

PENENTUAN JENIS FUNGSI BASIS RADIAL DALAM DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD

**(On The Choice of Radial Basis Function
in Dual Reciprocity Bondary Element Method)**

Millatuz Zahroh

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
Jalan Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia
Email: millatuz@unej.ac.id

Abstract. Problems involving modified Helmholtz equation are considered in this paper. To solve the problem numerically, dual reciprocity boundary element method (DRBEM) is employed. Some stages have been passed, using reciprocal relation to approximate boundary integral and domain integral in modified Helmholtz equation. Finally, linear equation system is obtained in the form of matrix. A MATLAB program is used to calculate the solutions of $\phi(x, y)$. Then, solutions of $\phi(x, y)$ are compared between the exact solution and the numerical solution of modified Helmholtz equation. The numerical results are based on the using of three types of radial basis function to approximate domain integral, such as polinomial, poliharmonik spline and linear types. The solutions show that the polinomial and poliharmonik spline types are more stable and approach to exact solution than linear types.

Keywords: DRBEM, modified Helmholtz equation, radial basis function
MSC2020 : 65J05

1. Pendahuluan

Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM) adalah metode komputasi numerik yang digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) yang diformulasikan dalam bentuk persamaan integral, pada permasalahan terkait fisika matematis dan teknik [3]. Seperti, persamaan Laplace, persamaan Helmholtz, persamaan konveksi-difusi, persamaan potensial dan aliran viskos, serta persamaan elektrostatik dan elektromagnetik.

Metode DRBEM sebenarnya merupakan pengembangan dari metode *Boundary Element Method* (BEM) yaitu metode pendiskritisasian batas domain untuk mengevaluasi persamaan integralnya. Ide utama BEM adalah solusi dari PDP diekspresikan dalam persamaan integral batas yang mengandung solusi fundamental dari PDP tersebut. Namun, tidak semua PDP mudah dicari solusi fundamentalnya, contohnya pada persamaan Helmholtz, yang solusi fundamentalnya sulit dicari dan tidak tunggal. Oleh karena itu, dikembangkanlah DRBEM.

Prosedur penurunan persamaan Helmholtz menggunakan DRBEM dilakukan dua kali *relasi reciprocal* dalam teorema Gauss-Green. Pertama, digunakan untuk memperoleh persamaan integral batas dan yang kedua untuk memperoleh pendekatan integral domain. Dalam mengaproksimasi integral domain diperlukan suatu fungsi, yaitu berupa fungsi basis radial.

Fungsi basis radial adalah suatu fungsi barisan teknik interpolasi eksak untuk mencari pendekatan permukaan dari tiap titik sampel yang akan dihitung. Terdapat beberapa fungsi basis radial diantaranya, tipe gaussian, tipe polinomial, tipe multikuadrat, tipe poliharmonik *spline*, tipe *thin plate spline*, dan lain sebagainya. Dalam beberapa penelitian memanfaatkan DRBEM yang dilakukan oleh Ang [2], Sholekhuddin [4], dan Zahroh [5], tipe fungsi basis radial yang digunakan adalah tipe polinomial. Penelitian selanjutnya diarahkan untuk mengetahui keakurasian fungsi basis radial yang lain disamping tipe polinomial

Paper ini membahas perbandingan tiga tipe basis radial yaitu basis radial tipe polinomial $1 + r^2 + r^3$, tipe poliharmonik spline r^3 dan tipe linear $1 + r$. Tiga fungsi basis radial ini dipilih sedemikian sehingga nilai matriks yang dievaluasi atas jarak tiap titik kolokasi hasil diskritisasi tidak menghasilkan matriks singular. Kekonvergenan dan besarnya error dibandingkan dengan solusi eksaknya. Hasil ini didapatkan melalui perhitungan numerik DRBEM pada persamaan Helmholtz termodifikasi untuk memberikan gambaran dalam penentuan fungsi basis radial pada bidang-xy.

Diberikan Persamaan Helmholtz termodifikasi dua dimensi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = g(x, y) - h(x, y)\phi$$

dengan syarat batas

$$\phi = f_1(x, y) \text{ untuk } (x, y) \in C_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(x, y) \text{ untuk } (x, y) \in C_2$$

dengan C_1 dan C_2 adalah dua buah kurva yang tidak berpotongan sedemikian sehingga $C_1 \cup C_2 = C$

Relasi reciprocal dilakukan untuk mengubah persamaan Helmholtz menjadi persamaan integral sebagai berikut

$$\int_C \left(\Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial (x, y)}{\partial} - \phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial} \right) d$$

$$= \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g - h\phi(x, y)) d$$

dengan nilai $\phi(x, z; \xi, \eta)$ merupakan solusi fundamental Laplace dan $\phi(x, y)$ adalah solusi persamaan Helmholtz yang akan dicari nilainya pada domain $R \cup C$

Dalam menentukan nilai integral domain atas R , diperlukan pendekatan menggunakan fungsi basis radial. Fungsi basis radial ρ yang berpusat di (a, b) adalah sebuah fungsi yang berbentuk $\rho(x, y; a, b) = G(r(x, y; a, b))$, dengan $r(x, y; a, b) = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Dapat dikatakan, $\rho(x, y; a, b)$ adalah fungsi yang bergantung pada jarak antara titik (x, y) dan (a, b) . Dalam penelitian ini dilakukan pendekatan menggunakan tiga tipe fungsi basis radial yaitu

- Polinomial
 $\rho_1 = 1 + r^2(x, y; a, b) + r^3(x, y; a, b)$
- Poliharmonik spline
 $\rho_2 = r^3(x, y; a, b)$
- Tipe Linear
 $\rho_3 = 1 + r(x, y; a, b)$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi basis radial dan dipilih titik kolokasi $(a^{(j)}, b^{(j)})$ dengan $j = 1, 2, \dots, N, N + 1, \dots, N + M$. N merupakan jumlah titik kolokasi yang terletak pada kurva dan M merupakan titik kolokasi yang terletak pada domain. Sehingga diperoleh pendekatan

$$\iint_R \left(\Phi(x, y; \xi, \eta) g(a^{(j)}, b^{(j)}) - h\phi(a^{(j)}, b^{(j)}) \right) d$$

$$\approx \sum_{m=1}^{N+M} \beta(m) \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) \rho(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)})$$

$\beta(m)$ adalah konstanta yang akan dicari nilainya dan $\rho(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)})$ merupakan fungsi basis radial dengan titik pusat $(a^{(m)}, b^{(m)})$.

Dengan demikian

$$\beta(m) = \sum_{m=1}^{N+M} \rho^{-1}(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) g(a^{(j)}, b^{(j)}) - h\phi(a^{(j)}, b^{(j)})$$

Dalam melakukan relasi *reciprocal* kedua maka, diperlukan suatu fungsi tertentu, misalkan fungsi $\chi(x, y; a, b)$, sedemikian sehingga fungsi tersebut memenuhi persamaan

$$\frac{\partial^2 \chi(x, y, a, b)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi(x, y, a, b)}{\partial y^2} = \rho(x, y, a, b)$$

Selanjutnya, persamaan fungsi $\chi(x, y; a, b)$ diubah ke persamaan sistem koordinat kutub dan diinginkan solusi χ adalah solusi yang axisimetris atau tidak bergantung pada sudut, maka didapatkan

$$\chi_1(x, y; a, b) = \frac{1}{4}r^2(x, y; a, b) + \frac{1}{16}r^4(x, y; a, b) + \frac{1}{25}r^5(x, y; a, b)$$

$$\chi_2(x, y; a, b) = \frac{1}{25}r^5(x, y; a, b)$$

$$\chi_3(x, y; a, b) = \frac{1}{4}r^2(x, y; a, b) + \frac{1}{9}r^3(x, y; a, b)$$

Kemudian, dilakukan relasi reciprocal kedua hingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \iint_R \Phi(x, y; \xi, \eta) (g(x, y) - h\phi(x, y)) dx dy \\ &= \sum_{j=1}^{N+M} \left[\sum_{m=1}^{N+M} \omega(a^{(m)}, b^{(m)}; a^{(j)}, b^{(j)}) \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) \right] \\ & \quad [g(a^{(j)}, b^{(j)}) - h\phi(a^{(j)}, b^{(j)})] \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) &= \lambda(\xi, \eta) \chi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) + \\ & \int_C \left(\Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \chi(x, y; a^{(m)}, b^{(m)})}{\partial n} - \chi(x, y; a^{(m)}, b^{(m)}) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

dan

$$\rho^{-1}(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) = \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)})$$

Menggunakan formulasi integral setelah dilakukan pendiskritisasian pada batas domain C diperoleh persamaan integral batas

$$\int_C \left(\phi(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} - \Phi(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \right) ds$$

$$= \sum_{k=1}^N \left(\phi^{(k)} F_2^{(k)}(\xi, \eta) - p^{(k)} F_1^{(k)}(\xi, \eta) \right),$$

dengan

$$F_1^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) ds$$

$$F_2^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_{C^{(k)}} \frac{\partial}{\partial n} [\ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)] ds.$$

Berikutnya, dengan mensubstitusikan solusi persamaan integral domain dan integral batas, maka diperoleh

$$\lambda(\xi, \eta) \phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N \left(\phi^{(k)} F_2^{(k)}(\xi, \eta) - p^{(k)} F_1^{(k)}(\xi, \eta) \right) +$$

$$\left(\sum_{j=1}^{N+M} [g(a^{(j)}, b^{(j)}) - h\phi(a^{(j)}, b^{(j)})] \right.$$

$$\left. \left[\sum_{m=1}^{N+M} \omega(a^{(m)}, b^{(m)}; a^{(j)}, b^{(j)}) \Psi(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}) \right] \right)$$

untuk $(\xi, \eta) \in R \cup C$.

Akhirnya, dengan mensubstitusikan titik-titik kolokasi pada batas domain dan interior domain diperoleh sistem persamaan linier (SPL) atas persamaan Helmholtz termodifikasi sebagai berikut

$$\sum_{k=1}^{N+M} a^{(nk)} z^{(k)} = - \sum_{j=1}^{N+M} \mu^{(nk)} g(a^{(j)}, b^{(j)}) + \sum_{k=1}^N b^{(nk)},$$

Koefisien $a^{(nk)}$, $b^{(nk)}$, dan $z^{(k)}$ untuk $k = 1, 2, \dots, N$ adalah,

$$a^{(nk)} = \begin{cases} -F_1^{(k)}(a^{(n)}, b^{(n)}), & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)} \\ F_2^{(k)}(a^{(n)}, b^{(n)}) - \frac{1}{2}\delta^{(nk)} - \mu^{(nk)}h, & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)} \end{cases}$$

$$b^{(nk)} = \begin{cases} \phi^{(k)} \left(-F_2^{(k)}(a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{1}{2}\delta^{(nk)} + \mu^{(nk)}h \right), & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)} \\ p^{(k)} F_1^{(k)}(a^{(n)}, b^{(n)}), & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)} \end{cases}$$

$$z^{(k)} = \begin{cases} p^{(k)}, & \text{jika } \phi \text{ diketahui pada } C^{(k)} \\ \phi^{(k)}, & \text{jika } \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ diketahui pada } C^{(k)}. \end{cases}$$

Sedangkan untuk $k = N + 1, N + 2, \dots, N + M$, koefisien $b^{(k)}$, dan $z^{(k)}$ sebagai berikut,

$$a^{(nk)} = -\delta^{(nk)} - h\mu^{(nk)}$$

$$z^{(k)} = \phi^{(k)}.$$

Koefisien $\delta^{(nk)}$ untuk $k = 1, 2, \dots, N + M, n = 1, 2, \dots, N + M$ adalah,

$$\delta^{(nk)} = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \neq k \\ 1, & \text{jika } n = k. \end{cases}$$

Dan

$$\mu(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)}) = \omega(a^{(j)}, b^{(j)}; a^{(m)}, b^{(m)})\psi\left(\left(\xi, \eta; a^{(m)}, b^{(m)}\right)\right)$$

Dalam hal ini, *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM) digunakan untuk menyelesaikan persamaan sederhana Helmholtz termodifikasi yang telah diketahui solusi eksaknya. Dari Ang [1] diketahui

$$h(x, y) = \frac{\pi^2}{8} + y,$$

$$g(x, y) = \frac{\pi^2}{8}xy + y\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + xy^2,$$

Dengan syarat batas

$$\phi(x, y) = 0, \text{ untuk } 0 < y < 1 \text{ dan } x = 0,$$

$$\phi(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + y, \text{ untuk } 0 < y < 1 \text{ dan } x = 1,$$

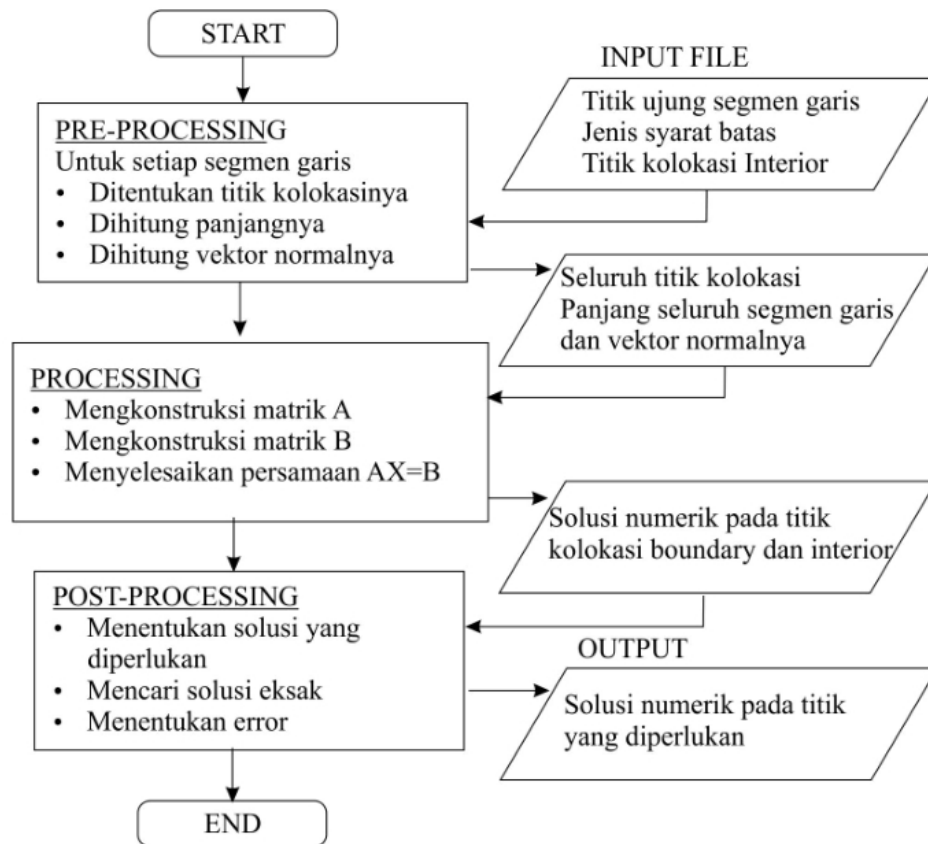
$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } y = 0,$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + x, \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } y = 1.$$

Dan diketahui solusi eksaknya adalah

$$\phi(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + xy$$

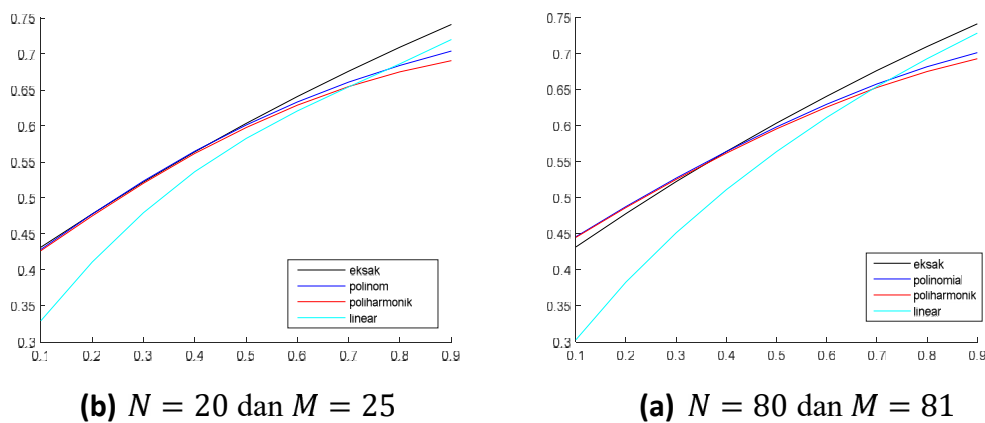
2. Metodologi



3. Hasil dan Pembahasan

Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM) digunakan untuk menyelesaikan persamaan Helmholtz termodifikasi yang telah diketahui solusi eksaknya dalam Ang [1]. Domain memiliki bentuk geometri persegi, sehingga pemilihan jumlah titik pada batas domain merupakan titik yang berkelipatan empat untuk C_1, C_2, C_3 , dan C_4 . Selanjutnya pemilihan jumlah titik interior berupa bilangan kuadrat. Hal ini dimaksudkan agar titik-titik kolokasi yang dipilih menyebar rata pada daerah R

Dilakukan dua kali pemilihan jumlah titik kolokasi pada evaluasi DRBEM tiap tipe fungsi basis radial. Pertama titik kolokasi batas domain $N = 20$ dan interior domain $M = 25$, dan yang kedua $N = 80$ dan $M = 81$. Selanjutnya dicari solusi $\phi(x, y)$ pada domain sepanjang sumbu $x = 0,5$ dan dibandingkan solusi numerik DRBEM dengan tiga tipe fungsi basis radial terhadap nilai eksaknya pada dua macam pemilihan titik kolokasi dan diperoleh grafik sebagai berikut



Gambar 1 (a,b). Grafik perbandingan solusi eksak dengan solusi numerik DRBEM berupa tiga tipe fungsi basis radial

Gambar 1 (a,b) menunjukkan bahwa grafik solusi eksak $\phi(x, y)$ persamaan Hemhotz termodifikasi didekati oleh grafik solusi numerik DRBEM berupa tiga tipe fungsi radial basis, yaitu tipe polinomial, poliharmonik spline dan linear. Pada Gambar 1(a) dan 1(b) dengan titik kolokasi sejumlah 55 titik dan 161 titik, terlihat bahwa grafik solusi yang didekati dengan fungsi basis radial tipe polinomial dan poliharmonik spline cenderung lebih mendekati solusi eksak dibanding tipe linear. Selain itu, terlihat pula tipe polinomial lebih mendekati solusi eksak dibanding tipe poliharmonik spline.

Selanjutnya, hasil perhitungan numerik $\phi(x, y)$ digunakan untuk mengevaluasi solusi persamaan Helmholtz termodifikasi pada titik-titik tertentu untuk dibandingkan dengan solusi eksaknya. Sehingga maksimal error di semua titik kolokasi dapat direpresentasikan pada fungsi basis radial tipe polinomial, poliharmonik spline dan linear. Dengan demikian, hal tersebut dapat dijadikan acuan dalam menentukan keakurasian fungsi basis radial.

Tabel 1. Maksimal error tiga tipe fungsi basis radial dengan titik kolokasinya

Tipe Fungsi Basis Radial	Maksimal Error	
	$N = 20$ dan $M = 25$	$N = 80$ dan $M = 81$
$1 + r^2 + r^3$	0.1691	0.0341
r^3	0.157	0.0329
$1 + r$	0.1614	0.0893

Maksimal error di seluruh domain pada tipe polinomial, poliharmonik spline dan tipe linear pada titik kolokasi sejumlah 55 dan 161 ditunjukkan pada Tabel 1. Dari tabel tersebut dapat diketahui bahwa maksimal error pada pendekatan fungsi basis radial, tipe multikuadratik paling kecil dibanding dengan pendekatan fungsi basis radial yang lain. Sedangkan tipe linear menghasilkan error yang relatif lebih besar dibanding fungsi basis radial lain. Selain itu, dapat diperhatikan pula, semakin banyak titik kolokasi yang di-input baik pada batas domain ataupun pada interior maka semakin kecil pula nilai errornya.

4. Kesimpulan

Permasalahan dalam persamaan Helmholtz termodifikasi telah diselesaikan secara numerik dengan memanfaatkan *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM). Penyelesaian integral domain pada DRBEM, didekati dengan tiga tipe fungsi radial basis yaitu tipe polinomial, tipe poliharmonik spline dan tipe linear, hingga diperoleh solusi numerik $\phi(x, y)$ dibandingkan dengan solusi eksaknya.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi basis radial tipe polinomial dan poliharmonik spline cenderung lebih mendekati solusi eksak dibanding tipe linear, dan tipe polinomial lebih mendekati solusi eksak dibanding tipe poliharmonik spline. Selain itu, diperoleh urutan nilai maksimal error pada permasalahan ini yaitu poliharmonik spline < polinomial < linear

Daftar Pustaka

- [1] Ang, W.T., (2007), *A Beginners Course in Boundary Element Methods*, Universal Publishers, Florida.
- [2] Ang, WT, (2002), A Laplace transformation dual-reciprocity boundary element method for a class of two-dimensional microscale thermal problems, *Engineering Computations* 19, PP: 467-478.
- [3] Katsikadelis, J.T., (2002), *Boundary Element: Theory and Applications*, Elsevier Science, Oxford.
- [4] Solekhuin I, (2016), Water infiltration from periodic trapezoidal channels with different types of root-water uptake, *Far East Journal of Mathematical Sciences* 100, PP: 2029-2040.
- [5] Zahroh, M dan I Solekhuin, (2019), Steady state conditions predictions of time-dependent infiltration problems: an LTDRM with a predictor-corrector scheme approach, *Journal of Physics: Conference Series* 1280, PP: 022-039

