ANALISIS MEKANIKA LAGRANGE PADA BENDA TEGAR DENGAN PENDEKATAN DAN PENERAPANNYA PADA SISTEM FISIKA

[1)]Irna Marga Utama*, [1)]Raden Roro Nimas Sekar Nafa Nathaniela, [1)]Bayu Setiaji.
[1)]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta
Email: irnamarga.2023@student.uny.ac.id

Abstract

The Lagrange method is a method used to solve complex mechanical problems by utilizing kinetic and potential energy. This research examines the application of the Lagrange method to rigid body systems, where the position and orientation of the body are determined by general coordinates. This article uses a literature study approach from various relevant sources. The research results show that the Lagrange method is effective in solving mechanical problems in rigid body systems that cannot be solved using Newton's method.

Keywords : Lagrange method, Mechanics of rigid bodies, Generalized coordinates, Effectiveness of Lagrange method

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kejadian fisis yang memerlukan analisis gerakan menggunakan metode yang lebih canggih daripada metode Newtonian. Salah satu metode tersebut adalah metode Lagrange, yang diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange pada tahun 1788. Metode ini memungkinkan penyelesaian masalah mekanika melalui pendekatan energi kinetik dan potensial, yang lebih efisien dalam sistem dengan banyak derajat kebebasan atau dalam sistem yang memiliki batasan yang rumit. Misalnya, dalam dinamika benda tegar, metode Lagrange menawarkan cara yang sistematis untuk memperoleh persamaan gerak tanpa perlu menganalisis gaya kontak secara langsung (Fowles, 2007; Goldstein et al., 2011; Symon, 2018; Taylor, 2020; Thornton & Marion, 2021; Bernstein et al., 2023)

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji penerapan metode Lagrange pada sistem benda tegar dan menilai efektivitasnya dalam menyelesaikan masalah yang kompleks. Melalui pendekatan energi, metode ini mampu mengatasi kesulitan yang sering dihadapi dalam pendekatan Newtonian, terutama ketika berhadapan dengan sistem dengan banyak variabel dan batasan. Studi ini diharapkan dapat memberikan kontribusi signifikan dalam pemahaman mekanika benda tegar dan aplikasi praktisnya dalam berbagai bidang teknik dan fisika (Morin, 2020; Arnold, 2014; Marion & Thorton, 2013)

Berbagai penelitian telah dilakukan untuk mengkaji mekanika Lagrange. Hanifah (2022) dalam studi literaturnya menjelaskan bahwa metode Lagrange efektif dalam menyelesaikan masalah mekanika yang kompleks. Fowles (2007) dan Ndikilar (2019) juga menyatakan bahwa metode ini dapat diterapkan pada berbagai sistem mekanika [3][4].

METODE

Penelitian ini menggunakan metode deskriptif dengan pendekatan studi pustaka. Sumber-sumber yang digunakan berasal dari jurnal, buku, dan artikel ilmiah yang relevan dengan topik mekanika Lagrange dan sistem benda tegar. Analisis dilakukan dengan mengkaji konsep-konsep dasar serta aplikasi metode Lagrange pada sistem benda tegar.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Mekanika Lagrange merupakan pendekatan yang sering digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam mekanika yang sulit ditangani menggunakan metode Newton. Dalam mekanika Lagrange, posisi suatu partikel di ruang dapat ditentukan dengan menggunakan tiga jenis koordinat: kartesian, bola, atau silinder. Ketika benda bergerak dalam bidang, derajat kebebasannya adalah 2, dan dalam ruang tiga dimensi, derajat kebebasannya adalah 3. Untuk N partikel, diperlukan 3N koordinat untuk menentukan posisi semua partikel tersebut. Jika ada kendala dalam sistem, jumlah koordinatnya akan kurang dari 3N. Misalnya, untuk benda tegar, hanya diperlukan posisi pusat massa dan orientasi benda, yaitu 6 koordinat.

Koordinat Umum

Misalkan koordinat umum diberi simbol q1, q2, ..., qn, yang bisa berupa jarak atau sudut. Jika koordinat umum dapat bebas menentukan sistem, maka sistem disebut holonomik; jika tidak, disebut nonholonomik. Koordinat kartesian dalam sistem partikel bisa dinyatakan sebagai fungsi dari koordinat umum ini.

Untuk satu derajat kebebasan, gerak dapat dinyatakan sebagai:

$$x=x(q) \qquad (1)$$

Untuk dua derajat kebebasan:

$$x=x(q1,q2) \qquad (2)$$

$$y=y(q1,q2) \qquad (3)$$

Dan untuk tiga derajat kebebasan:

$$x=x(q1,q2,q3) \qquad (4)$$

$$y=y(q1,q2,q3) \qquad (5)$$

$$z=z(q1,q2,q3) \qquad (6)$$

Persamaan Lagrange

Untuk mendapatkan persamaan diferensial gerak, kita mulai dengan energi kinetik N partikel yang dinyatakan sebagai:

$$T = \sum_i^N \frac{1}{2}\, m\, (\dot{x}_i + \dot{y}_\iota + \dot{z}_\iota)$$

$$= \sum_i^{3N} \frac{1}{2}\; m\, \dot{x}_i \qquad (7)$$

Dimana *xi* adalah fungsi koordinat umum $xi=xi(q1,q2,\ldots,qn,t)$ Dengan demikian, energi kinetik dapat ditulis sebagai:

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (8)$$

Jika *xi* bukan fungsi dari waktu t, maka:

dtd(∂*q*˙*k*∂*T*)−∂*qk*∂*T*=0

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\dot{x}i$ dan mengambil turunan terhadap waktu, kita mendapatkan:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) - m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \quad (9)$$

Persamaan ini adalah persamaan Lagrange untuk sistem konservatif:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (10)$$

Dimana L adalah fungsi Lagrangian, $L=T-V$ dan V adalah energi potensial (Ariyanti et al., 2022).

Aplikasi pada Osilator Harmonik

Untuk sebuah osilator harmonik dengan gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan, sistem ini adalah nonkonservatif. Jika x adalah pergeseran, fungsi Lagrangian yang digunakan adalah:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, kx^2 \qquad (11)$$

Di mana:
m adalah massa sistem
x adalah kecepatan sistem
k adalah konstanta pegas
Sekarang, kita dapat menerapkan persamaan Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (12)$$

Menghitung turunan parsial:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \qquad (14)$$

Mensubstitusikan ini ke dalam persamaan Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$$

Menyederhanakan:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (15)$$

Ini adalah persamaan gerak untuk osilator harmonik sederhana, yang menggambarkan gerakan sistem massa-pegas. Solusi dari persamaan ini adalah fungsi sinusoidal, yang mewakili gerakan osilasi sistem.

Dengan kehadiran gaya redaman $c\dot{x}$, persamaan geraknya menjadi:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -kx - c\dot{x} \qquad (16)$$

(S. Wahyuni et al., 2022; R. Aminullah, et al., 2023)

Aplikasi pada Partikel Tunggal di Medan Sentral

Untuk partikel yang bergerak dalam bidang di bawah pengaruh medan sentral, kita menggunakan koordinat polar $q1=r$ dan $q2=\theta q2=\theta$:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad (17)$$

Energi potensial tergantung hanya pada r:

$$V=f(r) \quad (18)$$

Persamaan Lagrange untuk sistem konservatif adalah:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0$$

Menghitung turunan, diperoleh persamaan gerak:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad (20)$$

Dengan cara ini, kita bisa mendapatkan solusi gerak untuk partikel dalam medan sentral menggunakan pendekatan Lagrange (Syahrial et al., 2021).

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Lagrange efektif dalam menyelesaikan masalah mekanika pada sistem benda tegar. Metode ini memungkinkan analisis yang lebih efisien dibandingkan dengan metode Newtonian. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengembangkan aplikasi metode Lagrange pada sistem mekanika yang lebih kompleks dan beragam.

UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan tulus kami sampaikan rasa terima kasih yang mendalam kepada semua pihak yang telah mendampingi dan memberikan semangat selama proses penyelesaian artikel ini. Terutama kepada rekan-rekan seperjuangan yang tak henti-hentinya memberikan dukungan moral, ide, dan waktu mereka. Tanpa kehadiran dan kontribusi kalian, penyusunan artikel ini tidak akan berjalan lancar. Semoga kebersamaan dan kolaborasi kita terus berkembang untuk pencapaian yang lebih gemilang di masa depan. Terima kasih atas segala bantuan dan inspirasi yang telah kalian berikan.

DAFTAR PUSTAKA

Arnold, V. I. 2014. Mathematical Methods of Classical Mechanics (2nd ed.). Springer.

Bernstein, D. S., Goel, A., & Kouba, O. 2023. Deriving Euler's Equation for Rigid-Body Rotation via Lagrangian Dynamics with Generalized Coordinates. *Mathematics, 11*(12), 2727. https://doi.org/10.3390/math11122727

Fowles, G. R. 2007. *Analytical Mechanics* (7th ed.). United States of America: Brooks/Cole.

Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko, J. L. 2011. *Classical Mechanics (3rd ed.).* Addison-Wesley.

Hanifah, S. 2022. Mekanika Lagrangian. *Academia.edu*. Retrieved from https://www.academia.edu/9877665/Mekanika_Lagrangian

Marion, J. B., & Thornton, S. T. 2013. *Classical Dynamics of Particles and Systems (5th ed.)*. Brooks/Cole.

Morin, D. 2020. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press.

Ndikilar, C. E. 2019. *Analytical Mechanics*. Zaria, Nigeria: Ahmadu Bello University Press Limited.

Raniati, Ariyanti, Y., Subekti, P., & Syahropi, H. 2022. Studi Literatur: Mekanika Lagrange. *Jurnal APTEK: Artikel Ilmiah Aplikasi Teknologi*, *15*(1), 55-58. Retrieved from http://journal.upp.ac.id/index.php/aptek

Symon, K. R. 2018. *Mechanics*. Addison-Wesley.

Taylor, J. R. 2020. *Classical Mechanics*. University Science Books.

Thornton, S. T., & Marion, J. B. 2021. *Classical Dynamics of Particles and Systems (6th ed.*). Cengage Learning.

A. H. Syahrial, W. Deliana, V. D. Cahyani, A. F. Husaini. 2022. Pembelajaran Fisika Materi Mekanika Benda Tegar: Review Media, Model, dan Metode.

S. Wahyuni, E. Irawati, J. Saefan. 2022. Mekanika Pegas-Pendulum Tergandeng dalam Tinjauan Lagrangian.

R. Aminullah, Mohammad, A. R., Dzulkiflih, Muhimmarul, K. 2023. Analisa *Lagrange* Pada Dinamika *Stroller Non-Holonomic* Berbasis Komputasi Fisika