

PENERAPAN PERSAMAAN LAGRANGE PADA SISTEM BANDUL GANDA YANG TERHUBUNG OLEH PEGAS

¹ Nila Mutia Dewi

¹Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Jember

Email: nilamutia@unej.ac.id

Abstract

Lagrange mechanics is an analytical method in classical mechanics that does not consider forces acting on the system. It focuses instead on kinetic and potential energies as the core of the entire system. The primary goal of this study is to derive the equations of motion for the coupled pendulums connected by a spring system using Lagrange equation. Two identical pendulums, each positioned at the end of its respective lengths, were connected by a spring. Formulating the Lagrangian for this system enabled the derivation of the equation of motion through the Lagrange equation. These equations were graphically represented with predefined initial conditions. The results revealed a recurring pattern: as amplitude of the first pendulum increased, the amplitude of the second pendulum decreased and vice versa. This phenomenon occurs due to the exchange of energy between the two pendulums, where one loses energy while the other gains it.

Keyword: Lagrange equation, coupled pendulums, equation of motion

PENDAHULUAN

Mekanika Newton adalah metode yang umumnya digunakan untuk menganalisis pergerakan suatu sistem. Dalam metode ini, gerak sistem dianalisis dengan mengaitkan gaya dan pergerakannya menggunakan tiga Hukum Newton (Giancoli, 2014). Konsep mekanika Newton ini relatif mudah jika diterapkan pada sistem yang sederhana, namun akan menjadi lebih kompleks ketika diterapkan pada sistem yang lebih rumit. Tantangan utama yang muncul saat menggunakan konsep mekanika Newton adalah saat menggambarkan diagram benda-bebas, di mana dibutuhkan ketelitian dalam menguraikan vektor-vektor menjadi komponen-komponennya (Raniati et al., 2022).

Pada tahun 1788 diperkenalkan sebuah terobosan oleh seorang ilmuwan bernama Joseph Louis Lagrange yang menciptakan suatu metode analisis tanpa mempertimbangkan gaya yang bekerja pada sistem tersebut. Metode ini dikenal

sebagai Mekanika Lagrange (Ariska et al., 2019). Metode ini sangat sederhana untuk diterapkan sehingga memungkinkan penyelesaian sistem gerak yang kompleks tanpa memerlukan pemahaman mendalam tentang mekanika. Dalam mekanika Lagrange, Lagrangian (L) untuk sistem konservatif diungkapkan dalam bentuk energi kinetik (T) dan energi potensial (V) (Gregory, 2006). Persamaan Lagrange dapat dituliskan pada persamaan 1 berikut.

$$L = T - V \quad (1)$$

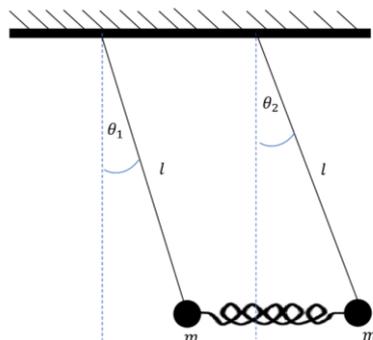
Persamaan gerak dari sistem dengan koordinat umum (q) dapat ditentukan menggunakan persamaan Lagrange sebagaimana ditunjukkan pada persamaan 2 berikut

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (2)$$

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya yang menjadi bahan rujukan penelitian ini. Sebagai contoh, penelitian yang dilakukan oleh Rini et al., (2023)

berhasil mendapatkan persamaan gerak dari pendulum-pegas terdang menggunakan persamaan Lagrange; Nenuwe, (2019) yang mengaplikasikan persamaan Lagrange pada sistem bandul pegas ganda pada koordinat umum yang diselesaikan menggunakan metode numerik berbantuan aplikasi MAPLE; Wahyuni et al., (2022) mencari persamaan gerak sistem dengan menggunakan metode Lagrangian dan tampilan visualisasinya, serta Baleanu et al., (2018) yang menggunakan persamaan Lagrange dan metode numerik *Fractional Different Equation* (FDE) untuk menyelesaikan persamaan gerak sistem dua bandul yang terhubung.

Pada penelitian ini, peneliti melakukan analisis terhadap sistem bandul ganda yang terhubung dengan pegas menggunakan persamaan Lagrange untuk mendapatkan persamaan gerak sistem tersebut. Sistem terdiri dari dua buah bandul identik bermassa m . Bandul pertama dan kedua masing-masing terhubung dengan tali tak bermassa dengan panjang l . Kedua bandul terhubung dengan ujung pegas elastis tak bermassa dengan konstanta pegas k , dengan sudut defleksi θ_1 dan θ_2 . Peneliti membatasi sistem ini dalam ruang dua dimensi yang hanya mencakup bidang x dan y . Kedua bandul dianggap sebagai bola kecil, sehingga aspek volume dapat diabaikan. Model sistem ini digambarkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Sistem bandul ganda yang terhubung oleh pegas

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka yang merujuk pada berbagai sumber literatur yang relevan. Penelitian ini melibatkan telaah terhadap artikel, jurnal, buku, dan referensi terkait lainnya. Proses penelitian ini mencakup langkah-langkah seperti analisis literatur, pengelolaan informasi, serta penyimpulan hasil.

Analisis literatur menggambarkan tahapan mengumpulkan bahan bacaan terkait persamaan Lagrange. Pengolahan informasi merujuk pada langkah untuk mengubah struktur sistem bandul ganda yang terhubung oleh pegas menjadi bentuk persamaan Lagrange sehingga menghasilkan persamaan gerak yang merepresentasikan gerak dari sistem tersebut. Persamaan gerak sistem yang dihasilkan akan dianalisis secara numerik menggunakan aplikasi SCILAB. Sementara itu, tahap penyimpulan menekankan pada merangkum temuan yang dihasilkan dari studi yang telah dilakukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah awal dalam menurunkan persamaan gerak dalam mekanika Lagrange adalah dengan mendefinisikan energi kinetik dan energi potensial sistem (Shanak et al., 2021). Energi kinetik dari sistem di atas ditunjukkan pada persamaan 3 berikut.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (3)$$

keterangan :

$$x_1 = l\theta_1$$

$$x_2 = l\theta_2$$

x_1 adalah perpindahan yang dialami oleh bandul pertama dan x_2 merujuk pada perpindahan bandul kedua. Selanjutnya, ketika kedua variabel x_1 dan x_2 diturunkan terhadap waktu, akan menghasilkan variabel kecepatan bandul pertama (\dot{x}_1) dan bandul kedua (\dot{x}_2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l\dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 &= l\dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Persamaan untuk energi kinetik total sistem (T) dinyatakan pada persamaan 4 berikut

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_2)^2 \quad (4)$$

Bentuk energi potensial dapat ditentukan dengan mengasumsikan bahwa nilai potensial nol terletak di kedua ujung tetap tali. Sehingga, energi potensial sistem adalah hasil penjumlahan energi potensial dari kedua massa serta energi potensial pegas. Dengan demikian, total energi potensialnya ditunjukkan pada persamaan 5 berikut.

$$\begin{aligned} V &= -mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2 + \\ &\frac{1}{2}k(l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Lagrangian L dari sistem didefinisikan dalam persamaan (1). Oleh karena itu, L dari sistem bandul ganda yang terhubung oleh pegas dituliskan sebagaimana pada persamaan 6 berikut.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + mgl \cos \theta_1 + \\ &mgl \cos \theta_2 - \frac{1}{2}kl^2(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Diasumsikan bahwa sudut simpangan dari sistem tersebut relatif kecil terhadap panjang tali, maka nilai

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \theta \\ \cos \theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + mgl \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) + mgl \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + mgl - \\ &mgl \frac{\theta_1^2}{2} + mgl - mgl \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + 2mgl - \\ &\frac{1}{2}mgl\theta_1^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_2^2 - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Persamaan gerak Lagrange dalam koordinat umum seperti tertulis pada persamaan 2 dapat diuraikan menjadi persamaan berikut

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan 10 dan persamaan 11, penyelesaian persamaan Lagrange pada koordinat umum θ_1 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = ml^2\dot{\theta}_1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -mgl\theta_1 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}_1) = -mgl\theta_1 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (14)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (15)$$

kedua ruas dibagi dengan ml^2 sehingga menghasilkan

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\theta_1 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) \quad (16)$$

Sedangkan penyelesaian persamaan Lagrange pada koordinat umum θ_2 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgl\theta_2 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}_2) = -mgl\theta_2 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (19)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -mgl\theta_2 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (20)$$

kedua ruas dibagi dengan ml^2 sehingga menghasilkan

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\theta_2 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) \quad (21)$$

Persamaan gerak sistem bandul ganda yang terhubung oleh pegas didefinisikan menurut persamaan 22 dan persamaan 23 berikut.

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (22)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (23)$$

Pada persamaan 22 dan 23 terlihat bahwa keduanya merupakan persamaan diferensial orde dua. Persamaan tersebut diselesaikan secara numerik menggunakan bantuan aplikasi Scilab. Namun, selain menggunakan bantuan aplikasi Scilab,

persamaan gerak tersebut dapat diselesaikan secara analitik seperti penelitian yang dilakukan oleh Rini et al., (2022) dan Situmorang et al., (2016) sehingga menghasilkan solusi umum sebagaimana ditunjukkan pada persamaan 24 dan 25 berikut

$$\theta_1(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t \quad (24)$$

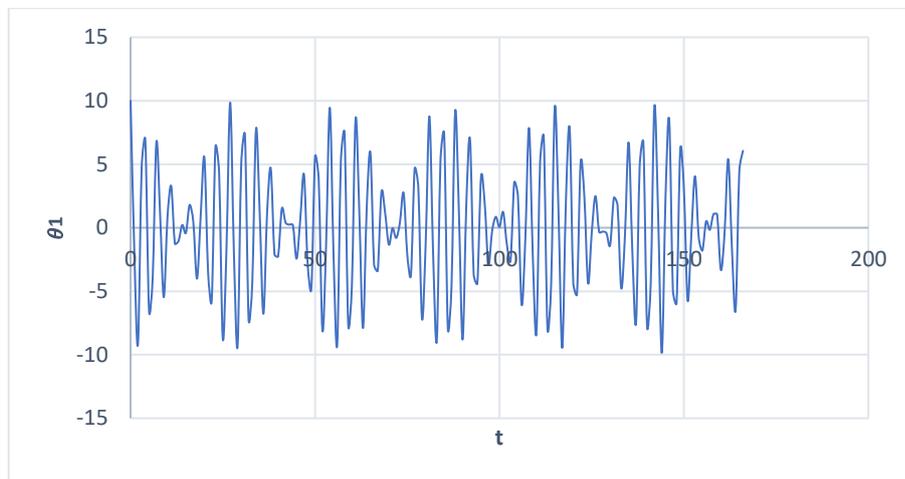
$$\theta_2(t) = C_1 \cos \omega_1 t - C_2 \cos \omega_2 t \quad (25)$$

Keterangan:

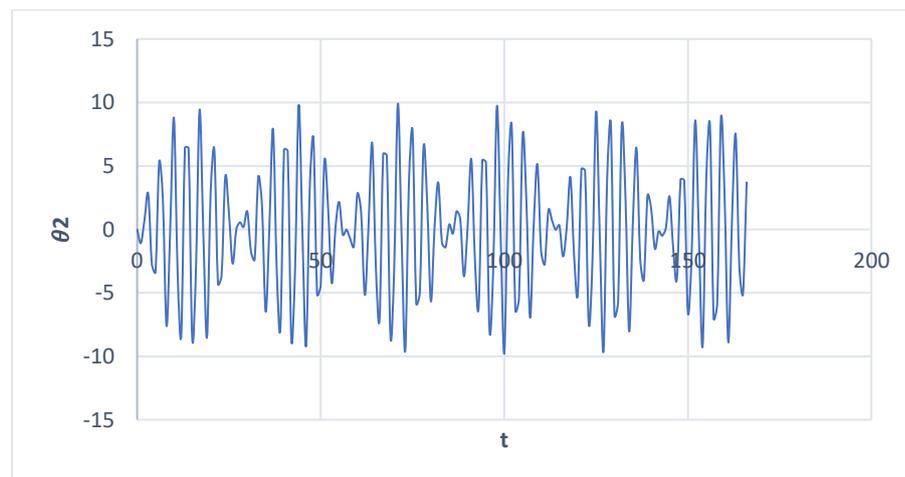
$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

Artikel ini akan menyajikan visualisasi mengenai dinamika yang muncul berdasarkan persamaan (22) dan (23) dengan kondisi awal saat $t = 0s$ nilai $\theta_1 = 10^\circ$ dan $\theta_2 = 0^\circ$. Parameter yang digunakan antara lain $g = 9,8 \text{ m/s}^2$; $m = 1 \text{ kg}$; $l = 0,5 \text{ m}$; dan $k = 1 \text{ N/m}$ Grafik keluaran yang ditampilkan merupakan grafik hubungan sudut θ_1 dan θ_2 terhadap waktu t yang tertera pada Gambar 2 dan 3.



Gambar 2. Grafik hubungan sudut θ_1 vs t



Gambar 3. Grafik hubungan sudut θ_2 vs t

Hasil visualisasi grafik hubungan sudut θ_1 terhadap waktu t yang tersaji pada Gambar 2 menggambarkan bahwa saat

kondisi awal ($t = 0s$), bandul pertama memiliki perpindahan sudut sebesar 10° dan mengalami osilasi yang kemudian

amplitudonya secara bertahap menurun hingga mencapai nol. Sedangkan pada Gambar 3 yang merupakan visualisasi grafik hubungan sudut θ_2 terhadap waktu t , berbeda dengan bandul pertama, di mana bandul kedua memiliki perpindahan sudut awal sebesar 0° dan kemudian mulai berosilasi. Hal ini dikarenakan bandul kedua terhubung oleh pegas dengan bandul pertama. Amplitudo bandul kedua terus naik sampai mencapai nilai maksimalnya, kemudian akan menurun bertahap hingga nol.

Pola ini berulang, kenaikan amplitudo pada bandul pertama berkaitan dengan penurunan amplitudo bandul kedua, dan sebaliknya. Fenomena ini terjadi karena adanya pertukaran energi antara kedua bandul; saat bandul pertama mulai berayun, bandul pertama akan kehilangan energi dan energi akan ditransfer ke bandul kedua. Seiring bandul kedua yang mulai menerima transfer energi dari bandul pertama, bandul kedua mulai berosilasi.

KESIMPULAN DAN SARAN

Sistem yang terdiri dari dua bandul identik dengan massa m , terhubung oleh pegas elastis tidak bermassa dengan konstanta pegas k telah diteliti. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh dua persamaan gerak pada sistem bandul ganda yang terhubung dengan pegas berupa persamaan diferensial orde dua yang didefinisikan menurut persamaan $\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 - \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0$ dan $\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) = 0$. Persamaan gerak ini diperoleh menggunakan konsep mekanika Lagrange. Grafik yang disertakan mempermudah visualisasi fenomena yang terjadi dalam sistem. Pada penelitian selanjutnya, direkomendasikan untuk meninjau sistem dalam tiga dimensi sepanjang bidang x, y dan z .

DAFTAR PUSTAKA

- Ariska, M. (2019). Penyelesaian Dinamika Pesawat Atwood dengan Persamaan Euler Lagrange Sebagai Alternatif Persamaan Newton pada Fisika SMA. *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika (JIPF)*, 6(1), 62-69.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., Asad, J.H. (2019). Classical and fractional aspects of two coupled pendulums. *Romanian Reports in Physics*, 71(1), 103-115.
- Giancoli, D.C. (2014). Fisika : Prinsip dan Aplikasi (Edisi ke 7-Jilid 1). Jakarta: Penerbit Erlangga
- Gregory, R.D. (2006). *Classical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
- Nenuwe, N.O. (2019). Application of Lagrange Equation to 2D Double Spring-Pendulum in Generalized Coordinates. *Ruhuna Journal of Science*, 10(2), 120-134.
- Raniati., Ariyanti, Y., Subekti, P., Syahropi, H. (2022). Studi Literatur: Mekanika Lagrange. *Jurnal Aptek*, 15(1), 55-58.
- Rini, N.W., Saefa, J., Khoiri, N. (2022). Pendekatan Numerik Gerak Kinematika Pendulum Pegas Tergandeng. *Prosiding Seminar Nasional Lontar Physics Forum VI*, 75-62.
- Rini, N.W., Saefa, J., Khoiri, N. (2023). Lagrangian Equation of Coupled Spring-Pendulum System. *Physics Communication*, 7(1), 22-27.
- Shanak, H., Jarrar, R., Khalilia, H., & Asad, J. (2021). Numerical Aspects of The Kinematics Behaviour of Coupled Pendulum. *Journal of Engineering*

Science and Technology, 16(5), 4016-4026.

Situmorang, H., Ginting, J.B., Siregar, N.E., Rajagukguk, J. (2016). Penyelesaian Numerik Model Ayunan Terpaksa Menggunakan Metode Pengali Lagrange dan Karakteristik Dinamika. *Prosiding Seminar Nasional Inovasi dan Teknologi Indonesia*, 1747-1752.

Wahyuni, S., Irawati, E., Saefan, J. (2022). Mekanika Pegas-Pendulum Tergandeng dalam Tinjauan Lagrangian. *Prosiding Seminar Nasional Lontar Physics Forum VI*, 37-42.

Zulaikha, D.F., Warsono. (2021). Aplikasi Transformasi Laplace pada Sistem Dinamik Pendulum Terbalik dengan Redaman dan Gaya Penggerak. *Jurnal Pendidikan Fisika*, 9(1), 1-6.