

# **PENYELESAIAN MODIFIKASI MODEL *PREDATOR PREY LESLIE-GOWER* DENGAN SEBAGIAN *PREY* TERINFEKSI MENGGUNAKAN ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT**

*(Solving of Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Prey Infection Using Fourth Order Adams Bashforth Moulton)*

**Liatri Arianti, Rusli Hidayat, Kosala Dwidja Purnomo**

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember  
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia  
E-mail: {rusli, kosala}.fmipa@unej.ac.id

**Abstract.** Eco-epidemiology is a science that studies the spread of infectious diseases in a population in an ecosystem where two or more species interact like a predator prey. In this paper discusses about how to solve modification Leslie Gower of predator prey models (with Holling II response function) with some prey infected using fourth order Adams Bashforth Moulton method. This paper used a simple disease-spreading model that is Susceptible-Infected (SI). The model is divided into three populations: the sound prey (which is susceptible), the infected prey and predator population.

**Keywords:** Adams Basforth Moulton, Eco-epidemiology Holling Tipe II, Local stability, Leslie-Gower, Predator-Prey model

**MSC 2010:** 65C20

## **1. Pendahuluan**

Salah satu model interaksi antar makhluk hidup adalah *predator prey*. Alfred dan Vito Volterra pada pertengahan tahun 1920 mengembangkan sepasang persamaan diferensial sederhana yang menggambarkan fenomena *predator prey* untuk pertama kali dikenal sebagai model Lotka-Volterra [1]. Model sederhana tersebut kemudian dimodifikasi oleh Leslie dan Gower dengan memperkenalkan model *predator prey* dimana *carrying capacity* lingkungan *predator* sebanding dengan banyaknya *prey* [2]. Holling pada tahun 1959 memperkenalkan fungsi respons. Holling membagi fungsi respons menjadi tiga tipe, yaitu fungsi respons tipe I, tipe II, dan tipe III [3]. Masalah lain yang dapat terjadi pada suatu populasi adalah terjadinya epidemi. Chattopadhyay dkk [4] telah mengembangkan model matematika *predator prey* dengan mangsa yang terinfeksi. Zhou dkk [5] telah mengusulkan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower (dengan fungsi respon Holling II) dengan sebagian *prey* terinfeksi. Zhou dkk menggunakan model penyebaran

penyakit yang sederhana yaitu *Susceptible-Infected* (SI). Zhou dkk membagi *prey* ke dalam dua kelompok, yaitu kelompok rentan dan kelompok terinfeksi.

Metode Adams Bashforth Moulton adalah metode penyelesaian diferensial banyak langkah karena untuk menyelesaikannya diperlukan lebih dari satu informasi nilai awal, sehingga metode ini harus menggunakan metode lain untuk mencari nilai awal. Metode Runge-Kutta dipilih untuk pengambilan nilai awal karena pada penelitian sebelumnya oleh Putri [6] dalam skripsinya telah menyelesaikan model *predator prey* klasik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Gill. Penelitian tersebut menyimpulkan kedua metode tersebut baik dalam penyelesaian model. Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat adalah metode yang banyak digunakan karena mempunyai ketelitian yang tinggi. Mardiana [7] dalam skripsinya yang menyelesaikan model *predator prey* Holling dengan faktor pemanenan, Mardiana menyimpulkan bahwa hasil yang diperoleh dari penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat sama dengan hasil analitik pada titik kesetimbangan. Penulis tertarik untuk menganalisis kestabilan model yang di usulkan oleh Zhou dkk [5] dan menyelesaikannya dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

**Modifikasi Model *Predator Prey* Leslie Gower dengan Sebagian *Prey* Terinfeksi**

Pemodelan matematika epidemi telah menjadi topik penelitian yang menarik dan penting. Pada model ini akan dipelajari pengaruh penyakit pada lingkungan di mana terdapat dua atau lebih spesies yang saling berinteraksi. Model dalam tulisan ini terdiri dari tiga populasi, yaitu populasi *prey* rentan, *prey* terinfeksi, dan *predator*. Penyakit pada model ini hanya menyebar di antara populasi *prey* saja dan penyakit ini tidak diwariskan secara genetis. Populasi yang terinfeksi tidak pulih atau menjadi kebal. Populasi *predator* hanya memakan *prey* yang terinfeksi dengan skema Leslie-Gower Holling-type II.

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= rS \left( 1 - \frac{S+I}{K} \right) - \beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - cI - \frac{c_1 I y}{I + K_1} \\ \dot{y} &= \left( a_2 - \frac{c_2 I y}{I + K_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- dengan kondisi awal  $S(0) = S_0$
- $S(t)$  =kepadatan populasi *prey* rentan pada saat t
- $I(t)$  =kepadatan populasi *prey* terinfeksi pada saat t
- $y(t)$  =kepadatan populasi *predator* pada saat
- $r$  =laju pertumbuhan intrinsik populasi *prey*
- $K$  =kapasitas daya tampung *prey* rentan
- $\beta$ =laju infeksi (penularan penyakit)
- $c$  =laju kematian *prey* terinfeksi
- $a_2$ =laju pertumbuhan *predator*

$c_1$  = nilai maksimum laju per kapita pengurangan  $I$  karena  $y$   
 $c_2$  = nilai maksimum laju per kapita pengurangan  $y$  karena  $I$   
 $K_1$  = daya dukung lingkungan untuk *prey* terinfeksi  
 $K_2$  = daya dukung lingkungan untuk *predator*  
 dan semua parameter bernilai positif [5].

## 2. Metodologi

Metode penelitian yang digunakan untuk penyelesaian modifikasi model Leslie-Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi menggunakan Adams Bashorth Moulton orde empat adalah sebagai berikut:

1. Menentukan titik kesetimbangan model dengan menyelesaikan Persamaan (1) sama dengan nol.

$$\begin{aligned} f = \dot{S} &= rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI = 0 \\ g = \dot{I} &= \beta SI - cI - \frac{c_1 I y}{I+K_1} = 0 \\ h = \dot{y} &= \left(a_2 - \frac{c_1 I y}{I+K_2}\right)y = 0 \end{aligned}$$

dengan  $S^*, I^*, y^*$  merupakan nilai kesetimbangan dari model.

2. Linierisasi model menggunakan matriks Jacobian, kemudian menentukan kestabilan di sekitatar titik kesetimbangan. Matriks Jacobian dari Persamaan (1) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ \beta I & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= r\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \frac{rS}{K} - \beta I \\ a_{12} &= -\beta S - \frac{rS}{K} \\ a_{22} &= \beta S - c - \frac{c_1 y}{I+K_1} + \frac{c_1 K_1 y}{(I+K_1)^2} \\ a_{23} &= \frac{-c_1 I}{(I+K_1)} \\ a_{32} &= \frac{c_2 y^2}{(I+K_2)^2} \\ a_{33} &= a_2 - \frac{2c_2 y}{I^* + K_2} \end{aligned}$$

3. Penyelesaian model menggunakan metode numerik Adams Bashorth Moulton orde empat, kemudian membuat program menggunakan *software* MATLAB. R2015b. Pengambilan nilai awal menggunakan Runge Kutta orde 4, dengan rumus sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (3)$$

dengan,

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3)$$

Dilanjutkan dengan menggunakan Adams Bashorth Moulton orde empat.

*Predictor:*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i)(4)$$

*Corrector:*

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1})(5)$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

Dari penelitian ini didapat hasil sebagai berikut:

#### Titik Keseimbangan dan Kestabilannya

1. Titik Setimbang Kepunahan Setiap Populasi yaitu  $S^* = I^* = y^* = 0$  didapatkan  $E_1 = (0,0,0)$  bersifat tidak stabil.
2. Titik Setimbang *Prey* Rentan dan *Prey* Terinfeksi Punah yaitu  $S^* = I^* = 0$  didapatkan  $E_2 = \left(0,0, \frac{a_2K_2}{c_2}\right)$  bersifat tidak stabil.
3. Titik Setimbang *Prey* Terinfeksi dan *Predator* Punah yaitu  $I^* = y^* = 0$  didapatkan  $E_3 = (K, 0,0)$  bersifat tidak stabil.
4. Titik Setimbang *Prey* Terinfeksi Mengalami Kepunahan yaitu  $I^* = 0$  didapatkan  $E_4 = \left(K, 0, \frac{a_2K_2}{c_2}\right)$  bersifat stabil asimtotik dengan syarat  $\beta < \frac{cc_2K_1 + c_1a_2K_2}{Kc_2K_1}$ .

5. Titik Setimbang *Predator* Punah yaitu  $y^* = 0$  didapat  $E_5 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(\beta K - c)}{\beta(r - \beta K)}, 0\right)$  bersifat tidak stabil.

6. Titik Setimbang Tidak Ada Kepunahan didapat  $E^* = (S^*, I^*, y^*)$  yaitu

$$I_{+}^* = \frac{\left(c_2 K_1 \left(\beta + \frac{\beta^2 K}{r}\right) + c_1 a_2 - c_2(\beta K - c)\right) + \sqrt{\Delta}}{2c_2 \left(\beta + \frac{\beta^2 K}{c}\right)}$$

$$y^* = \frac{a_2(I^* + K_2)}{c_2}$$

$$S^* = \frac{1}{\beta} \left(c + \frac{c_2 y^*}{I^* + K_1}\right)$$

Bersifat stabil asimtotik dengan syarat

$$\frac{c_2}{I^* + K_2} > \frac{c_1 I^*}{(I^* + K_1)^2} \text{ dan } K_1 > K_2.$$

### Penyelesaian Model dengan Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Pencarian nilai awal menggunakan metode Runge Kutta orde empat pada Persamaan (1) menggunakan rumus Persamaan (3):

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)h$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(o_1 + 2o_2 + 2o_3 + o_4)h$$

Persamaan diferensial pertama

$$k_1 = f(t_1, S_1, I_1, y_1)$$

$$k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, S_2 + \frac{h}{2}k_1, I_2 + \frac{h}{2}l_1, y_2 + \frac{h}{2}o_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_3 + \frac{h}{2}, S_3 + \frac{h}{2}k_2, I_2 + \frac{h}{2}l_2, y_2 + \frac{h}{2}o_2\right)$$

$$k_4 = f(t_4 + h, S_4 + hk_3, I_2 + hl_3, y_2 + ho_3)$$

Persamaan diferensial kedua

$$l_1 = g(t_1, S_1, I_1, y_1)$$

$$l_2 = g\left(t_2 + \frac{h}{2}, S_2 + \frac{h}{2}k_1, I_2 + \frac{h}{2}l_1, y_2 + \frac{h}{2}o_1\right)$$

$$l_3 = g\left(t_3 + \frac{h}{2}, S_3 + \frac{h}{2}k_2, I_2 + \frac{h}{2}l_2, y_2 + \frac{h}{2}o_2\right)$$

$$l_4 = g(t_4 + h, S_4 + hk_3, I_2 + hl_3, y_2 + ho_3)$$

Persamaan diferensial ketiga

$$\begin{aligned}
 o_1 &= h(t_1, S_1, I_1, y_1) \\
 o_2 &= h\left(t_2 + \frac{h}{2}, S_2 + \frac{h}{2}k_1, I_2 + \frac{h}{2}l_1, y_2 + \frac{h}{2}o_1\right) \\
 o_3 &= h\left(t_3 + \frac{h}{2}, S_3 + \frac{h}{2}k_2, I_2 + \frac{h}{2}l_2, y_2 + \frac{h}{2}o_2\right) \\
 o_4 &= h(t_4 + h, S_4 + hk_3, I_2 + hl_3, y_2 + ho_3)
 \end{aligned}$$

setelah didapatkan nilai-nilai awal yang dibutuhkan, selanjutnya dilakukan tahap prediksi menggunakan skema Adams Basforth Moulton orde empat yaitu Persamaan (4) pada Persamaan (1). Sehingga diperoleh:

Persamaan diferensial satu

$$\begin{aligned}
 S_{r+1} &= S_r + \frac{h}{24}(-9f(t_{r-3}, S_{r-3}, I_{r-3}, y_{r-3})) + 37f(t_{r-2}, S_{r-2}, I_{r-2}, y_{r-2}) \\
 &\quad - 59f(t_{r-1}, S_{r-1}, I_{r-1}, y_{r-1}) + 55f(t_r, S_r, I_r, y_r)
 \end{aligned}$$

Persamaan diferensial dua

$$\begin{aligned}
 I_{r+1} &= I_r + \frac{h}{24}(-9g(t_{r-3}, S_{r-3}, I_{r-3}, y_{r-3})) + 37g(t_{r-2}, S_{r-2}, I_{r-2}, y_{r-2}) \\
 &\quad - 59g(t_{r-1}, S_{r-1}, I_{r-1}, y_{r-1}) + 55g(t_r, S_r, I_r, y_r)
 \end{aligned}$$

persamaan differential tiga

$$\begin{aligned}
 y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{24}(-9h(t_{r-3}, S_{r-3}, I_{r-3}, y_{r-3})) + 37h(t_{r-2}, S_{r-2}, I_{r-2}, y_{r-2}) \\
 &\quad - 59h(t_{r-1}, S_{r-1}, I_{r-1}, y_{r-1}) + 55h(t_r, S_r, I_r, y_r)
 \end{aligned}$$

Pada tahap selanjutnya akan dilakukan tahap koreksi dengan menggunakan Adams Bashforth Moulton orde empat pada Persamaan (5). Sehingga diperoleh:

Persamaan diferensial satu

$$S^*_{r+1} = S_r + \frac{h}{24}(f_{r-2} - 5f_{r-1} + 19f_r + 9f_{r+1})$$

Persamaan diferensial dua

$$I^*_{r+1} = I_r + \frac{h}{24}(g_{r-2} - 5g_{r-1} + 19g_r + 9g_{r+1})$$

Persamaan diferensial tiga

$$y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(h_{r-2} - 5h_{r-1} + 19h_r + 9h_{r+1})$$

Hasil diskritisasi diatas kemudian di implementasikan dalam pembuatan program menggunakan *software* MATLAB R2015b.

## Simulasi dan Interpretasi

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini sesuai dalam jurnal Zhou dkk [5] dengan nilai awal  $S(0) = 1, I(0) = 0.5, y(0) = 1.2$  dengan waktu  $t = 0$  sampai  $t = 100$  satuan waktu. Simulasi dilakukan dengan bervariasi nilai beberapa parameter yang mempengaruhi model.

### 1. Kasus pertama

Untuk simulasi pertama diberikan nilai parameter yang menghasilkan populasi *prey* terinfeksi punah namun populasi *predator* dan *prey* rentan ada (hidup berdampingan). Nilai parameter yang diberikan  $r = 2, a_2 = 1, c = 0.3, c_1 = 1, c_2 = 1, K = 3, K_1 = 0.6, K_2 = 0.5, \beta = 0.3$ . Hasil analitik dari nilai parameter kasus pertama menunjukkan kepadatan populasi *prey* rentan 3%, *prey* terinfeksi 0% dan *predator* 0,5%. Simulasi 1 menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat. Pada simulasi ini menunjukkan kepadatan populasi *prey* rentan terlihat naik hingga 3 pada  $t = 32$  kemudian stabil pada  $t$  berikutnya karena tidak adanya predasi dan laju infeksi yang kecil. Kepadatan populasi *prey* terinfeksi turun hingga 0 pada  $t = 32$  kemudian stabil pada  $t$  berikutnya. Populasi *prey* terinfeksi mengalami kepunahan karena laju infeksi yang rendah dan adanya predasi. Kepadatan populasi *predator* bergerak menurun hingga 0,5 pada  $t = 34$  kemudian stabil pada  $t$  berikutnya. Grafik predator mengikuti pergerakan grafik populasi *prey* terinfeksi karena *prey* terinfeksi sebagai sumber makanan juga bergerak menurun. Populasi *predator* tidak punah karena *predator* mempunyai kemungkinan untuk tidak hanya bergantung pada *prey* terinfeksi saja (dilambangkan dengan adanya daya dukung lingkungan yaitu  $K_2$ ). Disini populasi predator dan *prey* rentan mengikuti titik kesetimbangan ( $E_4$ ) yaitu dengan syarat stabil asimtotik  $\beta < \frac{cc_2K_1+c_1a_2K_2}{Kc_2K_1}$ . Didapatkan  $\beta = 0,3$  dan  $\frac{cc_2K_1+c_1a_2K_2}{Kc_2K_1} = 0,38$  sehingga  $0,3 < 0,38$ .

### 2. Kasus kedua

Untuk simulasi kedua diberikan nilai parameter yang menghasilkan kepadatan populasi *predator*, *prey* rentan dan *prey* terinfeksi sama-sama ada (hidup berdampingan). Nilai parameter yang diberikan  $r = 2, a_2 = 1, c = 0.3, c_1 = 1, c_2 = 1, K = 3, K_1 = 0.6, K_2 = 0.5, \beta = 1.1$ . Hasil analitik dari nilai parameter kasus pertama menunjukkan kepadatan populasi *prey* rentan 1,11%, *prey* terinfeksi 0,71% dan *predator* 1,2%. Simulasi 2 menunjukkan ketiga populasi mengalami fluktuasi beberapa saat kemudian stabil pada  $t$  berikutnya dan hidup berdampingan. Kepadatan populasi *prey* rentan mulai stabil pada  $t = 45$  dengan kepadatan 1,11. Kepadatan populasi *prey* terinfeksi mulai stabil pada  $t = 45$  dengan kepadatan 0,71. Kepadatan populasi *Predator* mulai stabil pada  $t = 41$  dengan kepadatan 1,2.

Pada simulasi 2 ketiga populasi ini mengikuti syarat titik kesetimbangan dimana ketiga populasi tersebut hidup berdampingan ( $E^*$ ) yaitu sebagai berikut:

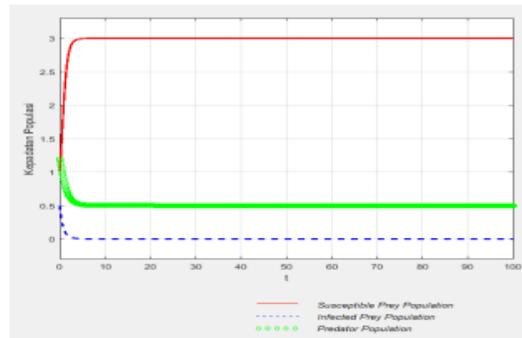
$$\frac{c_2}{I^*+K_2} > \frac{c_1I^*}{(I^*+K_1)^2} \Leftrightarrow 0,8 > 0,4,$$

$$K_1 > K_2 \Leftrightarrow 0,6 > 0,5.$$

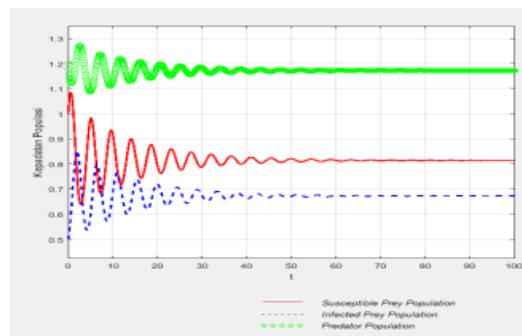
3. Kasus ketiga

Simulasi ketiga ini untuk mengetahui pengaruh laju infeksi ( $\beta$ ) pada model. Nilai parameter yang diberikan  $r = 2$ ,  $K = 3$ ,  $c = 0,3$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $K_1 = 0,6$ ,

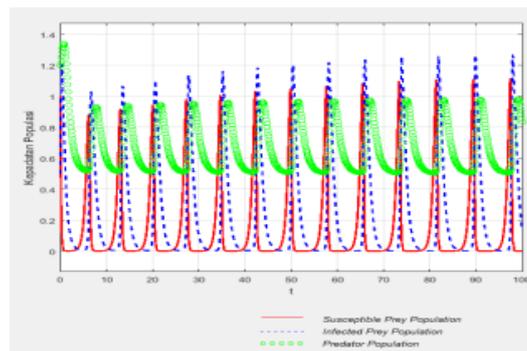
$K_2 = 0,5$ ,  $a_2 = 1$ , dengan variasi beberapa nilai  $\beta$  yaitu  $\beta = 0,1$ ,  $\beta = 1,5$ ,  $\beta = 8$ .



(a) variasi  $\beta = 0,1$



(b) variasi  $\beta = 1,5$



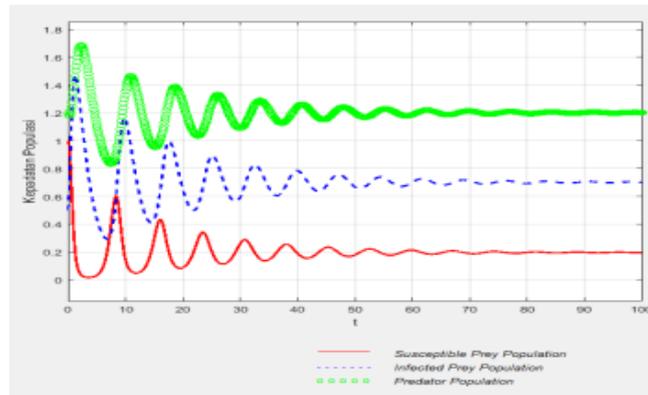
(c) variasi  $\beta = 8$

Gambar 1. Grafik variasi nilai  $\beta$

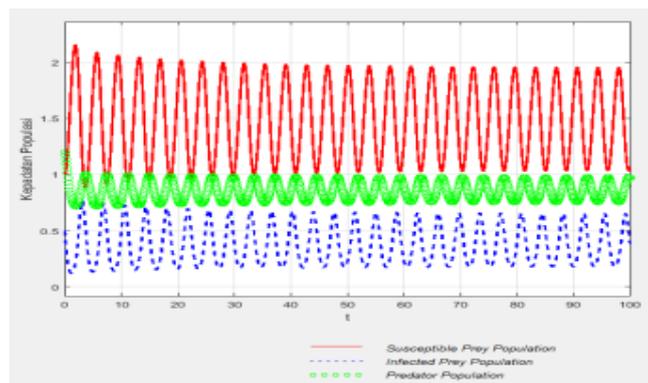
Pada Gambar 1 dengan variasi nilai  $\beta$  dapat disimpulkan bahwa semakin besar laju infeksi maka kepadatan populasi *prey* terinfeksi akan berangsur naik, sehingga kepadatan *prey* rentan berangsur turun. Kepadatan populasi *predator* akan dapat mempertahankan kepadatan populasinya karena makanannya yaitu *prey* terinfeksi ada/naik.

4. Kasus keempat

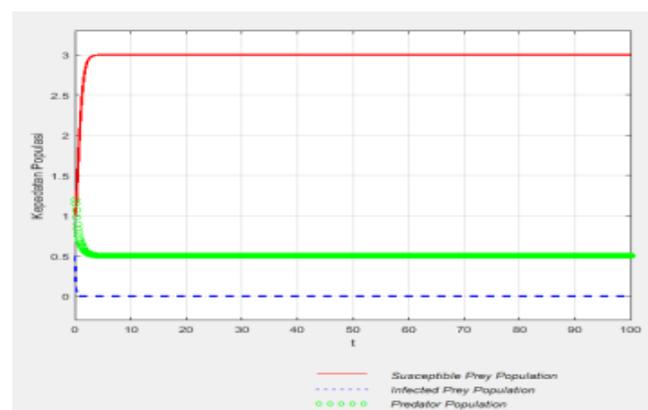
Simulasi keempat ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh nilai maksimum laju per kapita pengurangan  $I$  karena  $y(c_1)$  pada sistem. Nilai parameter  $r = 2$ ,  $K = 3$ ,  $c = 0,3$ ,  $\beta = 2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $K_1 = 0,6$ ,  $K_2 = 0,5$ ,  $a_2 = 1$ ,  $S(0) = 1$ ,  $I(0) = 0,5$ ,  $y(0) = 1,2$  dengan variasi beberapa nilai  $c_1$  yaitu  $c_1 = 0,1$ ,  $c_1 = 3$ ,  $c_1 = 8$ .



(a) variasi  $c_1 = 0,1$



(b) variasi  $c_1 = 3$



(c) variasi  $c_1 = 8$

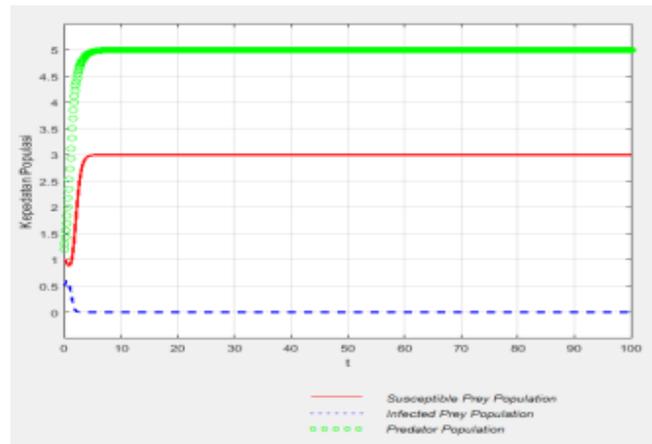
Gambar 2. Variasi nilai  $c_1$

Dari Gambar 2 variasi nilai  $c_1$  dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai maksimum laju per kapita pengurangan  $I$  karena  $y(c_1)$ , kepadatan *prey* terinfeksi akan berangsur turun kemudian berfluktuasi dan berakhir punah. Kepadatan populasi *prey* rentan akan naik karena *prey* terinfeksi akan berangsur punah dengan adanya predasi. Kepadatan populasi *predator* akan menurun karena makanannya yaitu *prey* terinfeksi menurun dan punah.

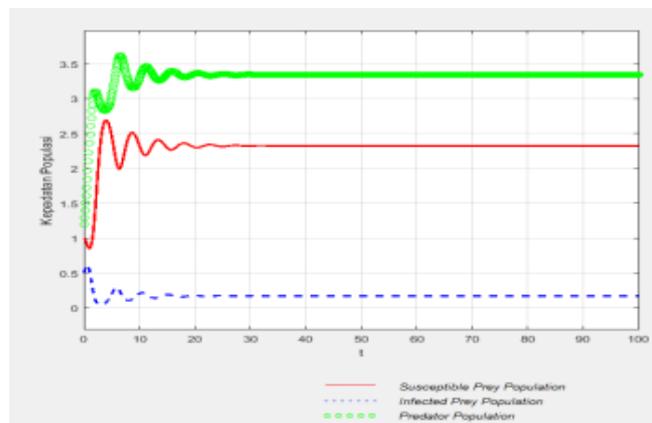
#### 5. Kasus kelima

Simulasi kelima ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh nilai maksimum laju per kapita pengurangan  $I$  karena  $I(c_2)$  pada sistem. Adapun nilai parameter  $r = 2$ ,  $K = 3$ ,  $c = 0,3$ ,  $c_1 = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $K_1 = 0,6$ ,  $K_2 = 0,5$ ,  $a_2 = 1$ ,  $S(0) = 1$ ,  $I(0) = 0,5$ ,  $y(0) = 1,2$  dengan variasi beberapa nilai  $c_2$  yaitu  $c_2 = 0,1$ ,  $c_2 = 0,2$ ,  $c_2 = 0,6$ .

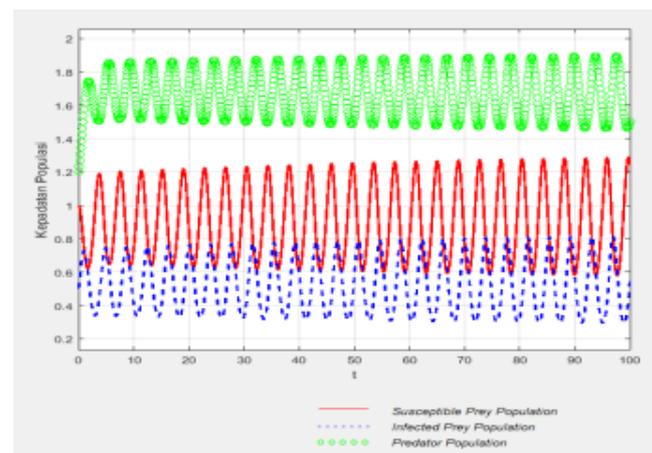
Gambar 3 variasi nilai  $c_2$  dengan nilai kurang dari satu. Pada Gambar 5 (a) kepadatan populasi *predator* mencapai 5%, yang mana itu tidak dapat diterima karena kepadatan populasi *predator* tidak bisa berkembang, populasi *predator* hanya bergantung pada makannya dan daya dukung lingkungan saja. Ketika nilai  $c_2$  mendekati angka satu maka kepadatan populasi *predator* akan mencapai 1.2 (seperti nilai awal). Semakin besar nilai  $c_2$  (lebih dari satu) akan membuat populasi *predator* menurun. Kepadatan populasi *prey* rentan akan turun. Kepadatan populasi *prey* terinfeksi akan naik dan ketiga populasi bisa hidup berdampingan.



(a) variasi  $c_2 = 0.1$



(b) variasi  $c_2 = 0.2$



(c) variasi  $c_2 = 0.6$

Gambar 3. Grafik variasi nilai  $c_2$

#### 4. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari tulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Model yang diteliti mempunyai enam titik kesetimbangan yaitu  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  dan  $E^*$ . Kemudian dianalisis kestabilannya menghasilkan  $E_1, E_2, E_3, E_5$  tidak stabil.  $E_4$  dan  $E^*$  adalah stabil asimtotik dengan syarat.
2. Metode Adams Basforth Moulton orde empat menghasilkan penyelesaian yang cukup akurat dan efisien.
3. Hasil interpretasi simulasi dengan variasi beberapa parameter adalah sebagai berikut:
  - a) Semakin besar laju infeksi ( $\beta$ ) pada *prey* maka populasi *prey* terinfeksi mengalami kenaikan yang menyebabkan populasi *prey* rentan menurun. Populasi *predator* meningkat karena *prey* terinfeksi sebagai makanannya mengalami kenaikan.
  - b) Semakin besar nilai maksimum laju per kapita pengurangan *prey* terinfeksi karena *predator* ( $c_1$ ) maka populasi *prey* terinfeksi akan menurun kemudian punah sehingga populasi *prey* rentan akan naik. Populasi *predator* akan menurun karena *prey* terinfeksi sebagai makanannya menurun.

#### Daftar Pustaka

- [1] Bacaer, N. (2011). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. New York (US): Springer-Verlag.
- [2] Boyce, W. E. dan Diprima, R. C. (2012). *Elementary Differensial Equations and Boundary Value Problems. Tenth Edition*. John Willey & Sons Inc. New York.
- [3] Chattopadhyay, J., Bairagi N., Chaudhuri S.. (2007). Harvesting as disease control measure in an eco-epidemiological system-atheoretical study. *Mathematical Biosciences*. 217(2): 14-144.
- [4] Leslie, P. H. dan Gower, J. C. (1960). The Properties of a Stochastic Model for the Predator-Prey Type of Interaction between Two Species. *Biometrika*, 47 (3/4): 219-234.
- [5] Mardiana, R. (2015). Analisis Solusi Numerik Model Predator Prey Tipe Holling dengan Faktor Pemanenan pada Prey Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.
- [6] Putri, P. P. (2013). Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat dan Gill. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.
- [7] Sahid. (2006). *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: Andi
- [8] Triatmodjo, B. (1992). *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- [9] Zhou, Xueyoung, Cui, J., Shi, X., Song, X. (2010). A Modified Leslie-Gower predator-prey model with prey infection. *J. Appl. Math. Comput.* 33:471-487.