

The Odd Harmonious Labeling on Variation of the Double Quadrilateral Windmill Graphs

Fery Firmansah

Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Widya Dharma Klaten, Indonesia

Email: feryfirmansah@unwidha.ac.id

ABSTRACT

A Graph $G = (V(G), E(G))$ is called $G(p, q)$ if it has $p = |V(G)|$ vertices and $q = |E(G)|$ edges. The graph $G(p, q)$ is said to be an odd harmonious if there exists an injection $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$ such that induced mapping $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ is a bijection $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$ and f is said to be an odd harmonious labeling of $G(p, q)$. In this paper, we construct the odd harmonious labeling on variation of the double quadrilateral windmill graph $VDQ^{(k)}$ with $k \geq 1$. Moreover, we also give odd harmonious labeling construction for generalized variation of the double quadrilateral windmill graph $GVDQ^{(k,r)}$ with $k \geq 1$ and $r \geq 1$

Keywords: Odd harmonious labeling, variation, double quadrilateral, windmill graph

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan bagian dari matematika kombinatorik yang banyak diaplikasikan dalam dunia nyata untuk menyelesaikan persoalan diskrit. Graf menggambarkan objek diskrit dalam bentuk simpul (titik) dan hubungan antar objek diskrit dengan busur (garis). Diantara banyaknya riset tentang teori graf terdapat riset tentang pelabelan graf yang akhir-akhir ini berkembang sangat pesat.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Gallian (2015) telah merangkum kurang lebih 2000 jurnal dari seluruh peneliti dan kurang lebih sudah ditemukan 200 kelas graf baru beserta pelabelannya. Dari sisi aplikasi pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam teori koding, radar, desain sirkuit, manajemen data base, *secret sharing message* dan kriptografi.

Pelabelan pada sebarang graf G adalah pemetaan f dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif. Bilangan bulat positif tersebut dinamakan label. Elemen-elemen graf yang dipetakan bisa berupa himpunan simpul, himpunan busur atau kombinasinya.

Graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan sebagai graf $G(p, q)$ jika memenuhi $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$. Graf $G(p, q)$ adalah graf harmonis

ganjil (*odd harmonious graph*) jika terdapat fungsi pelabelan simpul yang bersifat satu-satu (injektif) $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian sehingga menginduksi fungsi pelabelan busur yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ yang bersifat satu-satu dan pada (bijektif) $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$, (Liang & Bai, 2009).

Liang dan Bai (2009) telah memberikan beberapa sifat yang dimiliki oleh graf harmonis ganjil, antara lain: (1) graf G merupakan graf harmonis ganjil maka G adalah graf bipartit dan (2) graf $G(p, q)$ merupakan graf harmonis ganjil maka memenuhi $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$.

Berikut diberikan beberapa hasil penelitian yang relevan antara lain Vaidya & Shah (2011, 2012), Abdel-Aal (2013), Alyani & Firmansah (2013), Abdel-Aal (2014), Jeyanthi, et al (2015), Jeyanthi, P., & Philo, P (2016).

Firmansah dan Sugeng (2015) menunjukkan bahwa graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$, $k \geq 1$ dan gabungannya $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$, $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansah dan Syaifuddin (2016) telah mengkonstruksi graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ pada Definisi 1.4 dan

membuktikan bahwa graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ merupakan graf harmonis ganjil pada Teorema 1.5 sebagai berikut:

Definisi 1.3 Graf *double quadrilateral* DQ adalah graf yang diperoleh dari dua graf cycle C_4 dengan himpunan simpul masing-masing adalah $\{u_0, v_1, v_2, w_1\}$ dan $\{u_0, v_2, v_3, w_2\}$ yang terhubung dengan satu busur persekutuan u_0v_2

Definisi 1.4 Graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}$, $k \geq 1$ adalah graf yang diperoleh dari k graf *double quadrilateral* DQ dengan satu simpul persekutuan u_0 .

Teorema 1.5 Graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Penulis akan melanjutkan penelitian Firmansah dan Syaifuddin (2016) dengan memberikan konstruksi graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$. Lebih lanjut penulis juga akan membuktikan bahwa graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah keluarga baru dari graf harmonis ganjil.

METODE

Metode penelitian yang digunakan oleh penulis adalah studi bahan bacaan baik berupa jurnal, prosiding, dan buku yang sesuai dengan tema penelitian yaitu pelabelan graf secara umum dan pelabelan graf harmonis ganjil secara khusus.

1. Mengkaji sifat-sifat khusus dari graf G yang bertujuan untuk mendapatkan konstruksi dan definisi dari graf G ;
2. Memformulasikan fungsi pelabelan simpul dan fungsi pelabelan busur menjadi suatu rumus konstruksi pelabelan harmonis ganjil yang berlaku secara umum untuk graf G ;
3. Mengkonstruksi hasil yang diperoleh dalam bentuk teorema disertai dengan buktinya secara matematis.

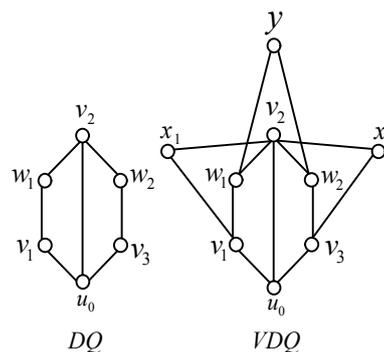
HASIL DAN PEMBAHASAN

Graf Variasi *Double Quadrilateral*

Berikut diberikan definisi dan konstruksi dari graf variasi *double quadrilateral* VDQ dan graf generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ(r)$ dengan $r \geq 1$.

Definisi 2.1 Graf variasi *double quadrilateral* VDQ adalah graf yang dibentuk dari graf *double quadrilateral* DQ dengan menambahkan 3 simpul baru x_1, x_2 dan y dimana simpul x_1 terhubung dengan simpul v_1 dan v_2 , simpul x_2 terhubung dengan simpul v_2 dan v_3 dan simpul y terhubung dengan simpul w_1 dan w_2 .

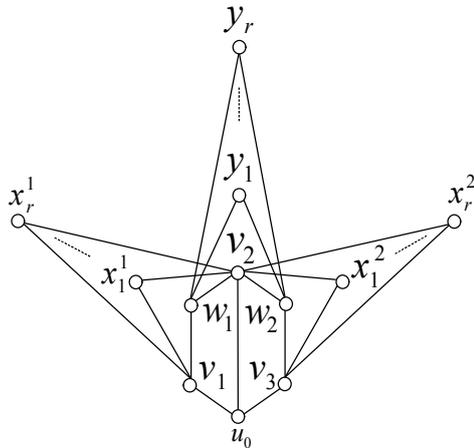
Notasi simpul dan konstruksi dari graf DQ dan VDQ diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Notasi simpul dan konstruksi dari DQ dan VDQ .

Definisi 2.2 Graf generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ(r)$ dengan $r \geq 1$ adalah graf yang dibentuk dari graf *double quadrilateral* DQ dengan menambahkan sebanyak $3r$ simpul baru yaitu $x_1^1, x_2^1, \dots, x_r^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_r^2$ dan y_1, y_2, \dots, y_r dimana simpul $x_1^1, x_2^1, \dots, x_r^1$ terhubung dengan simpul v_1 dan v_2 , simpul $x_1^2, x_2^2, \dots, x_r^2$ terhubung dengan simpul v_2 dan v_3 dan simpul y_1, y_2, \dots, y_r terhubung dengan simpul w_1 dan w_2 .

Notasi simpul dan konstruksi dari $GVDQ(r)$ dengan $r \geq 1$ diberikan pada Gambar 2.



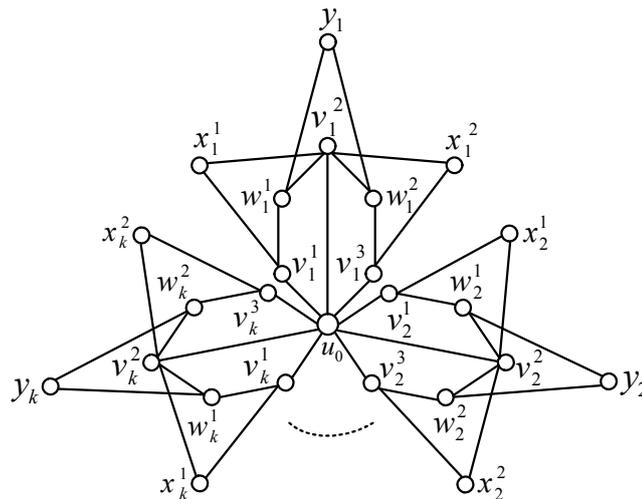
Gambar 2. Notasi simpul dan konstruksi dari $GVDQ(r)$ dengan $r \geq 1$

Berikut diberikan definisi, notasi simpul dan konstruksi dari graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$, yang selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.

Definisi 2.3 Graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf yang dibentuk dari k graf variasi *double quadrilateral* VDQ yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan u_0 .

Notasi simpul dan konstruksi dari $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$, diberikan pada Gambar. 3.

Graf Kincir Angin Variasi Double Quadrilateral



Gambar 3. Notasi simpul dan konstruksi dari $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$

Didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ sebagai berikut.

$$V(VDQ^{(k)}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3\} \\ \cup \{w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\ \cup \{x_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \cup \{y_i \mid 1 \leq i \leq k\} \\ E(VDQ^{(k)}) = \{u_0 v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3\}$$

$$\cup \{v_i^{2j-1} w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\ \cup \{w_i^j v_i^{2j} \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\ \cup \{v_i^{2j-1} x_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\ \cup \{x_i^j v_i^{2j} \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\ \cup \{w_i^j y_i \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\}.$$

dan

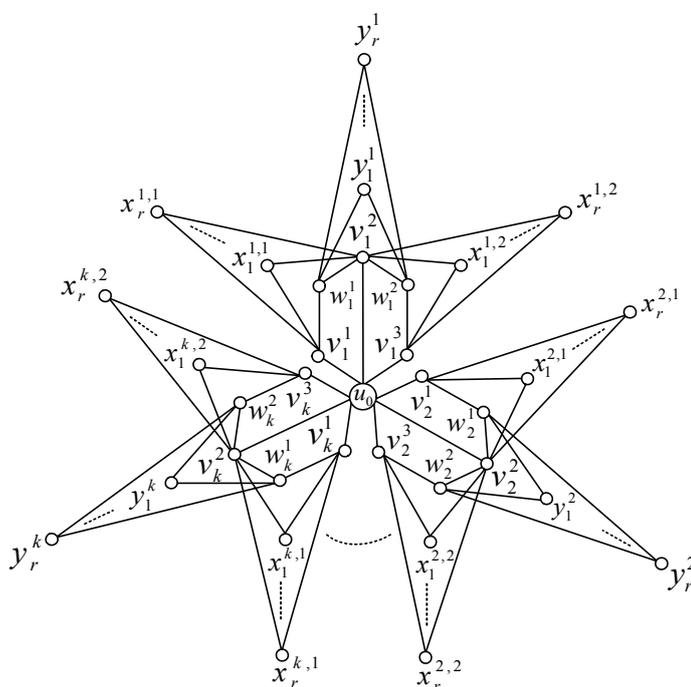
Graf Kincir Angin Generalisasi Variasi Double Quadrilateral

Berikut diberikan definisi, notasi simpul dan konstruksi dari graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ yang selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$.

Definisi 2.4 Graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf yang dibentuk dari k graf generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ(r)$ dengan $r \geq 1$ yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan u_0 .

Notasi simpul dan konstruksi dari $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ diberikan pada

Gambar. 4.



Gambar 4. Notasi simpul dan konstruksi dari $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$.

Didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(GVDQ^{(k,r)}) &= \{u_0\} \\
 &\cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3\} \\
 &\cup \{w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\
 &\cup \{x_s^{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cup \{y_r^j \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r\} \text{ dan} \\
 E(GVDQ^{(k,r)}) &= \{u_0 v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3\} \\
 &\cup \{v_i^{2j-1} w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\
 &\cup \{w_i^j v_i^{2j} \mid 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \\
 &\cup \{v_i^{2j-1} x_s^{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2\} \\
 &\cup \{x_s^{i,j} v_i^{2j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2\}
 \end{aligned}$$

$$\cup \left\{ w_i^j, y_s^i \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2 \right\}$$

Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin variasi double quadrilateral

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil.

Teorema 2.5 Graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

$$f(u_0) = 0 \tag{1.1}$$

$$f(v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

$$f(w_i^j) = 14k - 14i + 2j + 4, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.3}$$

$$f(x_i^j) = 14k + 6i + 2j - 8, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.4}$$

$$f(y_i) = 12k + 2i + 3, 1 \leq i \leq k \tag{1.5}$$

Berdasarkan fungsi pelabelan simpul f pada persamaan (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) dan (1.5) diperoleh himpunan simpul setelah dilabel sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(V(VDQ^{(k)})) &= \{0\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots, 6k - 5, 6k - 3, 6k - 1\} \\ &\cup \{6, 8, 20, 22, \dots, 14k - 36, 14k - 34, 14k - 22, 14k - 20, 14k - 8, 14k - 6\} \\ &\cup \{14k, 14k + 2, 14k + 6, 14k + 8, \dots, 20k - 12, 20k - 10, 20k - 6, 20k - 4\} \\ &\cup \{12k + 5, 12k + 7, 12k + 9, 12k + 11, \dots, 14k + 1, 14k + 3\} = \{0, 1, 3, 5, \dots, 20k - 4\} \end{aligned}$$

Terlihat bahwa fungsi pelabelan simpul f memberikan label yang berbeda pada setiap simpul dan $f(V(VDQ^{(k)})) = \{0, 1, 3, 5, \dots, 20k - 4\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \dots, 26k - 1\}$ sehingga fungsi pelabelan simpul f memenuhi pemetaan injektif. Fungsi pelabelan simpul f akan menginduksi fungsi pelabelan busur $f^* : E(VDQ^{(k)}) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 26k - 1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$, sehingga didapatkan fungsi pelabelan busur sebagai berikut.

$$f^*(u_0 v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

$$f^*(v_i^{2j-1} w_i^j) = 14k - 8i + 6j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.7}$$

$$f^*(w_i^j v_i^2) = 14k - 8i + 2j + 1, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.8}$$

$$f^*(v_i^{2j-1} x_i^j) = 14k + 12i + 6j - 17, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.9}$$

$$f^*(x_i^j v_i^2) = 14k + 12i + 2j - 11, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.10}$$

Bukti. Misalkan $VDQ^{(k)}$ adalah graf kincir angin variasi *double quadrilateral* dengan $k \geq 1$. Berdasarkan himpunan simpul dan himpunan busur dari $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ maka diperoleh $p = |V(VDQ^{(k)})| = 8k + 1$ dan $q = |E(VDQ^{(k)})| = 13k$. Didefinisikan fungsi pelabelan simpul $f : V(VDQ^{(k)}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 26k - 1\}$ sebagai berikut.

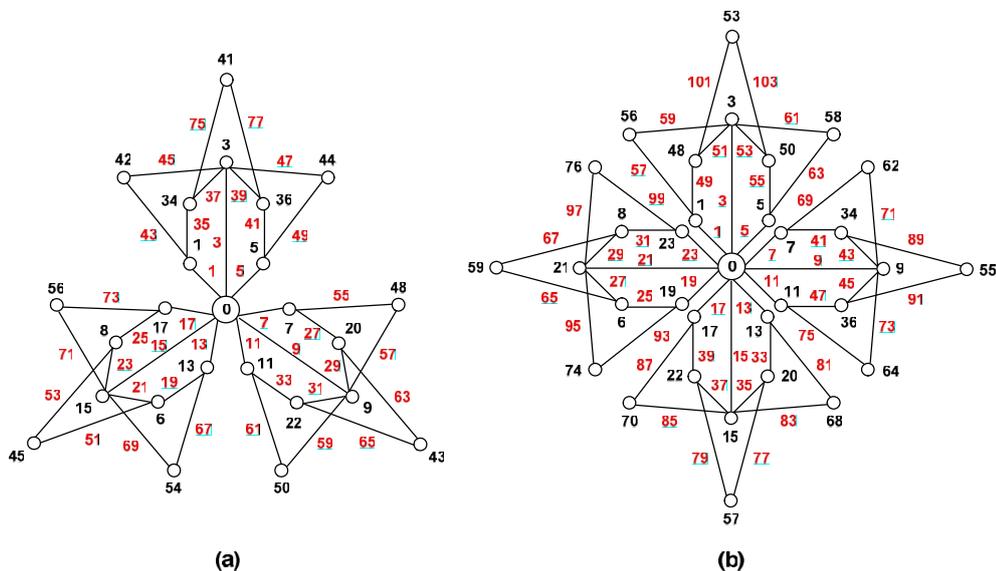
$$f^*(w_i^j, y_i) = 26k - 12i + 2j + 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{1.11}$$

Berdasarkan fungsi pelabelan busur f^* pada persamaan (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) dan (1.11) diperoleh himpunan busur setelah dilabel sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f^*(E(VDQ^{(k)})) &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots, 6k - 5, 6k - 3, 6k - 1\} \\ &\cup \{6k + 1, 6k + 7, 6k + 9, 6k + 15, \dots, 14k - 15, 14k - 9, 14k - 7, 14k - 1\} \\ &\cup \{6k + 3, 6k + 5, 6k + 11, 6k + 13, \dots, 14k - 13, 14k - 11, 14k - 5, 14k - 3\} \\ &\cup \{14k + 1, 14k + 7, 14k + 13, 14k + 19, \dots, 26k - 11, 26k - 5\} \\ &\cup \{14k + 3, 14k + 5, 14k + 15, 14k + 17, \dots, 26k - 9, 26k - 7\} \\ &\cup \{14k + 9, 14k + 11, \dots, 26k - 15, 26k - 13, 26k - 3, 26k - 1\} = \{1, 3, 5, 7, \dots, 26k - 1\} \end{aligned}$$

Terlihat bahwa fungsi pelabelan busur f^* memberikan label yang berbeda pada setiap busur dan $f^*(E(VDQ^{(k)})) = \{1, 3, 5, 7, \dots, 26k - 1\}$ sehingga fungsi pelabelan busur f^* memenuhi pemetaan bijektif. Telah ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan simpul f memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga

menginduksi fungsi pelabelan busur f^* yang bijektif, akibatnya graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. **Contoh 2.1** Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(3)}$ dan $VDQ^{(4)}$ yang diberikan pada Gambar. 5.



Gambar 5. Pelabelan harmonis ganjil pada (a) $VDQ^{(3)}$ dan (b) $VDQ^{(4)}$

Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin generalisasi variasi double quadrilateral

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf kincir angin generalisasi variasi

double quadrilateral $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Teorema 2.5 Graf kincir angin generalisasi *variasidouble quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Bukti. Misalkan $GVDQ^{(k,r)}$ adalah graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$. Berdasarkan himpunan simpul dan himpunan

$$f(u_0) = 0 \tag{2.1}$$

$$f(w_i^j) = 14k - 14i + 2j + 4, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{2.2}$$

$$f(v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3 \tag{2.3}$$

$$f(x_s^{i,j}) = 14k + (12r - 6)i + (4r - 2)j + 4s - (16r - 4), 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2 \tag{2.4}$$

$$f(y_s^i) = 12rk + (14 - 12r)i + 4s + 8r - 9, 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2 \tag{2.5}$$

Berdasarkan fungsi pelabelan simpul f pada persamaan (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) dan (2.5) diperoleh label yang berbeda pada setiap simpul dan

$$f(V(GVDQ^{(k,r)})) \subseteq \{1, 3, 5, 7, \dots, 14k + 12rk - 1\}$$

sehingga fungsi pelabelan simpul f memenuhi

$$f^*(u_0 v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3 \tag{2.6}$$

$$f^*(v_i^{2j-1} w_i^j) = 14k - 8i + 6j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{2.7}$$

$$f^*(w_i^j v_i^2) = 14k - 8i + 2j + 1, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{2.8}$$

$$f^*(v_i^{2j-1} x_s^{i,j}) = 14k + 12ri + (4r + 2)j + 4s - (16r + 5), 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2 \tag{2.9}$$

$$f^*(x_s^{i,j} v_i^2) = 14k + 12ri + (4r - 2)j + 4s - (16r - 1), 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2 \tag{2.10}$$

$$f^*(w_i^j y_s^i) = 14k + 12rk - 12ri + 2j + 4s + 8r - 5, 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq r, j = 1, 2 \tag{2.11}$$

Berdasarkan fungsi pelabelan busur f^* pada persamaan (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) dan (2.11) diperoleh label yang berbeda pada setiap busur dan

$$f^*(E(GVDQ^{(k,r)})) = \{1, 3, 5, 7, \dots, 14k + 12rk - 1\}$$

sehingga fungsi pelabelan busur f^* memenuhi pemetaan bijektif. Akibatnya graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral*

busur dari $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ maka diperoleh

$$p = |V(GVDQ^{(k,r)})| = 5k + 3rk + 1 \text{ dan}$$

$q = |E(GVDQ^{(k,r)})| = 7k + 6rk$. Didefinisikan fungsi pelabelan simpul

$$f : V(GVDQ^{(k,r)}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 14k + 12rk - 1\}$$

$$\tag{2.1}$$

$$\tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

pemetaan injektif. Fungsi pelabelan simpul f akan menginduksi fungsi pelabelan busur

$$f^* : E(GVDQ^{(k,r)}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 14k + 12rk - 1\}$$

yang didefinisikan oleh

$$f^*(uv) = f(u) + f(v),$$

sehingga didapatkan fungsi pelabelan busur sebagai berikut.

$$\tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

$$\tag{2.8}$$

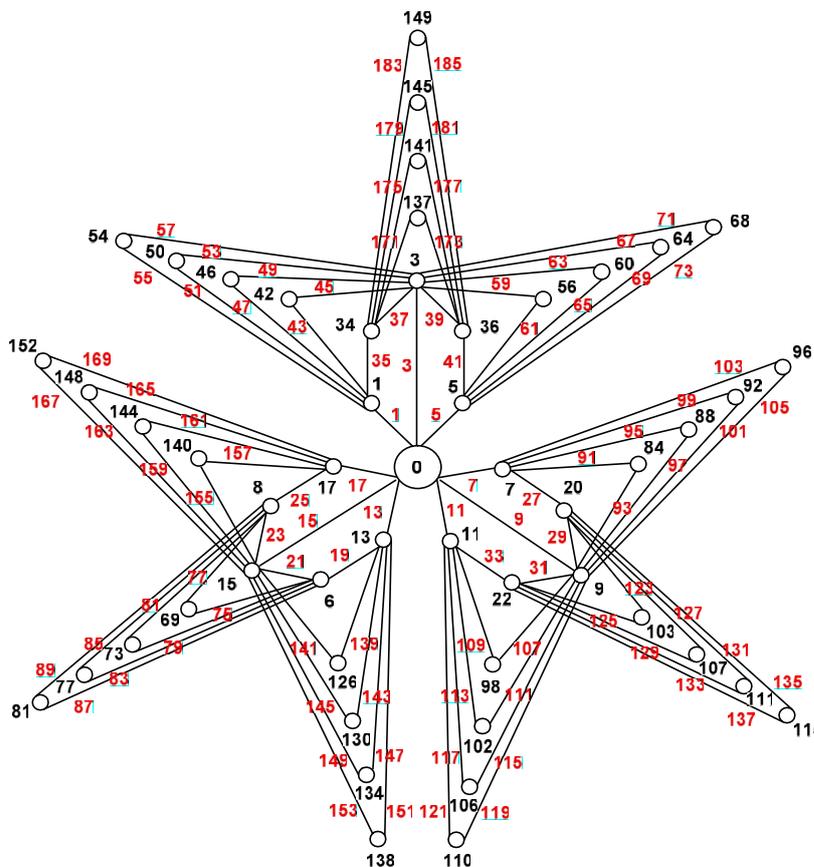
$$\tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

$$\tag{2.11}$$

$GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 2.2 Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(3,4)}$ pada Gambar. 6.



Gambar 6. Pelabelan harmonis ganjil pada $GVDQ^{(3,4)}$

KESIMPULAN

Pada makalah ini telah dibuktikan bahwa graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin variasi *double quadrilateral* $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Saat ini penulis sedang memperluas kasus tersebut yang dinyatakan dalam *open problem* 1 dan 2, sehingga memungkinkan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut.

Open Problem 1. Carilah pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf kincir angin

variasidouble quadrilateral $VDQ^{(k)} \cup VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.

Open Problem 2. Carilah pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf kincir angin generalisasi variasi *double quadrilateral* $GVDQ^{(k,r)} \cup GVDQ^{(k,r)}$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdel-Aal, M. E. 2013. Odd Harmonious Labeling of Cyclic Snakes. *International Journal on Applications of Graph Theory in Wireless Adhoc Networks and Sensor Networks*, 5(3), 1-13.
 Abdel-Aal, M.E. 2014. New Families of Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Soft Computing, Mathematics, and Control*, 3(1), 1-13.
 Alyani, F., Firmansah, F., Giyarti, W., & Sugeng, K. A. 2013. The Odd Harmonious

- Labeling of kC_n -Snake Graphs for Specific Values of n , that is, for $n = 4$ and $n = 8$. *IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications*, Diselenggarakan oleh Program Studi Matematika, UGM dan IndoMS, 6-7 November 2013 (hal. 225-230). Yogyakarta: Indonesian Mathematical Society.
- Firmansah, F. 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat. *Konferensi Nasional Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP 1)*, Diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika, UMS, 12 Maret 2016 Surakarta: Muhammadiyah University Press.
- Firmansah, F., & Sugeng, K. A. 2015. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda. *Magistra*, No 94 Th. XXVII, ISSN 0215-9511, 56-92.
- Firmansah, F. & Syaifuddin, M. W. 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY, 5 November 2016 Yogyakarta.
- Gallian, J. A. 2015. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 18. #DS6.
- Jeyanthi, P., & Philo, P. 2016. Odd Harmonious Labeling of Some Cycle Related Graphs. *Proyecciones Journal of Mathematics*, 35(1), 85-98.
- Jeyanthi, P., Philo, P., & Sugeng, K. A. 2015. Odd Harmonious Labeling of Some New Families of Graphs. *SUT Journal of Mathematics*, 51(2), 53-65.
- Liang, Z., & Bai, Z. 2009. On The Odd Harmonious Graphs with Applications. *J. Appl. Math. Comput.*, 29, 105-116. doi:10.1007/s12190-008-0101-0
- Saputri, G. A., Sugeng, K. A., & Froncek, D. 2013. The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 10(2), 221-228.
- Vaidya, S. K. & Shah, N. H. 2012. Odd Harmonious Labeling of Some Graphs. *International J. Math. Combin.*, 3 105-112.
- Vaidya, S. K. & Shah, N. H. 2011. Some New Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 1(1), 9-16.

