Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 53 – 64
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

BI-DIMENSI METRIK DARI GRAF ANTIPRISMA

(*Bi-Metric Dimension of Antiprism Graph*)

M. Ismail Marzuki[1], Hendy[2]

[1]Universitas Pesantren Tinggi Darul 'ulum, Kompleks PP Darul Ulum Peterongan, Jombang
E-mail: ismail_marzuki995@yahoo.com

[2]Universitas Kediri, Jl Selomangleng No 1 Kediri
E-mail: hendy@unik-kediri.ac.id

Abstract. Let $G = (V, E)$ be a simple and connected graph. For each $x \in V(G)$, it is associated with a vector pair (a, b), denoted by S_x, corresponding to subset $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq V(G)$, with $a = (d(x, s_1), d(x, s_2), \dots, d(x, s_k))$ and $b = (\delta(x, s_1), \delta(x, s_2), \dots, \delta(x, s_k))$. $d(v, s)$ is the length of shortest path from vertex v to s, and $\delta(v, s)$ is the length of the furthest path from vertex v to s. The set S is called the bi-resolving set in G if $S_x \neq S_y$ for any two distinct vertices $x, y \in V(G)$. The bi- metric dimension of graph G, denoted by $\beta_b(G)$, is the minimum cardinality of the bi-resolving set in graph G. In this study we analyze bi-metric dimension in the antiprism graph (A_n). From the analysis that has been done, it is obtained the result that bi-metric dimension of graph A_n, $\beta_b(A_n)$ is 3.

Keywords: *Antiprism graph, bi-metric dimension, bi-resolving set.*
MSC 2020: 05C12

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang mempelajari konfigurasi himpunan simpul dan keterhubungan simpul yang diwakili oleh sisi. Teori graf pertama kali digunakan pada permasalahan Jembatan Konigsberg. Permasalahan jembatan tersebut dapat dinyatakan ke dalam bentuk graf dengan merepresentasikan daratan sebagai simpul (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi (*edge*).

Teori graf semakin berkembang pesat hingga saat ini, salah satu perkembangan teori graf tentang himpunan pembeda yaitu pada bahasan konsep dimensi metrik dan bi-dimensi metrik yang merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali oleh Slater pada tahun 1975, setelah itu diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Dimensi metrik dari graf G, dinotasikan dengan $\dim(G) = \beta(G)$, adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda pada graf G. Beberapa penelitian tentang dimensi metrik dapat dilihat di [1, 2, 4, 5, 6].

Pada tahun 2014, Raghavendra, *et al*. [6] memperkenalkan konsep baru mengenai dimensi metrik yaitu Bi-dimensi metrik. Bi-dimensi metrik merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda-bi. Penelitian tentang bi-dimensi metrik dari graf yang telah dilakukan oleh Raghavendra, menghasilkan beberapa teorema diantaranya pada graf lintasan, graf lengkap, graf $K_1 \odot P_n$, graf $P_m \odot P_n$, graf P_n^k dan graf C_n^k.

Sejauh ini penelitian tentang bi-dimensi metrik dari graf antiprisma belum dilakukan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dilakukan analisa tentang bi-dimensi metrik dari graf antiprisma.

2. Kajian Teori

Graf

Sebuah graf $G = (V, E)$ terdiri dari V, himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*) dan E, himpunan dari sisi-sisi (*edges*). Setiap sisi memiliki satu simpul atau dua simpul yang menghubungkan dengan sisi tersebut, simpul-simpul tersebut dinamakan titik ujung. Sebuah sisi dikatakan terhubung jika memiliki simpul ujung. Dua titik u dan v dinamakan berdekatan (*adjacent*) di G, jika u dan v adalah simpul akhir dari sisi e di G. Demikian sebuah sisi e dinamakan bersisian (*incident*) simpul u dan v, e dikatakan menghubungkan u dan v.

Himpunan simpul yang berdekatan dari simpul v di $G = (V, E)$, dinotasikan $N(A)$ adalah tetangga (berdekatan) dari v. Jika A subset dari V, dinotasikan $N(A)$ adalah himpunan simpul-simpul di G yang berdekatan paling sedikit satu simpul di A. Derajat (*degree*) dari sebuah simpul di graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut, kecuali gelang (*loop*) dalam sebuah simpul berkontribusi 2 dalam derajat simpul. Derajat dari titik v dinotasikan dengan *deg* (v) [7].

Graf Antiprisma

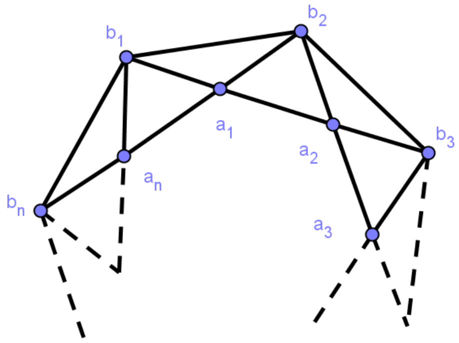
Graf anti-prisma dinotasikan dengan A_n untuk $n \geq 3$, yang memiliki simpul sebanyak 2*n*. Graf anti-prisma terdiri dari sebuah lingkaran luar *n*-simpul $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, sebuah lingkaran dalam *n*-simpul $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$, dan sebuah himpunan dari *n* jari-jari $b_i a_i$ dan $b_{i+1} a_i$, $i = 1, 2, .., n$ dimana $n + i$ adalah diambil dari modulo *n* [3]. Graf anti-prisma termasuk keluarga graf teratur dengan memiliki derajat sebanyak 4 dari setiap simpulnya, seperti yang terlihat pada Gambar 1.

Lintasan

Lintasan adalah perjalanan sederhana yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Lintasan yang panjangnya *n* dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 53 – 64
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

G adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, …. , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G [7]. Untuk setiap simpul-simpul u dan v dalam graf terhubung G, jarak d (u, v) adalah panjang dari lintasan terpendek antara simpul u dan simpul v pada G. Jarak $\delta(v, s)$ adalah panjang lintasan terjauh dari simpul u ke v.



Gambar 1. Struktur graf antiprisma.

Himpunan Pembeda-Bi

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana dan terhubung. Untuk setiap $x \in V(G)$, diasosiasikan sebuah pasangan vektor (a, b), dinotasikan oleh S_x, yang bersesuaian dengan subset $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq V(G)$, dengan $a = (d(x, s_1), d(x, s_2), \dots, d(x, s_k))$ dan $b = (\delta(x, s_1), \delta(x, s_2), \dots, \delta(x, s_k))$, dimana $d(v, s)$ adalah jarak terpendek dari simpul v ke s, dan $\delta(v, s)$ adalah jarak terjauh dari titik v ke s. Himpunan S disebut himpunan pembeda-bi di G jika $S_x \neq S_y$ untuk sebarang dua simpul berbeda $x, y \in V(G)$.

Bi-Dimensi Metrik

Bi-dimensi metrik dari graf G, dinotasikan dengan $\beta_b(G)$, adalah bilangan bulat terkecil k sehingga G memiliki sebuah himpunan pembeda-bi dengan k anggota. Simpul-simpul yang termuat dalam himpunan pembeda-bi S disebut landmark dan himpunan S disebut basis bi-metrik dari G.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada Lemma 1 berikut dipaparkan lintasan terjauh dari graf antiprisma.

Lemma 1. Misalkan A_n adalah graf antiprisma. panjang lintasan terjauh dari v_i ke v_j = $\delta(v_i, v_j)$ dari graf A_n adalah

$$\delta(v_i, v_j) = \begin{cases} 2n & jika\ i = j \\ 2n - 1 & jika\ i \neq j \end{cases}$$

Bukti.

Kasus 1. Jika $i = j$ atau panjang dari dua simpul yang sama.
Graf A_n memuat sirkuit Hamilton karena terdapat lintasan yang melewati setiap simpul tepat satu kali dalam graf A_n dan kembali ke simpul awal. Misalkan $v_i = v_j = a_i$. Terdapat lintasan terjauh $a_i, b_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+2}, a_{i+2}, \dots,$ $b_{n-2}, a_{n-2},$ $b_{n-1},$ $a_{n-1},$ $b_n,$ $a_n,$ $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2},$ $b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, a_i$ dengan panjang lintasan $(v_i, v_i) = 2n$.

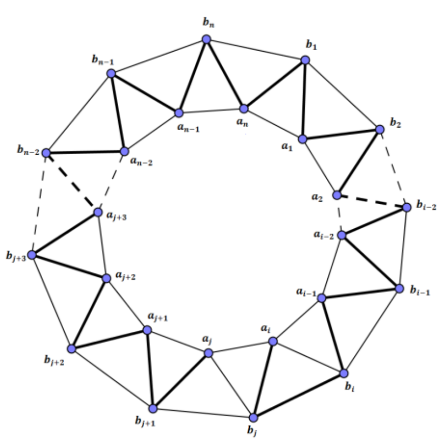
Kasus 2. Untuk sebarang dua simpul berbeda dari graf A_n.

- Untuk $\delta(a_j, a_i)$. Jika $j - i = 1$ atau sebarang dua simpul yang berdekatan di sikel dalam memuat lintasan: $a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2}, a_{n-2}, b_{n-1},$ $a_{n-1}, b_n, a_n,$ $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, b_j, a_i$ dengan panjang lintasan $\delta(a_j, a_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(a_j, a_i)$. Jika $j - i = 2$. Sebarang dua simpul dari sikel dalam memuat lintasan: $a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2},$ $a_{n-2}, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n,$ $a_n, b_1, a_1,$ $b_2,$ $a_2,$ $\dots,$ $b_{i-2},$ $a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, b_{i+1},$ a_{i+1}, a_i dengan panjang lintasan $\delta(a_j, a_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(a_j, a_i)$. Jika $j - i \geq k$ dengan $3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Sebarang dua simpul dari sikel dalam memuat lintasan: $a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2}, a_{n-2}, b_{n-1},$ $a_{n-1},$ $b_n,$ $a_n,$ $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, b_{i+1}, , \dots, b_{j-1}, b_j, a_{j-1}, \dots,$ a_{i+1}, a_i dengan panjang lintasan $\delta(a_j, a_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(b_j, b_i)$. Jika $j - i = 1$ atau sebarang dua simpul yang berdekatan di sikel luar memuat lintasan: $b_j,$ $a_j,$ $b_{j+1},$ $a_{j+1},$ $b_{j+2},$ $a_{j+2},$ $\dots,$ $b_{n-2},$ $a_{n-2},$ $b_{n-1},$ $a_{n-1},$ $b_n,$ $a_n, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots,$ $b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, a_i, b_i$ dengan panjang lintasan $\delta(b_j, b_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(b_j, b_i)$. Jika $j - i = 2$. Sebarang dua simpul dari sikel dalam memuat lintasan: $b_j,$ $a_j,$ $b_{j+1},$ $a_{j+1},$ $b_{j+2},$ $a_{j+2},$ $\dots,$ $b_{n-2},$ $a_{n-2},$ $b_{n-1},$ $a_{n-1},$ $b_n,$ $a_n,$ $b_1,$ $a_1, b_2, a_2, \dots,$ $b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, b_{i+1}, b_i$ dengan panjang lintasan $\delta(b_j, b_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(b_j, b_i)$. Jika $j - i \geq k$ dengan $3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Sebarang dua simpul dari sikel dalam memuat lintasan: $b_j, a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2}, a_{n-2}, b_{n-1},$ $a_{n-1},$ $b_n,$ $a_n, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1},$ $b_{j-1}, b_{j-2},$ $\dots,$ $b_{i+1},$ b_i dengan panjang lintasan $\delta(b_j, b_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(b_j, a_i)$. Jika $i = j$ memuat lintasan: $b_i, b_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+2}, a_{i+2}, \dots, b_{n-2},$ $a_{n-2}, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n, a_n, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots,$ $b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, a_i$ dengan panjang lintasan $\delta(b_i, a_i) = 2n - 1$.

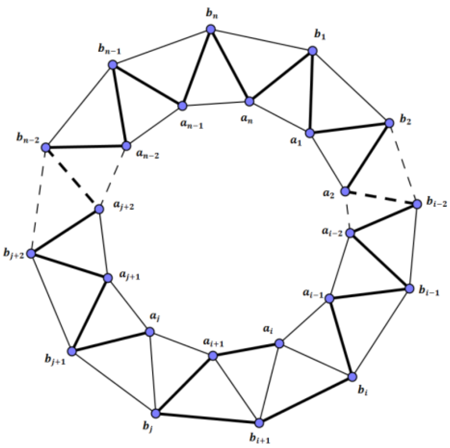
Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 53 – 64
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

- Untuk $\delta(b_j, a_i)$. Jika $j - i = 1$ atau sebarang simpul sikel dalam dan sikel luar yang berdekatan memuat lintasan: $b_j, a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2}, a_{n-2}, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n, a_n, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, a_i$ dengan panjang lintasan $\delta(b_j, a_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(b_j, a_i)$. Jika $j - i = 2$. Sebarang satu simpul sikel dalam dan satu sikel luar memuat lintasan: $b_j, a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2}, a_{n-2}, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n, a_n, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, b_{i+1} a_{i+1}, a_i$ dengan panjang lintasan $\delta(b_j, a_i) = 2n - 1$.
- Untuk $\delta(b_j, a_i)$. Jika $j - i \geq k$ dengan $3 \leq k \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Sebarang satu simpul sikel dalam dan satu sikel luar memuat lintasan: $b_j, a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, a_{j+2}, \dots, b_{n-2}, a_{n-2}, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n, a_n, b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{i-2}, a_{i-2}, b_{i-1}, a_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{i+1}, a_i$ dengan panjang lintasan $\delta(b_j, a_i) = 2n - 1$.

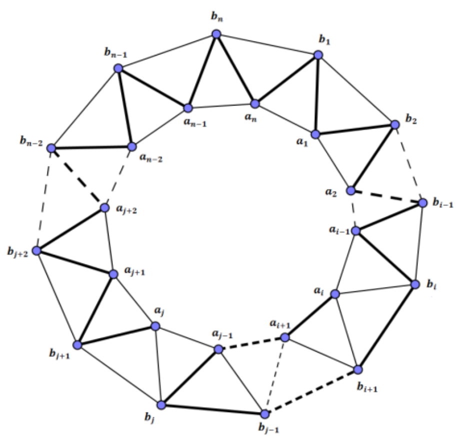
Graf A_n terbukti memiliki Panjang lintasan terjauh $\delta(v_i, v_j) = 2n - 1$ dengan $v_i \neq v_j$ berlaku untuk setiap simpul di graf A_n.



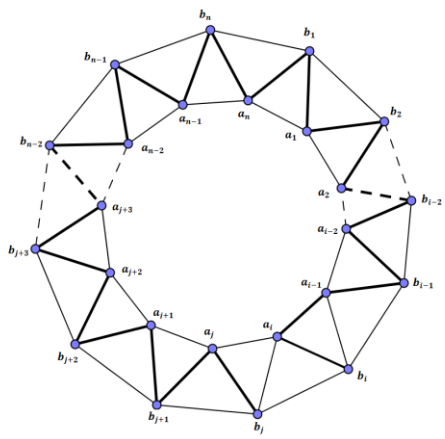
Gambar 2. Lintasan a_j ke , a_i (1).



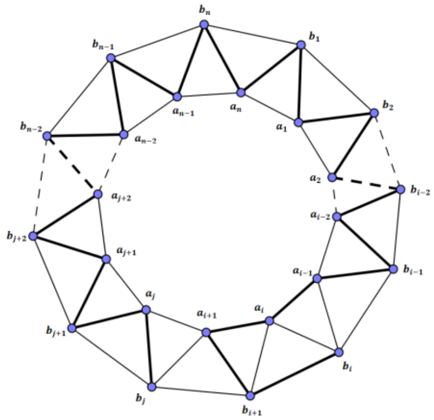
Gambar 3. Lintasan a_j ke , a_i (2).



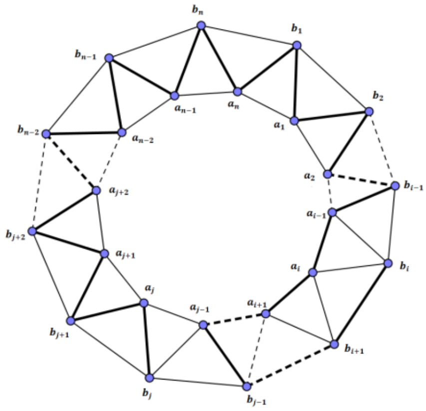
Gambar 4. Lintasan a_j ke a_i (≥3).



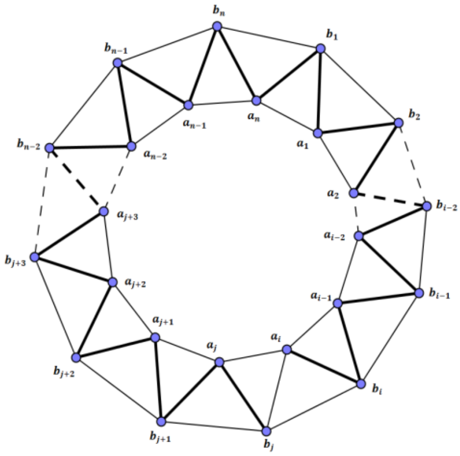
Gambar 5. Lintasan b_j ke b_i (1).



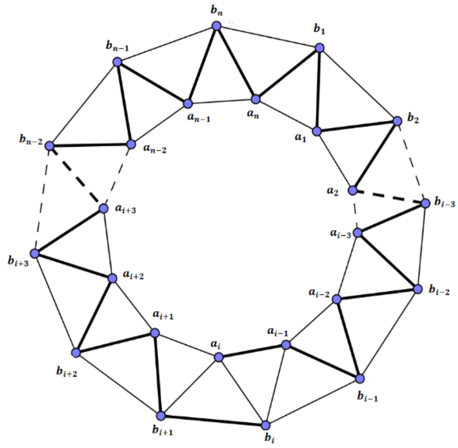
Gambar 6. Lintasan b_j ke b_i (2).



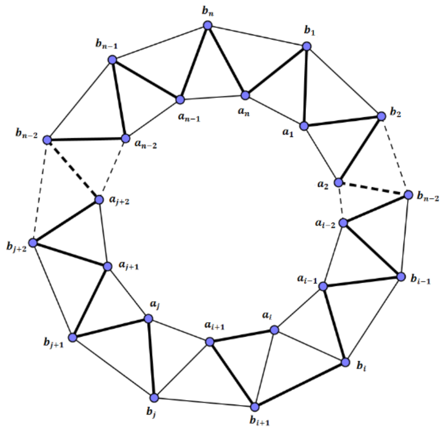
Gambar 7. Lintasan b_j ke b_i (≥3).



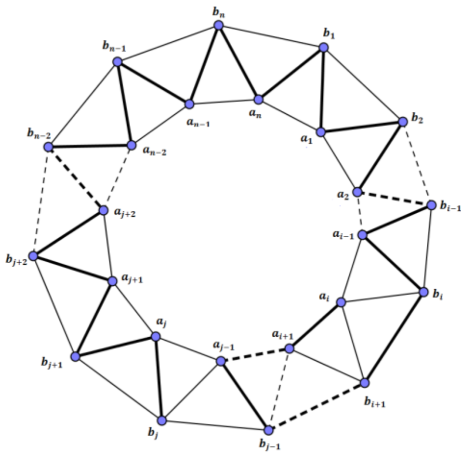
Gambar 8. Lintasan b_j ke a_i (1).



Gambar 9. Lintasan b_j ke a_i (0).



Gambar 10. Lintasan b_j ke a_i (2).



Gambar 11. Lintasan b_j ke a_i (≥3).

Berikutnya diberikan teorema hasil mengenai bi-dimensi metrik dari graf Antiprisma.

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 53 – 64
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

Teorema 2. Misalkan A_n adalah graf antiprisma dengan $n \geq 3$, maka bi-dimensi metrik dari A_n, $\beta_b(A_n) = 3$.

Bukti.
Kasus 1. Untuk n ganjil. Perhatikan $S = \{a_{n-1}, a_n, b_n\} \subseteq V(A_n)$. Akan ditunjukkan S adalah himpunan pembeda-bi di graf A_n. Representasi jarak setiap simpul pada graf A_n terhadap S adalah

$$r(a_i|S) = \begin{cases} ((i+1, i, i+1)(2n-1, 2n-1, 2n-1)), 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2} \\ ((i, i, i+1)(2n-1, 2n-1, 2n-1)), i = \frac{n-1}{2} \\ ((n-1-i, n-i, n-i)(2n-1, 2n-1, 2n-1)), \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-2 \\ ((0,1,1)(2n, 2n-1, 2n-1)), i = n-1 \\ ((1,0,1)(2n-1, 2n, 2n-1)), i = n \end{cases}$$

$$r(b_i|S) = \begin{cases} ((i+1, i, i)\ (2n-1, 2n-1, 2n-1)) & , 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \\ ((n-i, n+1-i, n-i)(2n-1, 2n-1, 2n-1)), & \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-1 \\ ((1,1,0)(2n-1, 2n-1, 2n-1)) & , i = n \end{cases}$$

Dari rumus di atas, dapat diuraikan representasi setiap simpul pada graf A_n terhadap S dibawah ini:

$r(a_1|S) = (\ (2,1,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_2|S) = (\ (3,2,3), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_3|S) = (\ (4,3,4), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r\left(a_{\frac{n-3}{2}} \middle| S\right) = (\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(a_{\frac{n-1}{2}} \middle| S\right) = (\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(a_{\frac{n+1}{2}} \middle| S\right) = (\left(\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(a_{\frac{n+3}{2}} \middle| S\right) = (\left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-3}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r(a_{n-2}|S) = (\ (1,2,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_{n-1}|S) = (\ (0,1,1), (n, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_n|S) = (\ (1,0,1), (2n-1, n, 2n-1))$
$r(b_1|S) = (\ (2,1,1), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$r(b_2|S) = ((3,2,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r\left(b_{\frac{n-3}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-3}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$r\left(b_{\frac{n-1}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$r\left(b_{\frac{n+1}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$r\left(b_{\frac{n+3}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r(b_{n-2}|S) = ((2,3,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$r(b_{n-1}|S) = ((1,2,1), (n-1, 2n-1, 2n-1))$

$r(b_n|S) = ((1,1,0), (2n-1, 2n-1, n))$

Dari representasi di atas menunjukan bahwa $x \neq y$ dimana $x, y \in V(A_n)$ untuk $r(a_x|S) \neq r(a_y|S)$ sehingga tidak ada dua simpul di sikel dalam dengan representasi yang sama. $r(b_x|S) \neq r(b_y|S)$ dan $r(a_x|S) \neq r(b_y|S)$. Dari representasi tersebut tidak memiliki representasi yang sama pada setiap simpulnya. Karena $\forall\, x, y \in V(A_n)$, $r(x|S) \neq r(y|S)$, maka $S = \{a_{n-1}, a_n, b_n\}$ himpunan pembeda-bi di graf A_n. Dengan demikian $\beta_b(A_n) \leq 3$. (1)

Selanjutnya akan dibuktikan $\beta_b(A_n) \geq 3$ untuk n ganjil. Ambil S_2 =$\{a_i\} \subseteq V(A_n)$ adalah himpunan pembeda-bi di graf A_n. Graf A_n bukan graf lintasan, sehingga bi-dimensi metrik dari graf A_n= $\beta_b(A_n) \neq 1$.

Andaikan S_3 adalah himpunan pembeda-bi dengan $|S_3| = 2$. Dengan demikian akan mempunyai berbagai kemungkinan sebagai berikut: S_3 adalah himpunan bagian dari $\{a_i: i = 1,2,3, \ldots, n\}$, tanpa mengurangi keumuman bukti, di ambil satu simpul himpunan pembeda-bi adalah a_1 dan simpul yang lain adalah a_i, $2 \leq i \leq n$. Untuk $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1, a_i\}) = r(b_1|\{a_1, a_i\}) = ((1, i), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $i = \frac{n+1}{2}$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1, a_i\}) = r(b_2|\{a_1, a_i\}) = (\left(1, \frac{n-1}{2}\right), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $i = \frac{n+3}{2}$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1, a_i\}) = r(b_1|\{a_1, a_i\}) = (\left(1, \frac{n-1}{2}\right), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $\frac{n+3}{2} < i \leq n$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1, a_i\}) = r(b_2|\{a_1, a_i\}) = ((1, 2+n-i), (2n-1, 2n-1))$. Hal ini kontradiksi dengan himpunan pembeda-bi $|S_3| = 2$.

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 53 – 64
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

I. S_3 adalah himpunan bagian dari $\{b_i: i = 1,2,3,\dots,n\}$, tanpa mengurangi keumuman bukti, di ambil satu simpul himpunan pembeda-bi adalah b_1 dan simpul yang lain adalah b_i, $2 \le i \le n$. Untuk $2 \le i \le \frac{n-1}{2}$ mempunyai representasi $r(a_n|\{b_1,b_i\}) = r(b_n|\{b_1,b_i\}) = ((1,i),(2n-1,2n-1))$. Untuk $i = \frac{n+1}{2}$ mempunyai representasi $r(a_1|\{b_1,b_i\}) = r(b_n|\{b_1,b_i\}) = (\left(1,\frac{n-1}{2}\right),(2n-1,2n-1))$. Untuk $i = \frac{n+3}{2}$ mempunyai representasi $r(a_n|\{b_1,b_i\}) = r(b_2|\{b_1,b_i\}) = (\left(1,\frac{n-1}{2}\right),(2n-1,2n-1))$. Untuk $\frac{n+3}{2} < i \le n$ mempunyai representasi $r(a_1|\{b_1,b_i\}) = r(b_2|\{b_1,b_i\}) = ((1,2+n-i),(2n-1,2n-1))$. Hal ini kontradiksi dengan himpunan pembeda-bi $|S_3| = 2$.

Satu simpul termasuk dari $\{a_i\} \subset V(A_n)$ dan simpul yang lain termasuk dari $\{b_i\} \subset V(A_n)$, tanpa mengurangi keumuman bukti, di ambil satu simpul himpunan pembeda-bi adalah a_1 dan simpul yang lain adalah b_i, $1 \le i \le n$. Untuk $i = 1$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1,b_i\}) = r(b_2|\{a_1,b_i\}) = ((1,1),(2n-1,2n-1))$. Untuk $i = 2$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1,b_i\}) = r(b_1|\{a_1,b_i\}) = ((1,1),(2n-1,2n-1))$. Untuk $2 < i \le \frac{n+1}{2}$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1,b_i\}) = r(b_2|\{a_1,b_i\}) = ((1,i-2),(2n-1,2n-1))$. Untuk $\frac{n+1}{2} < i \le n$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1,b_i\}) = r(b_1|\{a_1,b_i\}) = ((1,1+n-i),(2n-1,2n-1))$. Hal ini kontradiksi dengan himpunan pembeda-bi $|S_3| = 2$.

Karena $\exists\, x,y \ni V(A_n)$, $x \ne y$, $r(x|S) = r(y|S)$, maka $|S_3| = 2$ bukan himpunan pembeda-bi. Dengan demikian terbukti $\beta_b(A_n) \ge 3$. ....(2)

Dari bukti $\beta_b(A_n) \le 3$ (1) dan $\beta_b(A_n) \ge 3$ (2), maka S dengan kardinalitas 3 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $\beta_b(A_n) = 3$ untuk n ganjil.

Kasus (2). Untuk n genap. Misalkan $S = \{a_{n-1}, a_n, b_n\}$, akan dibuktikan S adalah himpunan pembeda. Representasi setiap simpul pada A_n terhadap S adalah

$$r(a_i|S) = \begin{cases} ((i+1,i,i+1),(2n-1,2n-1,2n-1)) & ,1 \le i \le \frac{n-2}{2} \\ ((n-1-i,n-i,n-i),(2n-1,2n-1,2n-1)) & ,\frac{n}{2} \le i \le n-2 \\ ((0,1,1),(2n,2n-1,2n-1)) & ,i = n-1 \\ ((1,0,1),(2n-1,2n,2n-1)) & ,i = n \end{cases}$$

$$r(b_i|S) = \begin{cases} ((i+1,i,i),(2n-1,2n-1,2n-1)) & ,1 \le i \le \frac{n-2}{2} \\ ((i,i,i),(2n-1,2n-1,2n-1)) & ,i = \frac{n}{2} \\ ((n-i,n+1-i,n-i),(2n-1,2n-1,2n-1)) & ,\frac{n}{2} < i \le n-1 \\ ((1,1,0),(2n-1,2n-1,2n)) & ,i = n \end{cases}$$

Dari rumus di atas, dapat diuraikan representasi setiap simpul pada graf A_n terhadap S dibawah ini:

$r(a_1|S) = ((2,1,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_2|S) = ((3,2,3), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_3|S) = ((4,3,4), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r\left(a_{\frac{n-2}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(a_{\frac{n}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(a_{\frac{n+2}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n-4}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r(a_{n-2}|S) = ((1,2,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_{n-1}|S) = ((0,1,1), (n, 2n-1, 2n-1))$
$r(a_n|S) = ((1,0,1), (2n-1, n, 2n-1))$
$r(b_1|S) = ((2,1,1), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(b_2|S) = ((3,2,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r\left(b_{\frac{n-2}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-2}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(b_{\frac{n}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r\left(b_{\frac{n+2}{2}}\middle|S\right) = (\left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n-2}{2}\right), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$

$\vdots$

$r(b_{n-2}|S) = ((2,3,2), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(b_{n-1}|S) = ((1,2,1), (2n-1, 2n-1, 2n-1))$
$r(b_n|S) = ((1,1,0), (2n-1, 2n-1, n))$

Dari representasi di atas menunjukan bahwa $x, y \in V(A_n)$, $x \neq y$ untuk $r(a_x|S) \neq r(a_y|S)$, $r(b_x|S) \neq r(b_y|S)$ dan $r(a_x|S) \neq r(b_y|S)$. Dari representasi tersebut tidak memiliki representasi yang sama pada setiap simpulnya.

Karena $\forall\, x, y \in V(A_n)$, $x \neq y$, $r(x|S) \neq r(y|S)$, maka $S = \{a_{n-1}, a_n, b_n\}$ himpunan pembeda-bi sehingga $\beta_b(A_n) \leq 3$. .... (3)

Selanjutnya akan dibuktikan $\beta_b(A_n) \geq 3$ untuk n genap. Ambil S_2 =$\{a_i\} \subseteq V(A_n)$ adalah himpunan pembeda-bi di graf A_n. Graf A_n bukan graf lintasan, sehingga bi-dimensi metrik dari graf A_n= $\beta_b(A_n) \neq 1$.

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 53 – 64
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

Andaikan S_3 adalah himpunan pembeda-bi dengan $|S_3| = 2$ maka S_3 akan mempunyai berbagai kemungkinan berikut:

1. S_3 adalah himpunan bagian dari $\{a_i : i = 1,2,3,\dots,n\}$, tanpa mengurangi keumuman bukti, di ambil satu simpul himpunan pembeda-bi adalah a_1 dan simpul yang lain adalah a_i, $2 \le i \le n$. Untuk $2 \le i \le \frac{n}{2}$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1, a_i\}) = r(b_1|\{a_1, a_i\}) = ((1, i), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $i = \frac{n+2}{2}$ mempunyai representasi $r(b_1|\{a_1, a_i\}) = r(b_2|\{a_1, a_i\}) = (\left(1, \frac{n}{2}\right), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $\frac{n+2}{2} < i \le n$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1, a_i\}) = r(b_2|\{a_1, a_i\}) = ((1,2+n-i), (2n-1, 2n-1))$. Hal ini kontradiksi dengan himpunan pembeda-bi $|S_3| = 2$.

2. S_3 adalah himpunan bagian dari $\{b_i : i = 1,2,3,\dots,n\}$, tanpa mengurangi keumuman bukti, di ambil satu simpul himpunan pembeda-bi adalah b_1 dan simpul yang lain adalah b_i, $2 \le i \le n$. Untuk $2 \le i \le \frac{n}{2}$ mempunyai representasi $r(a_n|\{b_1, b_i\}) = r(b_n|\{b_1, b_i\}) = ((1, i), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $i = \frac{n+2}{2}$ mempunyai representasi $r(a_1|\{b_1, b_i\}) = r(a_n|\{b_1, b_i\}) = (\left(1, \frac{n}{2}\right), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $\frac{n+2}{2} < i \le n$ mempunyai representasi $r(a_1|\{b_1, b_i\}) = r(b_2|\{b_1, b_i\}) = ((1,2+n-i), (2n-1, 2n-1))$. Hal ini kontradiksi dengan himpunan pembeda-bi $|S_3| = 2$.

3. Satu simpul anggota dari $\{a_i\} \subset V(A_n)$ dan simpul yang lain anggota dari $\{b_i\} \subset V(A_n)$, tanpa mengurangi keumuman bukti, di ambil satu simpul himpunan pembeda-bi adalah a_1 dan simpul yang lain adalah b_i, $1 \le i \le n$. Untuk $i = 1$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1, b_i\}) = r(b_2|\{a_1, b_i\}) = ((1,1), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $i = 2$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1, b_i\}) = r(b_1|\{a_1, b_i\}) = ((1,1), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $2 < i \le \frac{n}{2}$ mempunyai representasi $r(a_2|\{a_1, b_i\}) = r(b_2|\{a_1, b_i\}) = ((1, i-1), (2n-1, 2n-1))$. Untuk $\frac{n}{2} < i \le n$ mempunyai representasi $r(a_n|\{a_1, b_i\}) = r(b_1|\{a_1, b_i\}) = ((1,1+n-i), (2n-1, 2n-1))$. Hal ini kontradiksi dengan himpunan pembeda-bi $|S_3| = 2$.

Karena $\exists\, x, y \ni V(A_n)$, $x \ne y$, $r(x|S) = r(y|S)$, maka $|S_3| = 2$ bukan himpunan pembeda-bi. Dengan demikian terbukti $\beta_b(A_n) \ge 3$. .... (4)

Dari bukti $\beta_b(A_n) \le 3$ (3) dan $\beta_b(A_n) \ge 3$ (4), maka S dengan kardinalitas 3 merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $\beta_b(A_n) = 3$ untuk n genap.

Karena terbukti $\beta_b(A_n) = 3$ untuk n ganjil dan genap. Dengan demikian bi-dimensi metrik dari graf antiprisma = $\beta_b(A_n) = 3$.

4. Kesimpulan

Dalam menentukan bi-dimensi metrik atau kardinalitas minimum dari himpunan pembeda-bi dari graf antiprisma, harus menentukan panjang lintasan terpendek dan panjang lintasan terjauh. Dalam graf antiprisma, panjang lintasan terjauh dari simpul yang sama adalah $2n$, sedangkan panjang lintasan terjauh untuk sebarang dua simpul yang berbeda adalah $2n-1$. Misalkan A_n adalah graf antiprisma dengan $n \geq 3$, maka bi-dimensi metrik dari A_n, $\beta_b(A_n) = 3$. Dari kesimpulan diatas dapat dilihat bahwa bi-dimensi metrik dari graf antiprisma sama dengan dimensi metriknya.

Untuk pengembangan Penelitian selanjutnya tentang graf dapat dikembangkan pada graf generalisasi antiprisma atau melakukan pengembangan penelitian tentang karakterisasi graf yang mempunyai bi-dimensi metrik = 2.

Daftar Pustaka

[1] Ali, M., Ali, G., Ali, U., Rahim, M.T., (2012), *On Cycle Related Graphs with Constant Metric Dimension*. Open Journal of Discrete Mathematics, 2012, 2, 21-23.

[2] Ali, G., Laila, R., Ali, M., (2016), *Metric Dimension of Some Families of Graph*. Mathematical Sciences Letters An International Journal 5, No. 1, 99-102 (2016).

[3] Hendy, (2016), *The H-Super(anti)magic Decompositions of Antiprism Graphs.* AIP Conference Proceedings 1707, 020007 (2016). https://doi.org/10.1063/1.4940808.

[4] Javaid, I., Rahim, M.T., Ali, K., (2008), *Families of Regular Graphs With Constant Metric Dimension*. Utilitas Mathematica. School of Mathematical Sciences, GC University. (Online), (https://www.researchgate.net/publication/264553656, diakses 7 Maret 2017).

[5] Permana, A.B., Darmaji, (2012), *Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu.* Jurnal Teknik POMITS Vol. 1, No. 1, (2012) 1-4.

[6] Raghavendra, A. Sooryanarayana, B. Hedge, C., (2014), *Bi-Metric dimension of graphs*. British Journal of Mathematics and Computer Science 4(18): 2699-2714.

[7] Rosen, K.H., (2012), *Discrete Mathematics and Its Applications*. Seventh Edition. New York. McGraw-Hill.