

PENERAPAN *COCKROACH SWARM OPTIMIZATION ALGORITHM* (CSOA) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN POLINOMIAL YANG MEMILIKI AKAR KOMPLEKS

(Implementation of Cockroach Swarm Optimization Algorithm (CSOA) to Solve Polynomial Equations with Complex Roots)

Emah Fahma Farikha, Rusli Hidayat, M. Ziaul Arif

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia
E-mail: emafarikha01@gmail.com

Abstract. In this paper, we use a metaheuristic algorithm for solving non-linear equations (polynomial equations) which have a set of complex roots (complex numbers). The metaheuristic algorithm is the Cockroach Swarm Optimization Algorithm (CSOA) which imitate various types of natural cockroach behaviors such as chase-swarmling, dispersing and ruthlessness when hunting for food sources. In this study, several examples of non-linear polynomial equations were used for evaluating the accuracy of CSOA. In this simulation, the accuracy comparison has been accomplished. It is shown that CSOA results are more accurate compared to the Newton-Raphson results.

Keywords: Cockroach Swarm Optimization Algorithm, Complex roots of polynomial, Newton-Raphson, Non-Linear equation.

MSC2010: 90B05

1. Pendahuluan

Pencarian solusi persamaan non linier masih menjadi kajian yang menarik untuk dibahas dalam penelitian. Dalam sedikit kasus, pencarian solusi persamaan tersebut dapat diselesaikan secara analitik. Akan tetapi pada kasus global yang kompleks, penyelesaian permasalahan tersebut sangat sulit dilakukan secara analitik. Sehingga, alternatif pencarian solusi dapat dilakukan dengan menggunakan metode numerik. Beberapa metode numerik sederhana seperti metode *Newton-Raphson*, *Secant*, iterasi titik tetap, dan metode bagi dua (*Bisection*) mampu menyelesaikan persamaan non linier. Akan tetapi, metode tersebut memerlukan syarat-syarat tertentu agar konvergen menuju solusi yang diinginkan seperti nilai awal, selang solusi, gradien dari tebakan awal, dan lain-lain. Hal ini yang membuat metode tersebut kurang efisien dan efektif. Dalam dekade terakhir, penggunaan metode metaheuristik menjadi alternatif metode numerik karena efisiensi dalam penyelesaian permasalahan yang kompleks.

Topik penelitian yang menggunakan algoritma metaheuristik dalam permasalahan matematika sudah dilakukan pada [1, 3, 7]. Pada [1], gabungan metode *zero crossing* dan *virus evolutionary genetic algorithm* (Vega) efektif dalam mencari akar persamaan non linier. Selanjutnya pada [3], algoritma *Cat Swarm Optimization* (CSO) mampu mencari solusi yang akurat suatu Sistem Persamaan Non-linier dengan hanya memberikan nilai awal sekumpulan calon solusi yang berupa bilangan random. Penggunaan algoritma metaheuristik *Cockroach Swarm Optimization Algorithm* (CSOA) sudah dilakukan oleh [7] dalam pencarian solusi sistem persamaan non linier polinomial, campuran eksponensial dan trigonometri, campuran polinomial dan logaritma, serta campuran polinomial, eksponensial dan trigonometri. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa solusi CSOA lebih akurat daripada metode *Newton-Raphson*.

Beberapa penelitian yang sudah dilakukan diatas, fokus pencarian solusi hanya pada solusi bilangan riil. Sedangkan pada kasus persamaan maupun sistem persamaan yang memiliki solusi bilangan kompleks perlu untuk dilakukan kajian. Oleh karena itu, pada penelitian ini, algoritma metaheuristik *Cockroach Swarm Optimization Algorithm* (CSOA) yang memiliki akurasi lebih baik dari metode *Newton-Raphson* akan diterapkan sebagai pemecah permasalahan persamaan non linier kasus khusus yang memuat akar bilangan kompleks. Beberapa contoh persamaan non linier akan diberikan dan akurasi yang didapatkan akan dibandingkan dengan akurasi pada metode *Newton-Raphson*.

***Cockroach Swarm Optimization Algorithm* (CSOA)**

Cockroach Swarm Optimization Algorithm (CSOA) merupakan salah satu *Swarm Intelligent* dan algoritma metaheuristik yang digunakan pada penelitian ini. Algoritma tersebut adalah suatu algoritma optimasi yang terinspirasi dari tingkah laku segerombolan kecoa dalam pencarian sumber makanan. Beberapa sifat dari kecoa yang menjadi acuan untuk penggunaan CSOA yaitu:

1. *Chase-Swarming behavior* (perilaku berburu)

Setiap individu $X(i)$ akan memburu (mencari) *local optimum*, *individual* (optimum lokal individu) $P(i)$ sesuai dengan *visual scope* (jangkauan pandangannya), tentu saja kebiasaan berburu seperti itu juga menghasilkan *cluster* (kelompok atau barisan) secara simultan. Terdapat sebuah asumsi ketika sebuah individu menjadi yang terbaik dalam jangkauan pandangannya, individu itu akan mencari (mengejar) *global optimum individual* (optimal global individu) atau yang disebut dengan $P(g)$. Modelnya yaitu:

$$X'(i) = \begin{cases} X(i) + \text{step.rand.} \cdot (P(i) - X(i)), & X(i) \neq P(i) \\ X(i) + \text{step.rand.} \cdot (P(g) - X(i)), & X(i) = P(i) \end{cases} \quad (1)$$

dengan *step* adalah sebuah nilai yang ditetapkan dan *rand* adalah nilai acak antara [0,1].

$$P(i) = Opt_j \left\{ \begin{array}{l} X(j) \parallel |X(i) - X(j)| \leq visual, \\ j = 1, 2, \dots, N \\ (i = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$Pg = Opt_i \{X(i), i = 1, 2, \dots, N\} \quad (3)$$

dimana jarak *visual* diasumsikan konstan.

2. *Dispersing behavior* (perilaku menyebar)

Pada interval waktu tertentu, setiap individu menyebar secara acak. Hal ini yang mengakibatkan perbedaan di setiap individu kecoa. Model matematikanya yaitu:

$$X'(i) = X(i) + rand(1, D), i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

dengan $rand(1, D)$ adalah vektor D-dimensional acak yang dapat diatur dengan *range* tertentu.

3. *Ruthless behavior* (perilaku kejam)

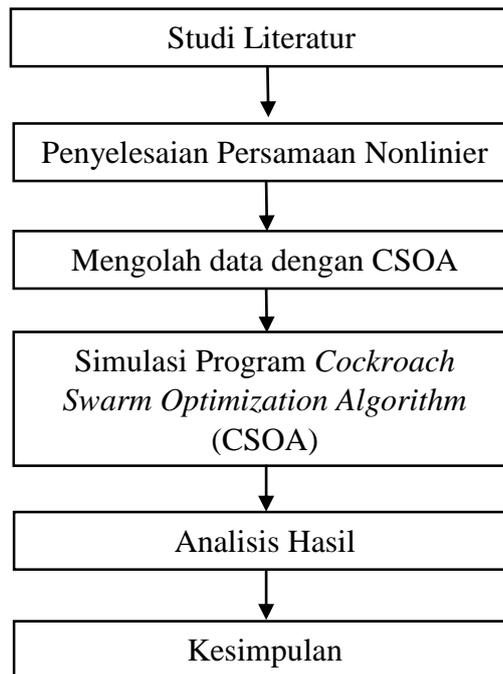
Pada interval di waktu tertentu, individu terbaik (yang sudah ditemukan) menggantikan individu yang dipilih secara acak, dan yang lebih kuat memangsa yang lebih lemah. Modelnya yaitu:

$$X(k) = Pg \quad (5)$$

dengan k adalah *integer* (bilangan bulat) acak antara 1 sampai banyaknya jumlah populasi [6].

2. Metodologi

Pada bagian ini dijelaskan langkah-langkah penelitian penerapan *Cockroach Swarm Optimization Algorithm* (CSOA) untuk menyelesaikan persamaan non linier yang memiliki akar bilangan kompleks sebagai berikut:



Gambar 1. Skema metode penelitian

Persamaan non linier yang digunakan pada penelitian ini yakni berupa persamaan polynomial,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (6)$$

dimana x adalah peubah dan a_n adalah konstanta [4].

Aturan penentuan lokasi akar polinomial sering disebut dengan aturan tanda *Descartes*. Terdapat dua tahap pengerjaan yaitu tahap pertama penentuan komposisi akar polinomial dengan aturan tanda *Descartes* dan tahap kedua penentuan batas selang akar. Untuk menentukan komposisi akar polinomial, perhatikan langkah berikut.

Misalkan, u adalah banyaknya pergantian tanda koefisien a_i dari polinomial $P(x)$ dan n_p adalah banyaknya akar real positif, maka berlaku:

$$i. \quad n_p \leq u \quad (7)$$

$$ii. \quad u - n_p = 0, 2, 4, \dots \quad (8)$$

Sedangkan untuk menentukan komposisi akar real negatif, misalkan v adalah banyaknya pergantian tanda koefisien a_i dari polinomial $P(-x)$ dan n_g adalah banyaknya akar real negatif, maka berlaku:

$$i. \quad n_g \leq v \quad (9)$$

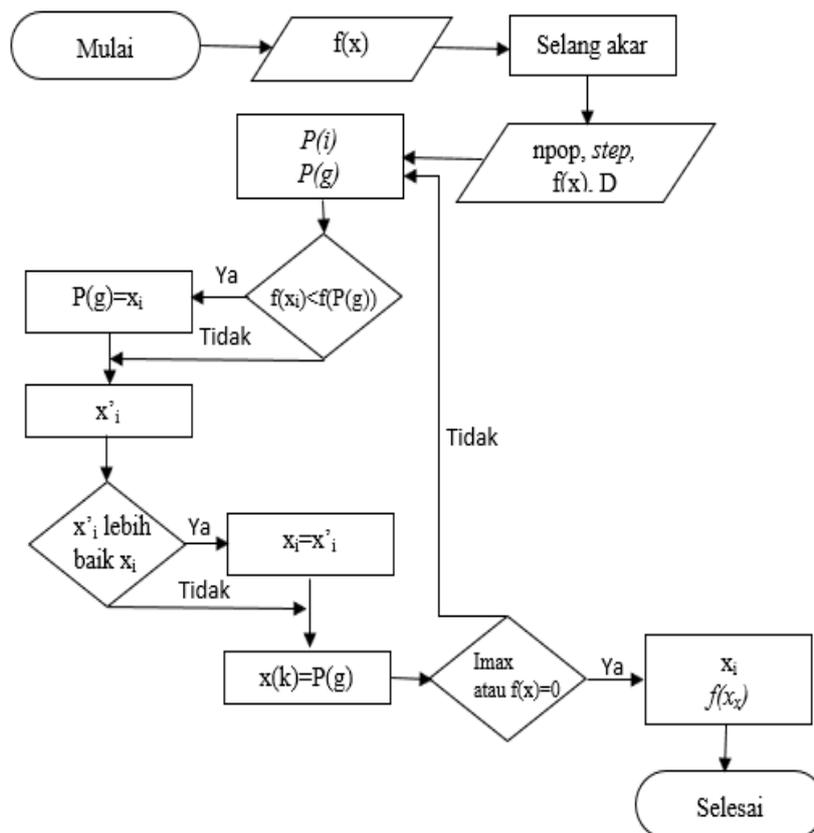
$$ii. \quad v - n_g = 0, 2, 4, \dots \quad (10)$$

Penentuan batas selang akar ditentukan oleh aturan berikut:

$$r = 1 + \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\} \quad (11)$$

Sehingga selang akar yang dicari adalah $[-r, r]$.

Setelah dilakukannya pencarian lokasi akar maka dapat dilakukan proses penyelesaian menggunakan algoritma CSOA. Berikut adalah gambar flowchart dari proses penyelesaiannya.



Gambar 2. Flowchart persamaan non linier pada CSOA

3. Hasil dan Pembahasan

Penerapan persamaan non linier pada algoritma yang diajukan menggunakan beberapa parameter yang ditetapkan sebagai pembangkit formula dari CSOA. Parameter yang digunakan berupa selang dugaan akar, jumlah populasi, *visual*, nilai dimensi vektor dan *step*. Penetapan input serta parameter persamaan di atas yaitu untuk jumlah populasi sebanyak 50, *step* dan *visual* masing-masing sebesar 0.5 dan 0.5. Selang akar yang digunakan setiap persamaan berbeda, karena setiap persamaan dicari selang dugaan akar menggunakan aturan tanda *Descartes*. Peneliti menggunakan iterasi maksimum sebesar

1000 iterasi, dengan mengambil nilai random dimensi vektor [-0.01,0.01]. Pengulangan acak dilakukan sebanyak 10 kali supaya didapat nilai *fitness* terbaik dari pengulangan tersebut. Pada percobaan penelitian digunakan 3 contoh persamaan non linier pada Tabel 1 yang memiliki akar bilangan kompleks yang diambil dari beberapa sumber yakni dari [2] dan [5] sebagai berikut.

Tabel 1. Contoh percobaan

No	Persamaan Non Linier (PNL)
1	$x^2 + 4x + 5 = 0$
2	$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$
3	$x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5 = 0$

Tabel 2 merupakan hasil dari penerapan CSOA. Pada penelitian ini, penerapan CSOA dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB.

Tabel 2. Hasil perhitungan CSOA menggunakan MATLAB

No PNL	Solusi	Nilai f(x)
1	-1,999997358921-1,000003437802i	8,670373234472e-06
	-1,999973190501+1,000003149304i	5,398776264334e-05
2	-0,174684418433-1,546881639398i	8,460206199522e-05
	-0,174652999202+1,546846296981i	2,612861888665e-04
3	-0,548392671695+0,782421494081i	2,606296574702e-04
	-0,548385222681-0,782470713177i	1,031194591454e-03

1. Persamaan pertama

Parameter yang digunakan sesuai ketentuan yang telah dijelaskan, kemudian untuk selang yang didapat dari persamaan 1 menggunakan formula persamaan (2.10) yakni antara -5 sampai 5. Didapat solusi dari CSOA berupa $x = -1,999997358921 - 1,000003437802i$ dan nilai *fitness* = 8,670373234472e-06. Persamaan 1 yang diselesaikan menggunakan *Newton-Raphson* didapat solusi berupa $x = -1,999997 + 1,000008i$ dengan nilai *fitness* = 1,708807584263e - 05. Pemaparan di atas menunjukkan bahwa nilai *fitness* yang didapat dari algoritma CSOA lebih baik daripada nilai *fitness* dari metode *Newton-Raphson*. Nilai *fitness* dari CSOA lebih mendekati nilai nol daripada nilai *fitness* dari *Newton-Raphson*.

2. Persamaan kedua

Selang akar yang digunakan pada persamaan kedua ini yakni antara -3 sampai 3, dengan parameter yang sama didapatkan solusi terbaik dari CSOA berupa $x = -0,174684418433 - 1,546881639398i$ dan nilai *fitness* terbaik dari 10 kali pengulangan acak yang didapat yaitu $= 8,460206199522e - 05$. Solusi yang didapat dari metode *Newton-Raphson* dengan penyelesaian yang menghasilkan $x = -0,174685 + 1,546869i$ dengan nilai *fitness* $= 1,556699603343e-03$. Solusi yang tertera menunjukkan bahwasannya perbandingan nilai *fitness* dari CSOA dengan nilai *fitness* metode *Newton-Raphson* memiliki perbedaan yang signifikan, dimana nilai *fitness* dari CSOA lebih kecil daripada *Newton-Raphson*. Dengan kata lain, aproksimasi dari CSOA lebih baik daripada metode *Newton-Raphson*.

3. Persamaan ketiga

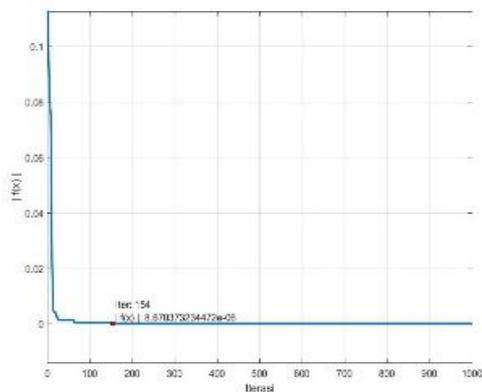
Penyelesaian persamaan non linier dengan CSOA dilakukan dengan terlebih dahulu mencari selang kisaran akar dengan aturan tanda *Descartes*. Selang akar yang digunakan pada persamaan ketiga ini yakni antara -4 sampai 4. Dengan menggunakan parameter yang sama didapatkan solusi terbaik dari CSOA yaitu $x = -0,548392671695 + 0,782421494081i$ dan nilai *fitness* terbaik dari 10 kali pengulangan acak yang didapat yaitu $2,606296574702e-04$. Pendekatan solusi dan nilai *fitness* dari metode *Newton-Raphson* yakni bernilai $x = -0,552486 + 0,780503i$ dan *fitness* bernilai $= 8,028366525181e-02$. Dari hasil yang didapat, maka dapat dikatakan bahwa program CSOA lebih baik dari metode *Newton-Raphson* untuk mendekati solusi eksak suatu persamaan polinomial dengan akar bilangan kompleks.

Prosedur Cockroach Swarm Optimization Algorithm (CSOA)

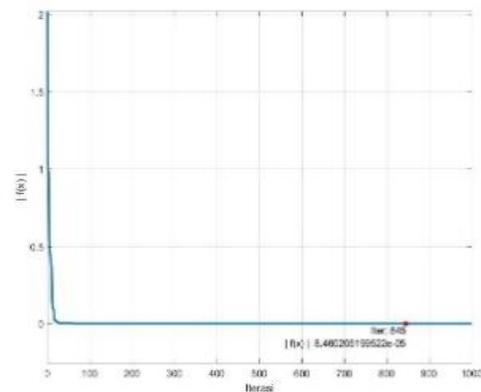
```
Input persamaan;
Input interval [a,b];
Inisialisasi parameter;
Pembangkit populasi;
for iter=1:iterasi maksimum
    for i=1:Jumlah populasi
        hitung nilai  $x'(i)$  pada chase-swarming
        behaviour
        hitung nilai fitness yang didapat
    end
    cari nilai  $P(g)$  terbaik
    for i=1:Populasi
        cari nilai  $X_j$  dari jumlah populasi;
        hitung nilai fitness dari  $X_j$ ;
        for j=1:Populasi
            cari nilai  $P(i)$ 
        end
    end
    Pengecekan terminasi
End
```

Gambar 3. Pseudocode algoritma CSOA

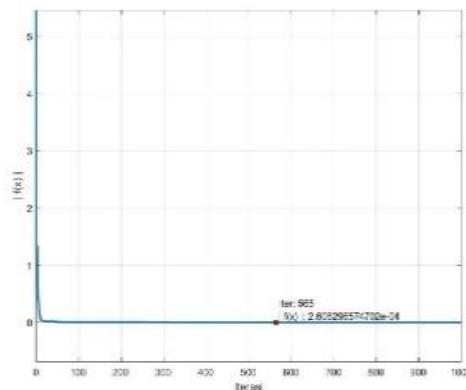
Peneliti mendapatkan pendekatan solusi dari permasalahan persamaan non linier yang memiliki akar bilangan kompleks menggunakan CSOA seperti yang telah dipaparkan pada Tabel 2. Solusi tersebut telah dibandingkan dengan metode lain yang digunakan pada beberapa kasus persamaan non linier, yakni *Newton-Raphson*. Solusi-solusi yang didapat dari CSOA dan *Newton-Raphson* telah dijelaskan seperti diatas. Selanjutnya, kekonvergenan *output* program CSOA divisualisasikan dalam bentuk grafik kekonvergenan seperti pada Gambar 4. Grafik tersebut meunjukkan bahwa nilai fitness konvergen menuju nilai nol, yang berarti bahwa solusi yang didapatkan sudah mendekati solusi eksak.



a. PNL 1



b. PNL 2



c. PNL 3

Gambar 4. Konvergensi algoritma CSOA

Gambar 4.a menunjukkan bahwa pada iterasi ke-154 nilai *fitness* persamaan 1 mulai konvergen menuju nilai $8,670373234472e-06$. Selanjutnya Gambar 4.b. persamaan 2 mulai konvergen menuju nilai *fitness* $8,460206199522e-05$ pada iterasi ke-845. Pada Gambar 4.c. menunjukkan persamaan 3 konvergen menuju nilai *fitness* terbaik yaitu $2,606296574702e-04$ pada iterasi ke-565.

Hasil-hasil yang didapatkan pada kasus contoh pada penelitian ini menunjukkan bahwa algoritma CSOA yang diawali dengan pencarian selang menggunakan metode aturan tanda *Descartes* dapat menjadi alternatif dalam pencarian solusi persamaan non linier polinomial yang memiliki akar bilangan kompleks. Hasil yang didapatkan juga menunjukkan bahwa solusi CSOA relatif lebih akurat dibandingkan dengan solusi yang didapatkan dengan metode *Newton-Raphson*. Sedangkan untuk kasus akar bilangan riil, penerapan algoritma ini relatif lebih mudah diaplikasikan, karena tidak memerlukan prasyarat selang akar khusus dalam pencarian solusi. Sehingga dengan nilai awal bilangan random, maka konvergensi solusi akan didapatkan.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan, maka bisa disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

- a) *Cockroach Swarm Optimization Algorithm* (CSOA) merupakan salah satu *swarm intelligent* yang mampu menyelesaikan permasalahan persamaan non linier yang memuat akar kompleks dengan aproksimasi yang selalu konvergen pada solusi eksak. CSOA tidak hanya bisa menemukan akar kompleks saja melainkan juga akar bilangan riil yang terdapat pada persamaan non linier yang diujikan. Namun pada kasus ini, fokus kajian hanya pada akar bilangan kompleks.
- b) Akurasi dari CSOA dapat dilihat dari perbedaan nilai *fitness* yang didapat antara penyelesaian menggunakan CSOA dan penyelesaian menggunakan metode *Newton-Raphson*. Dari contoh persamaan yang diuji, CSOA memiliki nilai *fitness* lebih kecil dibandingkan dengan metode *Newton-Raphson*, hal itu menandakan bahwa CSOA memiliki keakuratan yang baik untuk penyelesaian persamaan non linier dengan akar bilangan kompleks.

Daftar Pustaka

- [1] Anwar, Z. (2016). Penerapan Gabungan Metode Zero Crossing Dan Virus Evolutionary Genetic Algorithm (Vega) Pada Penyelesaian Persamaan Non-Linier. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
- [2] Ariyaratne, M. K. A., Fernando, T. G. I., dan Weerakoon, S. (2015). A Modified Firefly Algorithm to solve Univariate Nonlinear Equations with Complex Roots. *International Conference on Advances in ICT for Emerging Regions*: 160-167.

- [3] Baihaki, N. A. (2016). Penerapan Algoritma Cat Swarm Optimization (CSO) Pada Penyelesaian Sistem Persamaan Non-linier. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
- [4] Basuki, A. dan Ramadijanti, N. (2004). *Metode Numerik Sebagai Algoritma Komputasi*. Surabaya: PENS- ITS.
- [5] Muheadden, S. A. (2010). A New Technique to Compute Complex Roots. *Journal of Kirkuk University-Scientific Studies*. 5(2): 110-111.
- [6] Obagbuwa, I. C. dan Adewumi, A. O. (2014). An Improved Cockroach Swarm Optimization. *The Scientific World Journal*. 10(1): 1-13.
- [7] Prastowo, F. K. (2016). Penerapan Cockroach Swarm Optimization Algorithm (CSOA) Pada Penyelesaian Sistem Persamaan Non linier. *Skripsi*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.