# Optimum Simplex Lattice Designs of Low Order Multiresponse Surface Model by D-Optimum Criterion

## *Optimum Simplex Lattice Designs of Low Order Multiresponse Surface Model by D-Optimum Criterion*

[1)]Ruslan , [2)]Susanti L, [2)]Purhadi, [2)]Sony S
*[1)]Mahasiswa S3 Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya*
*[2)]Staf Pengajar Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya*

**ABSTRACT**

Simplex lattice design is a part of mixture designs has patterns simplex {q, m} where q is number of factors and m is degree of polynomial. If entangling a number of the response variables which measured from a number of factors called the multiresponse surface model, hence to obtain get the matrix designs of optimum mixture at multiresponse surface model will be used by the optimum-D criterion. In this research, we studied about theoretical approach to get optimum simplex lattice design of low order multiresponse surface model by optimum-D criterion. We assumed that design points have similar weighted values

**Keywords** : Simplex lattice designs, multiresponse surface models, D-Optimum criterion

## PENDAHULUAN

Rancangan percobaan campuran adalah suatu rancangan percobaan yang mengasumsikan bahwa perbedaan respon yang teramati antar perlakuan hanya dipengaruhi oleh perbedaan proporsi dari setiap komponen pada campuran tersebut bukan banyaknya campuran. Dalam rancangan percobaan campuran yang melibatkan satu variabel respon dengan q variabel input (faktor) harus memenuhi kendala yang terdapat pada rancangan tersebut. Untuk rancangan percobaan campuran yang melibatkan faktor-faktor yang bersifat kuantitatif dari model percobaan yang telah ditentukan sebelumnya seringkali menetapkan taraf faktornya berdasarkan keinginan peneliti saja atau coba-coba. Hasilnya kemungkinan besar akan menimbulkan variansi penaksir respon yang besar. Untuk itu diperlukan suatu metode yang dapat menanganinya supaya menghasilkan variansi penaksir respon yang minimum yaitu rancangan percobaan optimum. Terdapat berbagai kriteria optimum, diantaranya adalah kriteria optimum-D.

Kriteria optimum-D adalah suatu kriteria yang berupaya mendapatkan matriks rancangan $\delta$ sehingga determinan dari matriks informasi maksimum dan mendapatkan nilai atau taraf faktor yang membuat variansi penaksir variabel respon minimum. Jika melibatkan sejumlah variabel respon yang diukur dari sejumlah variabel bebas atau disebut model permukaan multirespon maka untuk memperoleh matriks rancangan percobaan campuran yang optimum pada model permukaan multirespon akan digunakan kriteria optimum-D.

Teori mengenai cara mendapatkan rancangan percobaan optimal dengan kriteria optimum D, E dan A untuk analisis variansi dan analisis regresi untuk respon tunggal telah dibahas oleh Schwabe (1996) Teori mengenai kriteria optimum untuk memperoleh rancangan percobaan yang optimal dengan cara memberikan pembobotan pada titik-titik percobaan dalam analisis variansi dua arah atau lebih telah dibahas oleh Kunert (1983), Atkinson dan Bogacka (1997). Sedangkan percobaan rancangan optimum untuk model regresi linier telah dibahas oleh Lim dan Studden (1998), Mentre, Mallet dan Baccar (1997). Teori tentang model permukaan multirespon mengenai penaksiran parameter dan uji hipotesis untuk menguji ketidaksesuaian model dengan menguji parameter-parameternya telah dibahas oleh Khuri & Cornell (1996). Rancangan percobaan optimum untuk rancangan percobaan campuran optimum pada respon tunggal dengan asumsi fungsi responnya adalah orde dua telah dibahas oleh Pal & Mandal (2006).

Pada penelitian ini dibahas mengenai kajian teori untuk mendapatkan rancangan percobaan campuran simpleks laticce pada model permukaan multirespon orde rendah yang optimum berdasarkan kriteria optimum D. Orde rendah yang akan dibahas adalah orde satu dan orde dua dengan mengasumsikan bahwa bobot W yang akan diberikan memiliki nilai bobot yang sama.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Rancangan percobaan campuran simpleks *Lattice*

Dalam percobaan campuran jika $x_i$ merupakan proporsi komponen ke - $i$ dalam campuran dimana banyaknya komponen adalah $q$, maka:

$$x_i \geq 0 \text{ dengan } i = 1, 2, \ldots, q \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{q} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_q = 1 \tag{2}$$

Rancangan simpleks *lattice* merupakan bagian dari rancangan percobaan campuran yang memiliki pola simpleks $\{q, m\}$ dimana $q$ adalah banyaknya komponen dan $m$ adalah derajat polinomial. Banyaknya titik-titik rancangan untuk rancangan simpleks *lattice* pada $q$ komponen dan $m$ derajat polinomial yaitu:

$$\binom{q+m-1}{m} = \frac{(q+m-1)!}{m!(q-1)!} \tag{3}$$

(Cornel 1981).

### Rancangan percobaan campuran simpleks *Lattice* optimal pada model permukaan multirespon

### Orde satu

Jika melibatkan sejumlah variabel respon yang diukur dari sejumlah faktor dinamakan model permukaan multirespon, model permukaan multirespon pada rancangan simpleks lattice orde satu yaitu:

$\tilde{Y}_r = X_r \tilde{\beta}_r + \tilde{\varepsilon}_r$, untuk $r = 1, 2, \ldots, p$.

dimana $r$ adalah banyaknya respon.

Sedangkan model orde satu rancangan simpleks *lattice* dalam bentuk nilai harapan yaitu :

$$\eta = \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i$$

Untuk memperoleh matriks rancangan percobaan campuran yang optimum pada model permukaan multirespon akan digunakan kriteria optimum D. Suatu rancangan optimum D adalah suatu rancangan yang memaksimumkan $|\mathbf{X}^T\mathbf{X}|$ dari suatu model yang sesuai. Atau berupaya meminimumkan $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$. Sehingga rancangan optimum D mempunyai : variansi dari penaksir parameter yang kecil, korelasi antar penaksir parameter yang kecil, dan variansi penaksir respon yang kecil.

Suatu rancangan percobaan campuran akan optimum jika diberikan pembobot yang memiliki nilai berdasarkan pada determinan $\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}$ dimana $\mathbf{W}$ adalah suatu matriks diagonal dengan elemen $w_i$ untuk $w_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{q} w_i = 1$.

Misalkan $q$ adalah banyaknya komponen atau faktor, $r$ adalah banyaknya respon, $s$ adalah banyaknya replikasi dan $m$ adalah derajat polinomial, maka untuk $q = 2$ pada model orde satu $m = 1$ titik rancangan sebanyak 2 yaitu :

(1, 0) dan (0, 1), sehingga matriks rancangan $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Jika diberi pembobotan yaitu $w_i$ adalah nilai pembobot dengan nilai yang sama yaitu $w_i = w$ dan memenuhi $w_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{2} w_i = 1$ dimana $\mathbf{W}$ adalah matriks diagonal dengan elemen-elemennya $w_i$.

Maka

$$\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & 1-w \end{bmatrix}.$$

Untuk $r = 2$, maka $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix}$ dan matriks rancangan untuk kasus multirespon tanpa replikasi adalah

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-w \end{bmatrix},$$

dengan menggunakan kriteria optimum D sehingga $\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X}) = w^2(1-w)^2$. Maka rancangan akan optimum

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{WX}))}{\partial w} = \frac{\partial(w^2(1-w)^2)}{\partial w}$$
$$= 2w(1-w)^2 + w^2(2)(1-w)(-1)$$
$$= 0$$

diperoleh nilai pembobot $w$ = ½ dan

$$\frac{\partial^2(\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{WX}))}{\partial w^2} = \frac{\partial^2(w^2(1-w)^2)}{\partial w^2}$$
$$=(2(1-w)^2 + 2w(2)(1-w)(-1)) - (4w(1-w) + 2w^2(-1))$$
$$=6w^2 - 6w + 1$$

untuk $w$ = ½ adalah $6(½)^2$ -6(½) + 1 = -½ < 0 menunjukan bahwa memberikan $w$ = ½ maka rancangan akan optimum.

Dengan langkah pengerjaan yang sama diperoleh untuk $r$ = 3 adalah $w$ = 1/3, sehingga untuk $r = p$ dan $i = q$ pada $m$ = 1 sehingga diperoleh

$\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^T\mathbf{WX}) = w^{(q-1)p}(1-(q-1)w)^p$

maka rancangan akan optimum jika

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{WX}))}{\partial w} = \frac{\partial(w^{(q-1)p}(1-(q-1)w)^p)}{\partial w}$$
$$= (q-1)pw^{((q-1)p)-1}(1-(q-1)w)^p + w^{(q-1)p}p(1-(q-1)w)^{p-1}(-(q-1))$$
$$= 0$$

diperoleh $w = 1/q$ dengan asumsi nilai tarap faktor yang diboboti sama.

Dengan melibatkan replikasi sebanyak $s$ pada diperoleh untuk $q$ = 3 pada $m$ = 1, titik-titik percobaannya adalah : (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) maka matriks rancangannya adalah :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dengan replikasi $s$ = 2, maka

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

maka

$\mathbf{X^TWX}$ =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-5w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X^TWX} = \begin{bmatrix} 2w & 0 & 0 \\ 0 & 2w & 0 \\ 0 & 0 & 1-4w \end{bmatrix}.$$

Untuk $s$ = 3 diperoleh $\mathbf{X}^T\mathbf{WX}$ = diagonal{$3w$, $3w$, $1 - 6w$}, $s$ = 4 diperoleh $\mathbf{X}^T\mathbf{WX}$ = diagonal { $4w$, $4w$, $1 - 8w$}.

Untuk $s$ = s diperoleh $\mathbf{X}^T\mathbf{WX}$ = diagonal{$sw$, $sw$, $1 - 2sw$}.

Untuk $r$ = 2 diperoleh $(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^T\mathbf{WX})$ = diagonal {$sw$, $sw$, $1 - 2sw$, $sw$, $sw$, $1 - 2sw$},

$\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^T\mathbf{WX}) = (sw)^4(1-2sw)^2$ akan optimum jika

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{WX}))}{\partial w} = \frac{\partial((sw)^4(1-2sw)^2)}{\partial w}$$
$$= 4s^4w^3(1-2sw)^2 - 4s(sw)^4(1-2sw)$$
$$= 0$$

yaitu $w = \dfrac{1}{3s}$ dan

$$\frac{\partial^2(\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{WX}))}{\partial w^2} = \frac{\partial^2(w^2(1-w)^2)}{\partial w^2}$$
$$= 12s^4w^2(1-2sw)^2 - 16s^5w^3(1-2sw) - 16s^5w^3(1-2sw) + 8s^6w^4$$

untuk $w = \dfrac{1}{3s}$ diperoleh $-\dfrac{4}{27}s^2 < 0$. Untuk $r$ = 3, rancangan akan optimum jika $w = \dfrac{1}{3s}$, untuk $r = p$, $\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X^TWX}) = (sw)^{2r}(1-2sw)^r$, akan optimum jika $w = \dfrac{1}{3s}$. Jadi untuk $q$ = 3 pada $m$ = 1 dengan replikasi ke $f$ dan respon ke $r$ dimana $f$ = 1, 2,...,$s$ dan $r$ = 1,2, ..., $r$ maka rancangan akan optimum jika diboboti tiap titik rancangan dengan nilai bobot yang sama pada $w = \dfrac{1}{3s}$.Untuk $q$ = 4 pada $m$ = 1, $f$ = $s$ maka $\mathbf{X^TWX}$ = diagonal {$sw$, $sw$, $sw$, $1 - 3sw$}.

Untuk $r = p$ maka diperoleh $\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X}^T\mathbf{WX}) = (sw)^{3p}(1-3sw)^p$, akan optimum jika $w = \dfrac{1}{4s}$.

Untuk $i = q$ pada $m$ = 1 dengan $r = p$ dan $f = s$ diperoleh: $\det(\mathbf{I}\otimes \mathbf{X^TWX}) = (sw)^{(q-1)p}$ (1 – ($q$-

$1)sw)^p$, diperoleh $w = \dfrac{1}{qs}$, maka rancangan akan optimum jika $w = \dfrac{1}{qs}$ dengan asumsi bahwa nilai bobot yang sama diberikan pada tiap titik rancangan.

**Orde dua**

Model permukaan multirespon pada rancangan simpleks lattice orde dua yaitu:

$$Y_r(\tilde{x}) = \beta_{0i} + \tilde{x}^T \tilde{\beta}_r + \tilde{x}^T B_r \tilde{x} + \varepsilon_r \quad , r = 1,2,...,p$$

Sedangkan model orde dua rancangan simpleks *lattice* dalam bentuk nilai harapan yaitu :

$$\eta = \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{q} \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{q} \beta_{ij} x_i x_j$$

Untuk $q = 2$ pada $m = 2$ banyaknya titik rancangan adalah 3 yaitu (1,0), (0,1), (1/2,1/2) , sehingga matriks rancangan

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Jika diberi pembobotan yaitu $w_i$ adalah nilai pembobot dengan nilai yang sama dan memenuhi $w_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{q} w_i = 1$ dimana **W** adalah matriks diagonal dengan elemen-elemennya $w_i$.

Maka

$$\mathbf{X^T W X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}w + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2}w \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}w & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}w \end{bmatrix},$$

untuk $r = 2$ diperoleh

$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}w + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2}w & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}w & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}w + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2}w \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{2}w & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}w \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}) = \left( \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}w\right)^2 - \left(\frac{1}{2}w - \frac{1}{4}\right)^2 \right)^2$$

$$= \frac{1}{4}w^2 .$$

Rancangan akan optimum jika

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}))}{\partial w} = \frac{\partial\left(\frac{1}{4}w^2\right)}{\partial w} = \frac{1}{2}w = 0$$

diperoleh $w = 0$. Untuk $r = 3$ diperoleh $\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}) =$

$$\left( \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}w\right)^2 - \left(\frac{1}{2}w - \frac{1}{4}\right)^2 \right)^3 = \left(\frac{1}{2}w\right)^3,$$

rancangan akan optimum jika

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}))}{\partial w} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}w\right)^3}{\partial w} = \frac{3}{8}w^2 = 0$$

diperoleh $w = 0$. Untuk $r = p$ diperoleh $\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}) =$

$$\left( \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}w\right)^2 - \left(\frac{1}{2}w - \frac{1}{4}\right)^2 \right)^p = \left(\frac{1}{2}w\right)^p,$$

rancangan akan optimum jika

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}))}{\partial w} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}w\right)^p}{\partial w} = \frac{p}{2^p}w^{p-1} = 0$$

diperoleh $w = 0$. Untuk $i = 3$ pada $m = 2$ terdapat 6 titik percobaan yaitu (1,0,0), (0,1,0), (0, 0, 1), ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,0), ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$), (0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$).

untuk $r = p$ maka

$$\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}) = \frac{1}{4^{(q-1)r}} x \left(\frac{3}{2}w\right)^r$$

diperoleh $w = 0$. Untuk $i = 4$ pada $m = 2$ terdapat 10 titik percobaan yaitu (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, 0), ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 0), ($\frac{1}{2}$, 0, 0, $\frac{1}{2}$), (0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0), (0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$), (0, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$), Jika diberi pembobotan yaitu $w_i$ adalah nilai pembobot dengan nilai yang sama dan memenuhi $w_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{q} w_i = 1$ dimana **W** adalah matriks diagonal dengan elemen-elemennya $w_i$.

Jika diberi pembobotan yaitu $w_i$ adalah nilai pembobot dengan nilai yang sama dan memenuhi $w_i \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{q} w_i = 1$ dimana **W** adalah matriks diagonal dengan elemen-elemennya $w_i$.
Maka

$$(\mathbf{X^T W X}) = \begin{bmatrix} \frac{7}{4}w & \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}w \\ \frac{1}{4}w & \frac{7}{4}w & \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}w \\ \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}-\frac{3}{4}w & \frac{1}{4}w \\ \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}w & \frac{1}{4}-\frac{3}{4}w \end{bmatrix},$$

untuk $r = 2$ maka

$$\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}) = \left(\frac{7}{4}w\right)^4 \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}w\right)^4, \text{ maka}$$

$$\frac{\partial(\det(\mathbf{I} \otimes \mathbf{X^T W X}))}{\partial w} = \frac{\partial(\left(\frac{7}{4}w\right)^4 \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}w\right)^4)}{\partial w} = 0$$

diperoleh $w = 0$.
Apabila diasumsikan nilai bobot yang sama tidak diperoleh nilai pembobot dalam rancangan optimum pada model permukaan multirespon rancangan simpleks *lattice* orde dua tanpa replikasi.

## KESIMPULAN

Rancangan percobaan campuran simpleks lattice pada model permukaan multirespon orde satu yang optimum tanpa resplikasi berdasarkan kriteria optimum D dengan $q$ adalah banyak komponen , $s$ adalah banyaknya replikasi dengan mengasumsikan nilai bobot yang sama pada tiap titik rancangan menghasilkan nilai bobot pada tiap titik rancangan sebesar $w = \frac{1}{q}$ dan dengan replikasi $w = \frac{1}{qs}$. Sedangkan untuk rancangan percobaan campuran simpleks lattice pada model permukaan multirespon orde dua yang optimum tanpa resplikasi dengan asumsi nilai bobot yang sama pada tiap titik rancangan tidak menghasilkan nilai bobot yang akan diberikan pada tiap titik rancangan.

## DAFTAR PUSTAKA

Atkinson AC & Bogacka B. 1997. Compound D-and $D_s$-Optimum Designs for Determining The Order of A Chemical Reaction**;** *Technometrics,* **39(4):** 347-356.

Cornell. 1981. *Experiment With Mixture*, John Wiley & Sons, New York.

Khuri Al & Cornell JA. 1996. *Response Surface Design Analysis,* Second Edition Marcel Dekker, Inc New York.

Kunert J. 1983. Optimal Designs and Refinement of The Linear Models With Application to Repeated Measurement Designs, *Ann Statistics,* **11**: 274-257.

Lim YB & WJ Studden. 1988. Efficient $D_s$ – Optimal Designs for Multivariate Polynominal Regression on The q-cube, *An Statistics,* **16:** 1225-1240.

Mentre F, Mallet A & Baccar D. 1997. Optimal Designs in Random Effect Regression Models**;** *Biometrika,* **84**: 2, 429 – 442.

Pal M & Mandal NK. 2006. Optimum Designs for Optimum Mixtures, *Statistics & Probability Letters*, .**76:** 1369-1379.

Schwabe R. 1996. *Optimum Design for Multi Factor Models,* Lecture Notes in Statistic, Springes, New York.