Solusi Analitik Persamaan *Schrödinger* Sistem Osilator Harmonik 1 Dimensi dengan Massa Bergantung Posisi menggunakan Metode Transformasi

Analytical Solution of Schrödinger *Equation of the Harmonic Oscillator System with Position Dependent Mass Using Transformation Method*

Sutisna
Jurusan Fisika FMIPA Universitas Jember

ABSTRACT

The Schrodinger equation with position-dependent mass (PDM) becomes one of interesting subjects in the study of quantum systems, because of its wide applications in many physical problems. Meanwhile, harmonic oscillator becomes important model in most physical problems. In this paper, analytical solutions of the PDM Schrodinger equation, i.e. energy eigenvalues En and eigenfunctions $\psi_n(x)$, of a one dimensional harmonic oscillator system using transformation method has been studied. The results showed that there was no difference between the energy eigenvalues, En of the harmonic oscillator systems with and without PDM, whereas it is not for the eigenfunctions, $\psi_n(x)$ of these two harmonic oscillator systems. This difference was due to the presence of dimensionless mass function $m(x)^{\frac{1}{4}}$ and the changes of x becomes μ variable for the eigenfunctions of the harmonic oscillator system with PDM. Moreover, the differences in the eigenfunctions will affect the dynamical properties of the quantum systems. It can be concluded that the harmonic oscillator system with PDM is the generalization of the harmonic oscillator system with constant mass.

Keywords : Schrödinger equation, position-dependent mass, transformation method

PENDAHULUAN

Dalam kajian kuantum, persamaan Schrödinger dengan massa bergantung posisi atau position-dependent mass (PDM) telah menarik banyak perhatian karena mempunyai aplikasi yang luas dalam berbagai riset ilmu fisika seperti sistem kuantum N-partikel, sistem material terkondensasi, semikonduktor, dan sebagainya (Quesne *et al*. 2005).

Dalam sistem PDM, diperkenalkan istilah massa efektif. Konsep pendekatan massa efektif ini berasal dari kajian semikonduktor dan material dengan struktur yang kompleks. Kita ketahui bahwa potensial kristal memiliki bentuk yang tidak sederhana. Dengan tinjauan massa efektif (yang secara prinsip menggambarkan massa dari sistem kristal tersebut) maka kajiannya akan menjadi lebih sederhana. Untuk kasus satu dimensi, massa efektif dinyatakan sebagai sebuah fungsi $M(x)$, yang dituliskan sebagai berikut

$$M(x) = m_o m(x), \tag{1}$$

dengan mo adalah massa konstan dan $M(x)$ adalah sebuah fungsi yang bergantung posisi dan tidak berdimensi. Sebagai akibat massa yang bervariasi terhadap posisi ini, maka dalam sistem akan muncul suatu potensial baru Vm. Sehingga, potensial efektif sistem merupakan penjumlahan dari potensial riil V dan potensial baru Vm (Gönül & Koçak, 2005). Dalam semikonduktor, sistem PDM digunakan untuk mempelajari gerakan pembawa muatan bebas (elektron dan lubang) dengan komposisi kimia material yang tidak seragam (Von Roos 1983).

Penelitian solusi analitik dari sistem kuantum PDM terus meningkat dalam tahun-tahun terakhir ini. Banyak metode yang dikembangkan untuk sistem massa konstan telah diperluas dan digunakan untuk sistem PDM dan sejumlah hasil menarik telah diperoleh. Metode-metode tersebut diantaranya adalah metode operator, transformasi koordinat, mekanika kuantum supersimetri (SUSYQM), pendekatan aljabar Lie, pendekatan integral lintasan, dan sebagainya. Namun, hingga kini hanya ada dua metode yang sering digunakan yaitu transformasi koordinat dan SUSYQM karena dapat digunakan secara luas untuk berbagai kasus fisis yang ada dibandingkan dengan metode-metode yang lain (Tanaka 2005, Guo-Xing 2005, Ju *et al*. 2005, Roy *et al*. 2002, Gonul *et al*. 2002).

Dalam makalah ini, kita akan mencari solusi analitik persamaan Schrödinger PDM sistem osilator harmonik 1 dimensi**.** Persoalan osilator harmonik menjadi penting karena sering dijadikan sebagai model pendekatan dalam banyak kasus. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan Schrödinger PDM ini adalah metode transformasi, yaitu dengan cara mentransformasi persamaan Schrödinger ke dalam bentuk persamaan diferensial orde kedua yang sudah diketahui solusinya (Alhaidari 2002). Solusi yang diperoleh untuk sistem PDM tersebut haruslah merupakan generalisasi dari solusi sistem osilator harmonik dengan massa konstan.

METODE

Pembahasan dalam makalah ini dilakukan dengan pendekatan teoretik. Secara garis besar, langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mencari solusi persamaan Schrodinger PDM sistem osilator harmonik secara analitik, yaitu berupa nilai eigen energi (En) dan fungsi eigen (Ψn), dengan menggunakan metode transformasi. Langkah kedua adalah melakukan aproksimasi m(x)=1 dan μ(x)=x untuk melihat apakah hasilnya mereduksi menjadi hasil untuk sistem osilator harmonik dengan massa konstan. Langkah kedua ini sekaligus sebagai verifikasi apakah hasil yang didapat konsisten atau tidak. Pada bagian akhir akan ditinjau pula beberapa bentuk fungsi massa yang bergantung posisi dan potensial yang dibangkitkannya, serta interpretasinya secara fisis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Nilai eigen energi E_n dan fungsi eigen *Ψ(x)* sistem osilator harmonik PDM

Tinjau persamaan Schrodinger bebas waktu dari sebuah partikel di bawah pengaruh energi potensial V(r)

$$\left(\hat{T}+V(r)\right)\psi(r)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right)\psi(r)=E\psi(r) \tag{2}$$

dimana $\Psi(r)$ adalah fungsi gelombang partikel, m massa partikel, V(r) energi potensial, E energi total partikel, dan $\hat{T}$ adalah operator energi kinetik. Ketika massa partikel bergantung pada posisi $M\left(\bar{r}\right)=m_0 m\left(\bar{r}\right)$, maka perumusan operator energi kinetik dan energi potensial akan mengalami perubahan.

Bentuk umum operator energi kinetik untuk sistem PDM dirumuskan sebagai berikut (Von Roos 1983):

$$\hat{T}=\frac{1}{4}\left[M^{\alpha}(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{P}}.M^{\beta}(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{P}}M^{\beta}(\boldsymbol{r})+M^{\gamma}(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{P}}.M^{\beta}(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{P}}M^{\alpha}(\boldsymbol{r})\right] \tag{3}$$

dengan α, β, dan γ adalah parameter-parameter yang memenuhi kondisi

$$\alpha+\beta+\gamma=-1 \quad ;\alpha,\beta,\gamma\in R.$$

Beberapa operator energi kinetik telah diusulkan dalam berbagai literatur. Dalam makalah ini, akan diambil bentuk operator energi kinetik seperti yang diusulkan oleh Ben Daniel dan Duke. Operator energi kinetik yang diusulkan oleh Ben Daniel dan Duke mengambil nilai-nilai $\alpha=\gamma=0$ dan $\beta=1$ (dalam Von Roos 1983), sehingga diperoleh:

$$\hat{T}=\hat{\boldsymbol{P}}.\frac{1}{2M(\boldsymbol{r})}\hat{\boldsymbol{P}}=-\frac{\hbar^2}{2m_o}\left[\nabla.\left(\frac{1}{m(\boldsymbol{r})}\nabla\right)\right] \tag{4}$$

Dengan memilih sistem satuan $\left(m_0=\bar{h}=1\right)$ dan hanya meninjau kasus satu dimensi, maka persamaan Schrodinger (2) menjadi:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}-\frac{m'}{m}\frac{d\psi(x)}{dx}+2m\left[E-V_{eff}(x)\right]\psi(x)=0 \tag{5}$$

Pada persamaan di atas, tanda ‘(aksen) menyatakan turunan terhadap *x*, dan Veff adalah energi potensial efektif untuk sistem PDM.

Salah satu cara untuk dapat menyelesaikan persamaan (5) adalah dengan menggunakan metode transformasi, yaitu menulis ulang persamaan tersebut menjadi persamaan diferensial orde kedua yang lebih umum dan solusinya sudah diketahui. Dalam kasus ini, melihat kemiripannya, kita akan memilih persamaan diferensial Hermit sebagai berikut (Boas 1983)

$$H_n''(g(x))-2g(x)H_n'(g(x))+2nH_n(g(x))=0 \tag{6}$$

Supaya persamaan (5) dapat kita bawa ke bentuk persamaan (6), kita pilih sebuah solusi persamaan Schrödinger PDM (5) berbentuk

$$\psi_n(x)=f(x)H_n(g(x)), \tag{7}$$

dengan *f*(*x*) adalah fungsi transformasi, g(x) adalah fungsi sembarang dari x, dan H(g(x)) adalah polinomial Hermit. Hasil substitusi persamaan (7) pada persamaan (5) dituliskan sebagai berikut

$$\frac{d^2H_n}{dg^2}+\left[\frac{g''}{(g')^2}+\frac{2f'}{fg'}-\frac{m'}{mg'}\right]\frac{dH_n}{dg}+\left[\frac{f''}{f(g')^2}-\frac{m'f'}{mf(g')^2}+\frac{2m\left[E-V_{eff}(x)\right]}{(g')^2}\right]H_n=0 \tag{8}$$

Jika kita bandingkan persamaan (6) dengan persamaan (8), maka kita akan dapatkan bahwa

$$-2g=\left[\frac{g''}{(g')^2}+\frac{2f'}{fg'}-\frac{m'}{mg'}\right] \quad (9)$$

dan

$$2n=\left[\frac{f''}{f(g')^2}-\frac{m'f'}{mf(g')^2}+\frac{2m\left[E-V_{eff}(x)\right]}{(g')^2}\right] \quad (10)$$

Dengan mengalikan persamaan (9) oleh $\frac{g'}{2}$, kita dapatkan

$$\frac{f'}{f}=\frac{1}{2}\left(-2gg'-\frac{g''}{g'}+\frac{m'}{m}\right) \quad (11)$$

Dari persamaan (11) dapat kita peroleh fungsi transformasi f(x), sehingga fungsi eigen Ψn(x) (persamaan (7)) dapat kita peroleh.

Sementara itu, dengan sedikit pengaturan pada persamaan (10) akan memberikan

$$E-V_{eff}(x)=\frac{(g')^2}{2m}\left[2n-\frac{f''}{f(g')^2}+\frac{m'f'}{mf(g')^2}\right] \quad (12)$$

Jika kita diferensiasi persamaan (11) satu kali terhadap x, maka kita dapatkan

$$-\frac{f''}{f(g')^2}=-\frac{1}{2}\frac{d(-2g)}{dg}+\frac{g'''}{2(g')^3}-\frac{(g'')^2}{(g')^4}-\frac{(f')^2}{f^2(g')^2}-\frac{f'g''}{f(g')^3}-\frac{m''}{2m(g')^2}+\frac{(m')^2}{2m^2(g')^2}+\frac{m'g''}{2m(g')^3}. \quad (13)$$

Dan dengan mengkuadratkan persamaan (9) akan memberikan

$$\frac{f'm'}{fm(g')^2}=-\frac{1}{4}(-2g)^2+\frac{(g'')^2}{4(g')^4}+\frac{f'g''}{f(g')^3}-\frac{m'g''}{2m(g')^3}+\frac{(f')^2}{f^2(g')^2}+\frac{(m')^2}{4m^2(g')^2} \quad (14)$$

Substitusi persamaan (13) dan (14) ke persamaan (12), menghasilkan

$$\begin{aligned}E-V_{eff}(x)&=\frac{(g')^2}{2m}\left[2n-\frac{1}{2}\frac{d(-2g)}{dg}-\frac{1}{4}\left(4g^2\right)\right]+\left[\frac{g'''}{4mg'}-\frac{3}{8m}\frac{(g'')^2}{(g')^2}-\frac{m''}{4m^2}+\frac{3}{8}\frac{(m')^2}{m^3}\right]\\&=\frac{(g')^2}{2m}\left[2n-\frac{1}{2}\frac{d(-2g)}{dg}-\frac{1}{4}\left(4g^2\right)\right]+\frac{1}{4m}\left[\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2-\left(\frac{m''}{m}-\frac{3}{2}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right)\right].\end{aligned} \quad (15)$$

Jika sekarang kita misalkan

$$G(z)=\frac{z''}{z}-\frac{3}{2}\left(\frac{z'}{z}\right)^2 \quad (16)$$

maka persamaan (15) menjadi lebih sederhana

$$E-V_{eff}(x)=\frac{(g')^2}{2m}\left[2n+1-g^2\right]+\frac{1}{4m}\left[G(g')-G(m)\right] \quad (17)$$

Dalam kasus PDM, pemilihan fungsi M(x) mempunyai kriteria bahwa akar pangkat dua dari fungsi M(x) dapat diintegralkan secara analitik. Karena diantara bentuk fungsi M(x) memerlukan penyelesaian integral yang panjang, kita perkenalkan sebuah fungsi bantu berikut

$$\mu(x)=\int^{x}\sqrt{m(x)}\,dx. \quad (18)$$

Sebelumnya akan menjadi lebih mudah bila persamaan-persamaan yang terkait juga dinyatakan dalam bentuk μ(x). Dengan menggunakan persamaan (16), fungsi $G(g')=G\left(\frac{dg}{dx}\right)=G\left(\mu'\frac{dg}{d\mu}\right)$ dapat kita tulis menjadi

$$\begin{aligned}G(g')&=\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left[\mu'\frac{dg}{d\mu}\right]}{\mu'\frac{dg}{d\mu}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d}{dx}\left[\mu'\frac{dg}{d\mu}\right]}{\mu'\frac{dg}{d\mu}}\right)^2\\&=\frac{\frac{d}{dx}\left[\mu''\frac{dg}{d\mu}+\mu'\frac{d^2g}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dx}\right]}{\mu'\frac{dg}{d\mu}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\mu''\frac{dg}{d\mu}+\mu'\frac{d^2g}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dx}}{\mu'\frac{dg}{d\mu}}\right)^2\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$G(g')=\left[\frac{\mu'''}{\mu'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2\right]+(\mu')^2\left[\left(\frac{d^3g/d\mu^3}{dg/d\mu}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2g/d\mu^2}{dg/d\mu}\right)^2\right]$$

$$G(g')=G(\mu')+(\mu')^2G\left(\frac{dg}{d\mu}\right).$$

Substitusi pesamaan di atas ke persamaan (17) menghasilkan

$$E-V_{eff}(x)=\frac{(g')^2}{2m}\left[2n+1-g^2\right]+\frac{1}{4m}\left[G(\mu')+(\mu')^2G\left(\frac{dg}{d\mu}\right)-G(m)\right] \quad (19)$$

Dari persamaan (19) inilah kita akan mendapatkan bentuk nilai eigen energi En, dengan terlebih dahulu mencari fungsi g(x). Fungsi g(x) merupakan sebuah fungsi sembarang dari x, di mana bentuknya bergantung pada sistem yang ditinjau. Untuk mendapatkan nilai dari fungsi g(x), kita lakukan perbandingan antara persamaan (19) dengan selisih nilai eigen energi En dan potensial V(x) untuk sistem massa konstan (Griffiths 1994), yaitu

$$E-V(x)=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\omega-\tfrac{1}{2}\omega^2x^2 \quad (20)$$

Pada persamaan di atas, n bernilai bulat 0, 1, 2, 3, … dan $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_0}}$ adalah frekuensi sudut osilasi. Konstanta k dalam sistem kuantum memiliki interpretasi bergantung pada sistem osilator yang ditinjau. Sebagai contoh, jika kita tinjau satu dari atom Hidrogen dalam molekul air (H2O) yang bervibrasi secara termal, maka konstanta k dihubungkan dengan kekuatan dari ikatan H-O dalam molekul tersebut. Dalam persamaan (20) kita telah memilih sistem satuan (mo= ħ = 1).

Dari perbandingan persamaan (19) dan (20) diperoleh

$$g(x) = \sqrt{\omega}\ \mu(x) \quad (21)$$

dengan ω > 0, dan suku kedua pada ruas kanan persamaan (19) kita anggap sebagai suku tambahan untuk kasus PDM, sehingga kita abaikan.

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (21) ke persamaan (19) memberikan

$$E - V_{eff}(x) = n\omega + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\omega^2[\mu(x)]^2 - \frac{1}{4m}[G(m) - G(\mu')] \quad (22)$$

Syarat agar persamaan Schrödinger PDM dapat diselesaikan secara eksak adalah dengan menuliskan ruas kanan persamaan (22) menjadi dua bagian. Bagian yang tidak bergantung pada x menyatakan nilai eigen energi En dari sistem, sedangkan bagian yang bergantung pada x menyatakan potensial efektif Veff(x) sistem. Sebagai hasilnya, kita dapatkan bahwa nilai eigen energi En sistem ini adalah

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \quad (23)$$

yang ternyata mempunyai bentuk yang sama dengan nilai eigen energi En untuk sistem massa konstan dengan memilih sistem satuan $\bar{h} = 1$. Karena untuk sistem PDM nilai energi totalnya berupa bilangan yang tidak bergantung pada m(x), maka semua jenis fungsi massa m(x) hanya akan berpengaruh pada potensial efektif Veff(x) dan energi kinetik sistem. Kedua energi ini dapat saling bertransformasi satu sama lain, tetapi penjumlahan keduanya selalu konstan.

Kemudian dari persamaan (22) kita dapatkan juga potensial efektif Veff(x)

$$V_{eff}(x) = \frac{1}{2}\omega^2[\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m}\left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right] \quad (24)$$

Suku kedua persamaan (24) kita tulis sebagai potensial Vm

$$V_m = \frac{1}{8m}\left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right] \quad (25)$$

Sebagai akibat variasi massa terhadap posisi. Ketika massa sistem dibuat konstan (m(x)=1), maka persamaan (25) menghilang dan μ(x)=x, sehingga potensial efektif sistem Veff(x) akan mereduksi kembali menjadi potensial untuk sistem massa konstan.

Langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi gelombang sistem osilator harmonik PDM, dengan terlebih dulu mencari fungsi transformasi f(x). Untuk mendapatkan fungsi transformasi f(x), langkah pertama yang harus dilakukan adalah mengintegrasikan persamaan (11) sehingga kita peroleh persamaan berikut

$$f(x) = e^{\left(-\frac{1}{2}g^2\right)} e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m}{g'}\right)} . \quad (26)$$

Selanjutnya dari sifat $a^b = e^{b\ln a}$ dan dengan meninjau persamaan (21) maka kita dapat tuliskan

$$f(x) \cong m^{1/4}\ e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2} \quad (27)$$

Karena $\omega^{-\frac{1}{4}}$ hanya sebuah konstanta saja. Dengan mensubstitusikan persamaan (27) ke persamaan (7), akhirnya kita dapatkan solusi persamaan Schrodinger PDM sebagai berikut:

$$\psi_n(x) = m^{1/4}\ e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2} H_n\left(\sqrt{\omega}\mu\right) \quad (28)$$

Dalam persamaan (28), Hn adalah polinomial Hermit yang dinyatakan oleh (Boas 1983)

$$H_n\left(\sqrt{\omega}\mu\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\omega}} e^{\omega\mu^2} \frac{d^n\left(e^{-\omega\mu^2}\right)}{d\mu^n}$$

dimana n adalah bernilai bulat 0, 1, 2, 3, ….

Fungsi eigen (28) memiliki bentuk yang berbeda dengan fungsi eigen sistem osilator harmonik dengan massa konstan dalam sistem satuan $\left(m_0 = \bar{h} = 1\right)$ yaitu (Griffiths 1994)

$$\psi_n \cong e^{-\frac{1}{2}\omega x^2} H_n\left(\sqrt{\omega}x\right) . \quad (29)$$

Dalam persamaan (29), kita tidak menuliskan tetapan normalisasi $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\left(2^n n!\right)^{-1/2}$.

Perbedaan antara persamaan (28) dengan persamaan (29) tersebut terletak pada hadirnya faktor pengali pada fungsi eigen untuk sistem osilator harmonik PDM yang berupa fungsi massa tak berdimensi m(x)1/4, serta perubahan variabel x menjadi μ.

Dari fungsi eigen Ψn(x) persamaan (28) inilah kita dapat mengetahui perilaku partikel sistem osilator harmonik PDM. Yaitu dengan cara menerapkan operator dari besaran fisis yang bersangkutan terhadap fungsi gelombang sistem.

Aproksimasi *m(x)=1* dan $\mu(x)=x$

Untuk mengetahui hasil perhitungan fungsi eigen Ψn(x) untuk sistem osilator harmonik PDM yang diperoleh telah konsisten, maka kita akan melakukan aproksimasi massa konstan terhadap persamaan dalam kasus PDM. Jika persamaan yang terkait mereduksi menjadi persamaan untuk kasus massa konstan, maka hasil yang diperoleh sudah konsisten. Sementara itu, konsistensi hasil untuk nilai eigen energi sudah terbukti dengan samanya bentuk solusi untuk sistem osilator harmonik PDM dan sistem osilator harmonik massa konstan.

Dari persamaan (1) agar nilai massa bergantung posisi M(x) mereduksi menjadi massa konstan m_o, maka aproksimasi yang diambil adalah $m(x)=1$. Sehingga nilai massa bergantung posisi menjadi

$$M(x)=m_o \tag{30}$$

dan seperti sebelumnya kita akan memilih nilai $m_0=1$ untuk memudahkan perhitungan. Fungsi bantu persamaan (18) mereduksi menjadi

$$\mu(x)=x. \tag{31}$$

Selanjutnya kita substitusikan persamaan (30) dan (31) pada persamaan fungsi eigen sistem PDM (28), menghasilkan

$$\psi_n(x)=e^{-\frac{1}{2}\omega x^2}H_n\left(\sqrt{\omega}x\right). \tag{32}$$

Persamaan (32) di atas ternyata memiliki bentuk yang sama dengan fungsi gelombang osilator harmonik dengan massa konstan (persamaan (29). Ini membuktikan bahwa fungsi eigen Ψn(x) sistem osilator harmonik PDM merupakan generalisasi dari fungsi eigen sistem osilator harmonik massa konstan.

Dari penjelasan di atas, jelaslah bahwa solusi nilai eigen energi En dan fungsi eigen Ψn(x) untuk sistem osilator harmonik PDM yang diperoleh telah konsisten dengan solusi untuk sistem osilator harmonik massa konstan.

Beberapa fungsi massa dan potensial

Pada bagian ini kita akan membahas potensial Vm dan sifat-sifatnya yang disebabkan kebergantungan massa pada posisi untuk beberapa fungsi massa. Fungsi-fungsi massa yang diperkenalkan di sini telah digunakan dalam banyak kajian bidang semikonduktor (Alhaidari 2002, Plastino *et al*. 1999, Roy 2002). Fungsi massa berbentuk:

$$m(x)=\left(\frac{b+x^2}{1+x^2}\right)^2 \tag{33}$$

Substitusi persamaan (33) ke (18) dan (25) diperoleh:

$$\mu(x)=x+(b-1)\arctan x \tag{34}$$

dan

$$V_m=\frac{(b-1)\left[3x^2+2(2-b)x^2-b\right]}{2(b+x^2)^4} \tag{35}$$

Dapat dilihat bahwa Vm =0 ketika b=1, yang bersesuaian dengan sistem massa konstan. Plot grafik dari fungsi (35) untuk beberapa nilai b terlihat seperti pada Gambar 1. Dapat kita lihat dari gambar 1 bahwa untuk beberapa nilai b<1, Vm bersifat seperti potensial perintang yang nilainya berkurang terhadap parameter b. Sementara untuk beberapa nilai b>1, Vm bersifat seperti potensial sumur, yang akan membatasi gerak dari partikel. Fungsi gelombang yang bersesuaian untuk fungsi massa ini adalah:

$$\psi_n(x)=\left(\frac{b+x^2}{1+x^2}\right)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\omega\left(x+(b-1)\arctan x\right)^2}H_n\left(\sqrt{\omega}\left(x+(b-1)\arctan x\right)\right). \tag{36}$$

Dari persamaan (36) inilah semua informasi tentang dinamika partikel (seperti momentum, energi kinetik, dan sebagainya) sistem yang bersangkutan dapat diperoleh.

Fungsi massa berbentuk:

$$m(x)=e^{-b|x|} \tag{37}$$

dimana b ≥ 0 untuk menjamin bahwa massa akan berhingga ketika x→±∞. Substitusi persamaan (37) ke persamaan (18) dan (25) memberikan

$$\mu(x)=\begin{cases}-\frac{2}{b}e^{-\frac{b}{2}x}, & (b\neq 0, x>0)\\ \frac{2}{b}e^{\frac{b}{2}x}, & (b\neq 0, x<0)\\ x, & (b=0)\end{cases} \tag{38}$$

dan

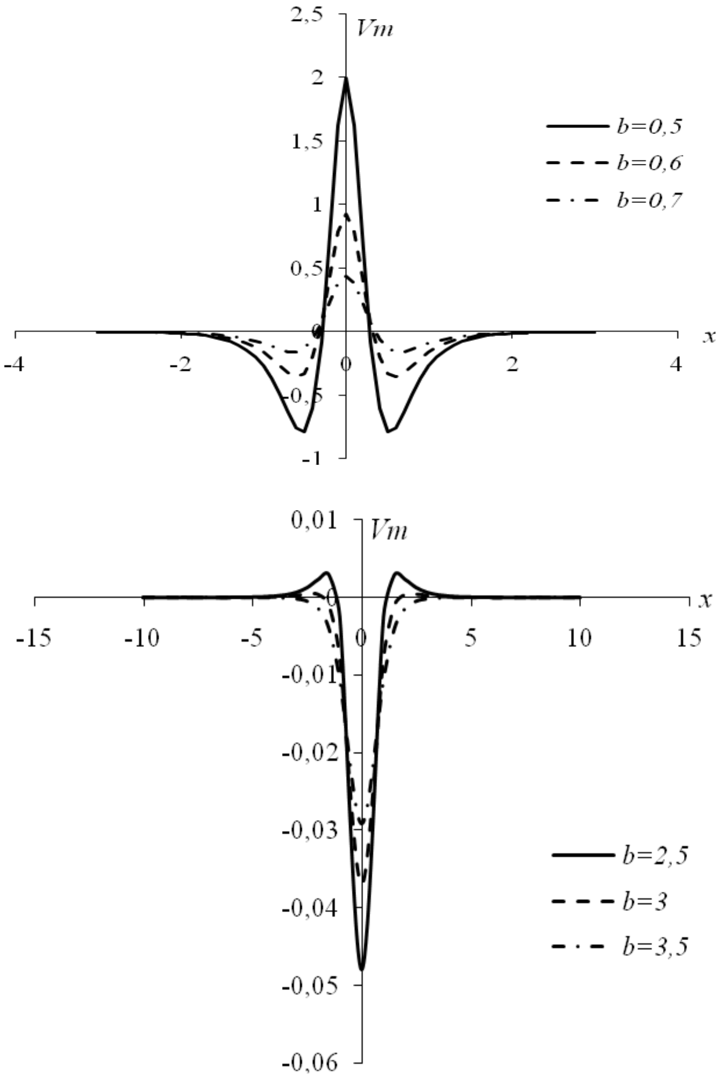
$$V_m=-\frac{3}{32}b^2e^{b|x|}. \tag{39}$$

Dapat dilihat bahwa Vm =0 ketika b=0, yang bersesuaian dengan sistem massa konstan.

Plot grafik persamaan (39) dapat dilihat pada gambar 2, yang untuk beberapa nilai parameter b bersifat seperti potensial penghalang yang lebarnya berkurang dengan bertambahnya nilai parameter b.

(a)

(b)



Gambar 1. Potensial V_m untuk fungsi massa (33) untuk beberapa nilai parameter *b*. (a) *b = 0,5, b = 0,6, b = 0,7*; (b) *b = 2,5, b = 3,0, b = 3,5*.

Fungsi gelombang yang bersesuaian untuk fungsi massa ini adalah:

$$\psi_n(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{4}b|x|}e^{-\frac{1}{2}\omega\left(\frac{4}{b^2}e^{-bx}\right)}H_n\left(\sqrt{\omega}\ln\left(-\frac{2}{b}e^{-\frac{b}{2}x}\right)\right), & (b\neq 0, x>0)\\ e^{\frac{1}{4}b|x|}e^{-\frac{1}{2}\omega\left(\frac{4}{b^2}e^{bx}\right)}H_n\left(\sqrt{\omega}\ln\left(\frac{2}{b}e^{\frac{b}{2}x}\right)\right), & (b\neq 0, x<0)\\ e^{-\frac{1}{2}\omega x^2}H_n\left(\sqrt{\omega}\ln x\right), & (b=0). \end{cases} \quad (40)$$

Terlihat bahwa untuk nilai b=0, fungsi gelombangnya sama dengan fungsi gelombang untuk sistem osilator harmonik massa konstan.

KESIMPULAN

Persamaan Schrödinger PDM adalah persamaan yang menyatakan dinamika suatu sistem kuantum PDM. Dengan menggunakan metode transformasi untuk sistem osilator harmonik 1D diperoleh solusi sistem PDM berupa fungsi eigen Ψn(x) berikut

$$\psi_n(x)=m^{1/4}\,e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2}H_n\left(\sqrt{\omega}\mu\right).$$

Perbedaannya dengan fungsi eigen untuk sistem osilator harmonik massa konstan adalah bahwa dalam hasil yang diperoleh ini muncul tambahan faktor pengali berupa fungsi posisi yang tidak berdimensi m(x), serta perubahan variabel x menjadi μ. Perbedaan ini berdampak pada perbedaan sifat dinamika dari sistem. Sementara itu, persamaan nilai eigen energi En untuk sistem osilator harmonik PDM dan massa konstan memiliki bentuk yang sama, yaitu:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega.$$

Konsistensi hasil-hasil yang diperoleh dilakukan dengan aproksimasi massa konstan terhadap persamaan-persamaan terkait (kasus PDM) yaitu dengan mengambil bentuk m(x)=1 dan μ(x)=x pada persamaan fungsi eigen Ψn(x) dan nilai eigen energi En sistem osilator harmonik PDM. Sebagai hasilnya persamaan-persamaan tersebut mereduksi menjadi persamaan-persamaan untuk kasus massa konstan. Sehingga terbukti bahwa hasil perhitungan yang diperoleh sudah konsisten dengan solusi sistem massa konstan. Dengan kata lain bahwa sistem osilator harmonik PDM merupakan generalisasi dari sistem osilator harmonik massa konstan.

Hasil sebaran zona konduktif dengan pengukuran VLF-EM pada semua sesi lintasan menujukkan adanya indikasi patahan atau rekahan atau sesar. Pengukuran semua sesi lintasan dengan menggunakan variasi interval pada pengukuran memberikan citra atau resolusi yang sangat signifikan, sehingga dapat digunakan untuk memprediksi rekahan yang terjadi secara horisontal dan vertikal pada lintasan pengukuran oleh karena itu teknik deteksi High resolution pada reaktif patahan dangkal dengan VLF-EM dapat teramati dengan jelas dan sangat signifikan. Hasil overlay ke dalam peta di semua lintasan dengan sebaran zona konduktif VLF menunjukkan kelurusan antar setiap lintasan dan tampak berasosiasi dengan penampakan rekahan yang dipermukaan sehingga dapat hasil overlay ini dapat memprediksi adanya proses deformasi bumi pada waktu yang akan dating selama erupsi lumpur berlangsung.

DAFTAR PUSTAKA

Alhaidari AD. 2002. Solutions of The Nonrelativistic Wave Equation With Position-Dependent Effective Mass. *Phys. Rev. A* **66** 042116.

Boas LM. 1983. *Mathematical Methods in The Physical Sciences*. 2nd Edition. New York: John Wiley & Son.

Gönül B & Koçak M. 2005. *Explicit Solutions for N-Dimensional Schrödinger Equations with Position-Dependent Mass*. http://www.arxiv.org/vc/quant-ph/papers/0512/0512035v1.pdf [25 Mei 2008].

Gonul B & Gonul B. 2002. *Supersymetric Approach to Exactly Solvable Systems with Position-Dependent Effective Masses*. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0211112.

Griffiths JD. 1994. *Introduction to Quantum Mechanics*. New Jersey :Prentice hall.

Guo-Xing Ju, Xiang Y & Ren Z. 2005. *The Localization of s-Wave and Quantum Effective Potential of a Quasi-Free Particle with Position-Dependent Mass*. http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0601005 [26 Juni 2008].

Plastino AR, Rigo A, Casas M, Garcias F & Plastino A. 1999. Supersymmetric approach to quantum systems with position-dependent effective mass. *Phys. Rev*. A **60**: 4318-4325.

Quesne C, Bagchi B, Banerjee A & Tkachuk VM. 2005. *Hamiltonians with Position-Dependent Mass, Deformations and Supersymmetry*. http://arxiv.org/ pdf/quant-ph/0512046 [25 Mei 2008].

Roy B. 2002. A Lie Algebraic Approach To Effective Mass Schrodinger Equations, *J. Phys*. A:Math.Gen. 353961-3969.

Tanaka T. 2005. N-fold *Supersymmetry in Quantum Systems with Position-Dependent Mass*. http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0509132 [26 Juni 2008].

Von Roos, O. 1983. Position-Dependent Effective Masses in Semiconductor Theory. *Phys. Rev*. B **27**: 7547–7552. URL:http://link.aps.org/abstract/PRB/ v27/ p7547. [29 Mei 2007].