003004 X_2 + 0,01184 X_3 + 0,01398 X_4 \quad (2)$$

$$Y_2 = 1300,581 X_4 \quad (3)$$

Dari model yang didapatkan pada persamaan (3) diatas, hanya variabel bebas  $X_4$  yang masuk dalam model. Dalam keadaan tersebut, dilakukan seleksi variabel bebas yang ada dengan memeriksa hanya model regresi terbaik yang mengandung sejumlah tertentu variabel bebas untuk memperoleh sebuah model yang memuaskan. Untuk mencari kemungkinan adanya variabel bebas selain variabel bebas  $X_4$  yang berpengaruh terhadap  $Y_2$  maka digunakan metode regresi bertatar. Dari hasil analisis didapatkan model regresi linier untuk variabel tidak bebas  $Y_2$  adalah sebagai berikut:

$$Y_2 = 172,443 X_1 + 1297,143 X_4 \quad (4)$$

Model regresi linier yang digunakan pada analisis optimasi dengan metode *goal programming* adalah persamaan (2) dan (4).

#### 3.2 Analisis Optimasi

##### a. Perumusan fungsi tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk meminimalkan pemasakan dan memaksimalkan penjualan dari nata de coco. Dalam fungsi tujuan *goal programming*, yang akan diminimumkan adalah penyimpangan terhadap kelebihan pemasakan ( $d_1^+$ ) dan penyimpangan dari kekurangan penjualan ( $d_2^-$ ). Sehingga pada metode goal programming, model fungsi tujuan dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Meminimumkan } Z = d_1^+ + d_2^-$$

##### b. Perumusan fungsi kendala

Tabel 1. Batas Spesifikasi Variabel

Variabel	Judul	Satuan	Batas
Tidak bebas	Pemasakan ( $Y_1$ )	Panci	$\leq 144$
	Penjualan ( $Y_2$ )	Rupiah	$\geq 5.700.300$
Bebas	Nata de coco gelas ( $X_1$ )	Buah	0 – 4608
	Nata de coco kecil ( $X_2$ )	Buah	0 – 2136
	Nata de coco jumbo ( $X_3$ )	Buah	0 – 312
	Nata de coco kilo ( $X_4$ )	Buah	0 – 3840

Dalam meminimalkan pemasakan, perusahaan menginginkan batas maksimal pemasakan adalah 144 panci. Sehingga dalam model lengkap *goal programming* fungsi kendala tujuan meminimalkan pemasakan dapat disusun sebagai berikut:

$$0,009034 X_1 + 0,003004 X_2 + 0,01184 X_3 + 0,01398 X_4 + d_1^- - d_1^+ = 144$$

Dalam memaksimalkan penjualan, perusahaan menginginkan batas minimal penjualan adalah Rp 5.700.300,00. Sehingga dalam model lengkap *goal programming* fungsi kendala tujuan memaksimalkan penjualan dapat disusun sebagai berikut:

$$172,443 X_1 + 1297,143 X_4 + d_2^- - d_2^+ = 5.700.300$$

Batas-batas fungsi kendala untuk jumlah nata de coco adalah

$$0 \leq X_1 \leq 4608$$

$$0 \leq X_2 \leq 2136$$

$$0 \leq X_3 \leq 312$$

$$0 \leq X_4 \leq 3840$$

### Solusi Optimal

Hasil perhitungan solusi kombinasi produk optimal metode *goal programming* yang dapat memberikan penyimpangan minimal dari tujuan pemasakan dan tujuan penjualan yang telah ditentukan adalah  $X_1 = 4608$ ,  $X_2 = 2136$ ,  $X_3 = 312$  dan  $X_4 = 3840$  sebagai variabel keputusan sedangkan variabel penyimpangannya diperoleh  $d_1^+ = 0$ ,  $d_1^- = 38,578$ ,  $d_2^+ = 75.346,464$  dan  $d_2^- = 0$ .

Solusi optimal yang memberikan kombinasi produk optimal dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Penyimpangan kekurangan pemasakan sebesar 39 panci (pembulatan dari 38,578 panci). Sehingga secara keseluruhan pemasakan yang dapat dilakukan adalah sebanyak 105 panci atau pembulatan dari 105,422 panci (144 panci – 38,578 panci).
2. Penyimpangan kelebihan penjualan sebesar Rp 75.346,464. Sehingga secara keseluruhan penjualan yang dapat dicapai adalah sebesar Rp 5.775.646,464 (Rp 5.700.300 + Rp 75.346,464)

Penjelasan hasil solusi optimal tersebut ditulis dalam bentuk tabel akan terlihat sebagai berikut:

Tabel 2. Solusi Optimal Kombinasi Produk

Kendala	Variabel	Solusi	Keterangan
Kendala Tujuan	$Y_1$	105 panci	Optimal
	$Y_2$	Rp 5.775.646,464	Optimal
Kendala Struktural	$X_1$	4608 buah	Optimal
	$X_2$	2136 buah	Optimal
	$X_3$	312 buah	Optimal
	$X_4$	3840 buah	Optimal

### 3.3. Pembahasan

Dari analisis data tersebut diatas didapatkan kombinasi produk optimal yang dapat memberikan pemasakan dan penjualan optimal, yaitu banyaknya nata de coco dengan kemasan gelas sebanyak 4608 buah, kemasan kecil sebanyak 2136 buah, kemasan jumbo sebanyak 312 buah, kemasan kilo sebanyak 3840 buah.

Penyimpangan yang diinginkan dari tujuan pemasakan didapatkan yaitu penyimpangan kekurangan dari pemasakan sebanyak 39 panci sedangkan penyimpangan yang tidak diinginkan bernilai nol. Sehingga dalam pemenuhan tujuan pemasakan yang telah ditetapkan yaitu pemasakan maksimal adalah 144 panci dapat terpenuhi. Pemasakan nata de coco yang optimal sebanyak 105 panci dan masih memenuhi batas spesifikasi variabel yaitu kurang dari 144 panci.

Pada penjualan, penyimpangan yang diinginkan didapatkan yaitu penyimpangan kelebihan dari penjualan sebesar Rp 75.346,464 sedangkan penyimpangan yang tidak diinginkan bernilai nol. Sehingga dalam pemenuhan tujuan penjualan yang telah ditetapkan yaitu penjualan minimal sebesar Rp 5.700.300 adalah terpenuhi. Penjualan nata de coco optimal yang dihasilkan sebesar Rp 5.775.646,464 dan masih memenuhi batas spesifikasi variabel yaitu lebih dari Rp 5.700.300.

## 4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan dapat ditarik kesimpulan bahwa dengan metode *goal programming* diperoleh kombinasi produk optimal yang menyelesaikan dua tujuan sekaligus yaitu meminimalkan pemasakan dan memaksimalkan penjualan dengan cara meminimalkan penyimpangan yang tidak diinginkan dari tujuan-tujuan. Kombinasi produk optimal yang diperoleh adalah nata de coco gelas sebanyak 4608 buah, nata de coco kecil sebanyak 2136 buah, nata de coco jumbo sebanyak 312 buah, nata de coco kilo sebanyak 3840 buah. Dengan kombinasi produk yang seperti itu, maka pemasakan yang optimal yang harus dilakukan adalah 105 panci dan penjualan yang dihasilkan Rp 5.775.646,464.

## Daftar Pustaka

- [1] Hiller, F.S. & Lieberman, G.J., (1994), *Pengantar Riset Operasi*, Edisi ke-5 (Alih Bahasa Ellen Gunawan dan Ardi Wirda Mulia), Jakarta, Erlangga.
- [2] Hines, W.W. & Montgomery, D.C., (1990), *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*, Edisi ke-2 (Alih Bahasa Rudiansyah), Jakarta, UI Jakarta.
- [3] Markland, R.E., (1987), *Quantitative Methods Applications to Managerial Decision Making*, New York, John Wiley & Sons.
- [4] Neter, J., Wasserman, W., & Kutner, M.H., (1990), *Applied Linear Statistical Models*, 3<sup>rd</sup> edition, USA, Donnelley & Sons Company.