Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 19 Nomor 1, 2019, 1 – 8
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

KAJIAN FRAKTAL *i-FIBONACCI WORD* GENERALISASI GANJIL DENGAN MENGGUNAKAN *L-SYSTEM*

(Study on Odd Generalization of i-Fibonacci Word Fractal Using L-System)

Riza Umami, Kosala Dwidja Purnomo*, Firdaus Ubaidillah

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia
E-mail: *kosala.fmipa@unej.ac.id

Abstract. The i-Fibonacci Words are words over {0,1}. The i-Fibonacci Word can be associated with a fractal curve by using odd-even drawing rule and L-System methods, then also known as an i-Fibonacci Word fractal. L-System is one of methods that is used to create objects with repetitive self-similiarity. Framework of L-System consists of axiom and rules. L-System is a parallel rewriting system with existing rules. The purpose of this research is to look for the L-System rules of i-Fibonacci Word special for odd i, then look how its characteristics. The L-System rules for i-Fibonacci Word odd i are divided into two types, the rules for i=1 and the others odd i. The characteristic of i-Fibonacci Word fractal is the more generation and i value of fractal, then the more segments and archs of fractal curve. Next, the words of i-Fibonacci Word fractal segments number is a subwords of the i-Fibonacci Word digit numbers. It is also known that the fractal curve will be stretched as the decreased angle.

Keywords: Fractal, i-Fibonacci Word, L-System
MSC 2010: 31E05

1. Pendahuluan

Matematika adalah ilmu pengetahuan yang mempelajari besaran, struktur, bangun ruang, dan perubahan-perubahan pada suatu bilangan. Matematika juga mempelajari berbagai macam bentuk barisan bilangan dimulai dari barisan geometri, barisan persegi, barisan aritmatika, dan barisan Fibonacci. Barisan Fibonacci sendiri pertama kali dikemukakan oleh Leonardo Pisano atau yang lebih dikenal sebagai Fibonacci. Barisan Fibonacci adalah sebuah barisan yang mempunyai bentuk unik, dimana digit suku pertama dan kedua dari barisan tersebut bernilai 1, dan nilai dari digit berikutnya didapat dengan cara menambahkan kedua bilangan yang berurutan sebelumnya.

Contoh dari barisan lainnya adalah Barisan fibonacci word, dimana barisan ini hanya mangandung angka 1 dan 0. Barisan fibonacci word ini dapat membentuk sebuah kurva dengan menggunakan dua metode, yaitu metode odd-even drawing rule dan metode l-system. Kurva fibonacci word pertama kali dikemukakan oleh Dumaine pada tahun 2009. Penggambaran kurva fibonacci word dapat dilakukan dengan mengikuti aturan penggambaran ganjil-genap ataupun aturan produksi *L-System* yang ditemukan oleh

Dumaine [1]. Kurva yang didapat akan mempunyai sifat keserupaan diri, yang kemudian oleh Dumaine disebut dengan fraktal Fibonacci word. Fraktal sendiri adalah sebuah obyek yang memiliki bagian-bagian pembentuk yang sama dengan bentuk keseluruhan. Banyak fraktal memiliki sifat menyerupai dirinya sendiri, paling tidak hampir [2]. Ramirez dan Rubiano [3] memperkenalkan sebuah barisan yang bernama *i-Fibonacci word*. Barisan ini didefinisikan secara rekursif sebagai:$f_0^{[i]} = 0; f_1^{[i]} = 0^{i-1}1; f_n^{[i]} = f_{n-1}^{[i]} f_{n-2}^{[i]}$,untuk n $\geq$ 2 dan $i \geq 1$, dimana n menyatakan banyak suku ke-n dan *i* generalisasi dari barisan *i-Fibonacci word*. Barisan *i-Fibonacci word* juga dapat membentuk sebuah kurva yang mempunyai sifat keserupaan diri layaknya kurva pada *Fibonacci word*.

Fraktal *i-Fibonacci word* dapat dibentuk melalui dua metode. Metode pertama yaitu dengan menggunakan aturan penggambaran ganjil-genap seperti yang digunakan pada fraktal *Fibonacci word*. Metode kedua yaitu dengan menggunakan metode *L-system*. *L-System* sendiri adalah aturan formal, disusun sebagai grammar yang dikarakteristikkan dalam bentuk aksioma, dan simbol-simbol alphabet yang digunakan sebagai representasi pertumbuhan bagian tanaman yang secara paralel terjadi pergantian pada masing-masing tahap [4]. Berdasarkan bentuk kurva *Fibonacci word* menurut aturan penggambaran ganjil-genap, Dumaine membuat suatu aksioma dan aturan produksi untuk fraktal tersebut. Kemudian, Alyagustin, dkk [5] membuat perbandingan kurva *Fibonacci word* dengan memvariasikan panjang segmen K dan Q. Amalia [6] juga membuat suatu aturan produksi *L-System* Deterministik untuk fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi genap berdasarkan aturan penggambaran ganjil-genap serta mengkaji karakteristiknya. Oleh karena itu, penulis akan mengkaji tentang karakteristik fraktal *i-Fibonacci word* untuk generalisasi ganjil dengan menggunakan *L-System d*eterministik.

2. Metodologi

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan ini diantaranya meliputi penafsiran fraktal *i-Fibonacci Word* generalisasi ganjil dengan *L-System* secara matematis. Pertama akan ditentukan aksioma dan beberapa aturan produksi untuk membentuk fraktal *i-Fibonacci Word* generalisasi ganjil. Aturan produksi akan diperoleh berdasarkan bentuk dari fraktal maupun barisan *i-Fibonacci Word* tersebut. Pada langkah selanjutnya akan dilakukan penafsiran fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil dengan *l-system* secara grafis. Langkah ini dilakukan dengan cara menggambar secara grafis aturan produksi yang telah didapat saat menafsirkan fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil secara matematis. Langkah selanjutnya yaitu pembuatan program visualisasi fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil. Algoritma program penerapan *L-system* dalam membangun fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil meliputi penentuan aksioma dan aturan produksi; penentuan nilai *i;* generasi; dan sudut fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil yang akan divisualisasi sebagai input, dan penggambar fraktal *i-*

Fibonacci word generalisasi ganjil berdasarkan ketentuan pada langkah-langkah sebelumnya. Hasil yang diperoleh dari pembuatan program adalah visualisasi dari fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil. Output yang didapat akan berupa visualisasi fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil dengan menggunakan aturan produksi yang didapat saat pada langkah pertama. Selain itu, juga akan didapat perbandingan karakteristik dari fraktal *i-Fibonacci word* generalisasi ganjil.

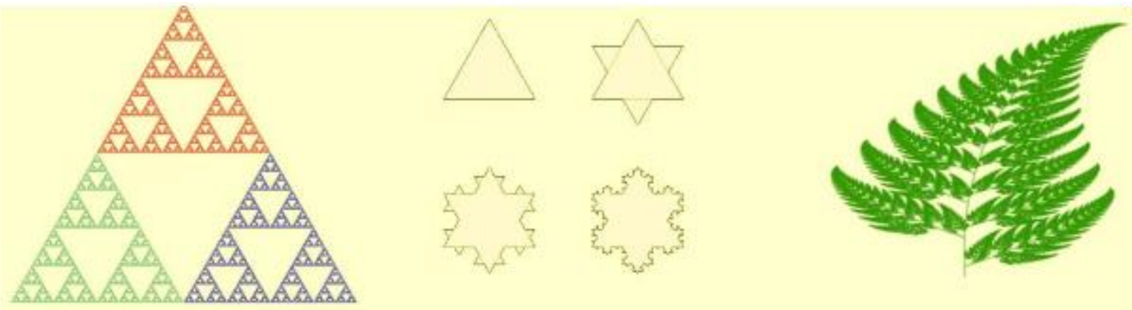
3. Hasil dan Pembahasan

Aturan produksi *L-System* yang digunakan untuk penggambaran fraktal *i-Fibonacci Word i* ganjil adalah sebagai berikut.

Aturan produksi *L-System fraktal i-Fibonacci Word i* =1:
$V = \{A, L, O, P, R, S, T, U, +, -\}$
$w = T$
$p_1 : T \rightarrow LAA - SA - OAA + LAA - SA$
$p_2 : L \rightarrow LAA - SA - OAA + LAA - SA - PAA$
$p_3 : O \rightarrow UAA + RA + TAA - UAA + RA$
$p_4 : P \rightarrow PAA + RA + TAA - UAA + RA + LAA$
$p_5 : R \rightarrow - - SA - OAA$
$p_6 : S \rightarrow ++RA + TAA$
$p_7 : U \rightarrow UAA + RA + TAA - UAA + RA + LAA$
$p_8 : A(x) \rightarrow \phi$

Aturan produksi *L-Systemraktal i-Fibonacci Word i* ganjil lainnya:
$V = \{A, L, O, P, Q, R, S, T, U, +, -\}$
$w = Q$
$p_1 : T \rightarrow LA - SA - O + L\Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A - SA\, \Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A$
$p_2 : L \rightarrow LA - SA - O + L\, \Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A - SA - P\Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A$
$p_3 : O \rightarrow UA + RA + T - U\Pi_{n=1}^{(i-3)}\beta_n A + RA$
$p_4 : P \rightarrow PA + RA + T - U\Pi_{n=1}^{(i-3)}\beta_n A + RA + L\, \Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A$
$p_5 : Q \rightarrow +A + T - U\Pi_{n=1}^{(i-3)}\beta_n A + RA\Pi_{n=1}^{(i-3)}\beta_n A$
$p_6 : R \rightarrow - - SA - OA\Pi_{n=1}^{(i-3)}\beta_n A$
$p_7 : S \rightarrow ++RA + TA\Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A$
$p_8 : U \rightarrow UA + RA + TA - UA\Pi_{n=1}^{(i-3)}\beta_n A + RA + LA\Pi_{n=1}^{(i-3)}\alpha_n A(x)$
$p_9 : A \rightarrow \phi$

Adapun makna dari notasi dari notasi A, L, O, P, Q, R, S, T, dan U adalah menggambarkan segmen garis sepanjang *l.* Notasi plus (+) dan minus (–) masing-masing bermakna berputar berlawanan dan searah jarum jam sebesar 90^0. Simbol $\Pi_{n=1}^{(i-3)}$mengartikan pengulangan untuk masing-masing α_nA dan β_nA.$\alpha_n$adalah minus (–) untuk *n* ganjil dan plus (+) untuk *n* genap, sedangkan $\beta_n$adalah minus (–) untuk *n* genap dan plus (+) untuk *n* ganjil. Gambar 1 merupakan contoh kurva koch yang apabila diperbesar dengan generasi tak terhingga mempunyai ketidakrataan yang sama.

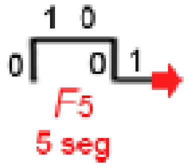


Gambar 1. Contoh fraktal

Penafsiran grafis fraktal *i-Fibonacci Word i*=1 untuk generasi pertama bermula dengan menggambarkan segmen garis *L*. Kemudian dilanjutkan dengan menggambarkan dua segmen garis *A*. Langkah selanjutnya yaitu mengerjakan perintah minus (-), yang berarti berbelok searah jarum jam sebesar 90^0, lalu dilanjutkan dengan menggambarkan segmen garis *S* dan *A*. Perintah berikutnya yaitu kembali berbelok searah jarum jam sebesar 90^0, kemudian menggambarkan satu segmen garis *O* dan dua segmen garis *A*. Kemudian, menjalankan perintah plus (+), yaitu berbelok berlawanan arah jarum jam sebesar 90^0, lalu menggambarkan segmen garis *L,* dua segmen garis *A* dan seterusnya. Hal serupa dapat dilakukan untuk penggambaran fraktal *i-Fibonacci Word* i=1 untuk generasi selanjutnya.

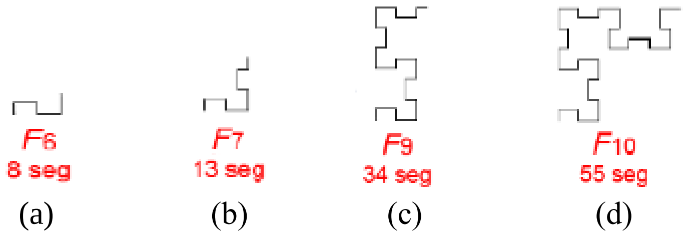
Penafsiran grafis *i*=3 dan *i*=5 pada fraktal *i-Fibonacci Word* generalisasi ganjil masing-masing dapat dilihat pada Gambar 2 dan Gambar 3.

Gambar 2. Generasi pertama *L-system* fraktal *i-Fibonacci word i* =3



Gambar 3. Generasi pertama *L-system* fraktal *i-Fibonacci word i* =5

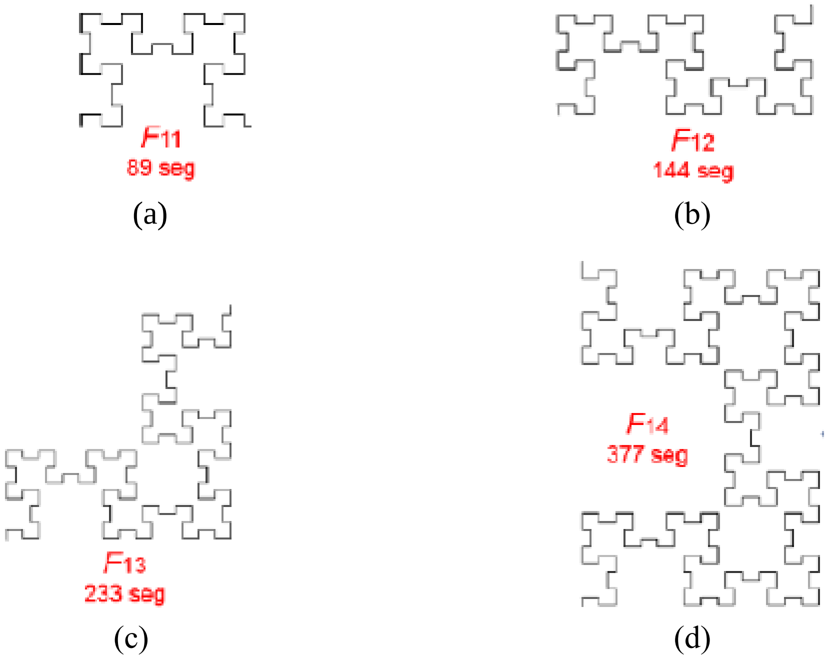
Pemakaian notasi pada aturan produksi fraktal *fibonacci word i* ganjil mengartikan adanya perulangan segmen *A* yang dimulai dari *i*=3. Semakin besar *i* maka semakin banyak pula perulangan pada segmen *A*. Sehingga hal tersebut mengakibatkan adanya perbedaan bentuk fraktal *i-fibonacci word* pada setiap *i*. Pada *i*= 3, penggunaan notasi mengakibatkan tidak adanya perulangan segmen *A* dikarenakan hasil dari pada *i*=3 adalah nol. Kemudian untuk *i*=5 terdapat perulangan segmen *A* sebanyak 2 kali. Adapun hasil visualisasi dari fraktal *i-fibonacci word* i=6, i=7, i=9, dan i=10 dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Visualisasi fraktal *i-Fibonacci word*. (a) *i*=6, (b) *i*=7, (c) *i*=9, (d) *i*=10

Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa untuk *i* ganjil > 1, semakin besar i maka semakin rapat bentuk fraktalnya. Hal tersebut bisa terjadi karena adanya pengulangan suatu notasi *A* pada aturan produksi yang dipakai, dimana semakin besar i semakin banyak pula pengulangan untuk notasi tersebut.

Adapun visualisasi dari fraktal *i-Fibonacci word* i=11, i=12, i=13, dan i=14 dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Visualisasi fraktal *i-Fibonacci word*. (a) i=11, (b) i=12, (c) i=13, (d) i=14

Berdasarkan Gambar 5 dapat dilihat bahwa untuk generasi genap bentuk fraktal cenderung ke arah kanan, sedangkan untuk generasi ganjil bentuk fraktal cenderung ke arah kiri. Kemudian jumlah segmen untuk g_1, g_2, g_3, dan g_4 masing-masing adalah sebanyak 13, 55, 233, dan 987. Sedangkan, untuk jumlah belokan untuk g_1, g_2, g_3, dan g_4 masing-masing adalah sebanyak 4, 20, 88, dan 376. Semakin bertambahnya generasi, ukuran x dan y pada fraktal tersebut juga bertambah.

Selanjutnya, barisan jumlah segman fraktal *i-Fibonacci word* dan barisan jumlah digit barisan *i-Fibonacci word* masing-masing akan dinyatakan sebagai$\varphi(F_n^{[i]})$ dan $F_n^{[i]}$. Terdapat keterkaitan antara $\varphi\left(F_n^{[1]}\right)$ dengan, $F_n^{[1]}$ yaitu $\varphi(F_n^{[1]})$ merupakan subbarisan dari $F_n^{[1]}$. Adapun barisan jumlah segmen fraktal dan digit barisan pada *i-Fibonacci word* *i*=1 masing-masing adalah sebagai berikut:

$\varphi(F_n^{[1]})$= 13, 55, 233, 987, ...

$F_n^{[1]}$ = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Angka 13 pada $\varphi(F_n^{[1]})$ juga terdapat pada $F_n^{[1]}$dengan n=7. Kemudian setelah itu diikuti dengan angka 55, 233, dan seterusnya yang berjarak 3 suku. Kemudian, untuk $\varphi(F_n^{[i]})$ dan $F_n^{[i]}$pada *i*=3 dan *i*=5 masing-masing adalah sebagai berikut:

$\varphi(F_n^{[3]})$ = 5, 18, 76, 322, ...

$F_n^{[3]}$ = 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...

$\varphi(F_n^{[5]})$ = 9, 28, 118, 500, ...

$F_n^{[5]}$ = 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, 118, 191, 309, 500, ...

Suku pertama pada $\varphi(F_n^{[3]})$ dan $\varphi(F_n^{[5]})$ masing-masing tidak terdapat pada $F_n^{[3]}$dan $F_n^{[5]}$di *n* berapapun itu. Tetapi, jika suku pertama dikurangi dengan *i-2* maka akan menghasilkan bilangan yang sama dengan suku ke-3 dari $F_n^{[3]}$dan $F_n^{[5]}$.

Hal terakhir yang akan dilakukan, yaitu pemvariasikan sudut belokan dari fraktal *i-Fibonacci Word*. Variasi sudut antara lain adalah 30^0, 45^0, 60^0, 85^0, 95^0, 100^0, 120^0, dan 150^0.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa fraktal *i-Fibonacci Word* generalisasi *i* ganjil dapat dibangun dengan menggunakan *L-System* dengan cara mencari aturan produksinya berdasarkan bentuk fraktal *i-Fibonacci Word* generalisasi ganjil yang dihasilkan dengan menggunakan aturan penggambaran ganjil-genap. Kemudian, beberapa karakteristik yang didapat pada fraktal *i-Fibonacci Word* generalisasi *i* ganjil, yaitu semakin besar generasi dan nilai *i* suatu fraktal, maka semakin besar pula jumlah segmen dan belokannya; $\varphi(F_n^{[1]})$ merupakan subset dari $F_n^{[1]}$ yang berjarak 3 suku setelah $F_n^{[7]}$; hasil dari $\varphi(F_n^{[i]})$– (*i–2*) sama dengan $F_n^{[3]}$, lalu setelah itu anggota himpunan jumlah segmen $\varphi(F_n^{[i]})$ lainnya akan berjarak 3 suku setelah $F_n^{[3]}$; segmen pada fraktal akan didilatasi seiring berubahnya sudut; nilai *x* dan *y* akan naik pada rentang sudut tertentu.

Daftar Pustaka

[1] Amalia, D. R. (2018). Kajian Fraktal i-Fibonacci Word dengan Menggunakan L-System. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

[2] Alyagustin, R. D. Kusbudiono, dan Purnomo, K. D. (2015). *Variasi Fraktal Fibonacci Word*. Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY 2015. Jember: Universitas Jember

[3] Dumaine, A. M. (2009). *The Fibonacci Word Fractal.* http://www.mathcurve.com/fractals/fibonacci/The_Fibonacci_word_fractal.pdf. [diakses pada 29 Januari 2018]

[4] Prusinkiewicz, P. and Lindenmayer, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Springer-Verlag.

[5] Ramirez, Jose L dan Rubiano, G. N. (2014). *Properties and Generalizations of the Fibonacci Word Fractal.*

[6] Sahid. (2013). *Fraktal-Kurva yang Menyerupai Diri Sendiri.* Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.