Estimasi Solusi Model Pertumbuhan Logistik dengan Metode *Ensemble Kalman Filter*

Solution Estimation of Logistic Growth Model with Ensemble Kalman Filter Method

Vianda Nuning Fitriani, Kosala Dwidja Purnomo
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jember
Email: kosaladp@gmail.com

ABSTRACT

Ensemble Kalman Filter (EnKF) can be applied for linear or nonlinear models. This paper is aimed to estimate the logistic growth of population models using EnKF. The estimation will be compared with the analytical solution. We assume that we can find the analytical solution of the models. The models is in the specific form i.e comparison between the population growth rate and the amount of population is in the parabolic form. The good estimation will be attained by choosing 100 as size of ensembles in EnKF. The result of estimation really so closed to the analytical solution.

Keywords : Analytical solution, EnKF, ensemble

PENDAHULUAN

Metode Kalman Filter (KF) diperkenalkan oleh R.E. Kalman pada tahun 1960 melalui paper terkenalnya yang menjelaskan tentang solusi pada masalah filter linier untuk data diskrit. KF adalah suatu metode yang digunakan untuk mengestimasi *state* sistem yang diperoleh dari suatu pengukuran yang mengandung *noise*. Metode ini dapat mengestimasi suatu keadaan berdasarkan data yang minim. Data pengukuran terbaru menjadi bagian penting dari algoritma KF karena data tersebut akan berguna untuk mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasinya akan lebih mendekati kondisi yang sebenarnya.

Dengan bentuk standarnya metode KF hanya bisa diterapkan pada model dinamik linier. Dalam perkembangannya untuk memecahkan model dinamik nonlinier, metode KF dikembangkan menjadi beberapa metode lanjutan, diantaranya Extended Kalman Filter (EKF) dan Ensemble Kalman Filter (EnKF). Kedua metode tersebut memiliki karakteristik yang berbeda, EKF dapat diterapkan pada metode KF jika model dinamik nonliniernya telah dilinierisasi dengan menggunakan matriks Jacobi. Sedangkan metode EnKF dapat dijalankan dengan cara membangkitkan sejumlah *ensemble* tertentu untuk menghitung mean dan kovarian error variabel statenya.

Purnomo, K. (2008) membahas tentang penerapan EKF dan EnKF dalam mengestimasi pertumbuhan populasi plankton yang menghasilkan solusi bahwa penggunaan metode EKF lebih cocok digunakan dalam pengestimasian daripada metode EnKF. Erna dkk. (2011) telah menggunakan metode yang menghasilkan kesimpulan bahwa metode EnKF cocok digunakan untuk mengestimasi polusi air tanah dan estimasi EnKF lebih akurat dibandingkan KF.

Dalam tulisan ini penulis mencoba mengembangkan solusi estimasi model pertumbuhan logistik menggunakan metode EnKF. Model pertumbuhan logistik yang dikaji mengasumsikan bahwa perbandingan antara laju pertumbuhan populasi dan jumlah populasinya setiap saat berbentuk kurva parabolik. Solusi analitik atau solusi eksak dari model juga akan digunakan sebagai pembanding hasil estimasinya.

Model Pertumbuhan Logistik

Misalkan banyaknya populasi pada waktu t adalah $N(t)$, maka laju perubahan populasi terhadap waktu t adalah $dN(t)/dt$. Selanjutnya jika laju perubahan populasi sebanding dengan banyaknya populasi yang ada, maka:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

atau

$$\frac{dN(t)/dt}{N(t)} = k \qquad (1)$$

dengan k konstanta dan disebut laju reproduksi. Jika laju reproduksinya tidak konstan, maka k dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari variabel *N*, misalkan $f(N)$. Maka model persamaan (1) dapat diubah menjadi:

$$\frac{dN(t)/dt}{N(t)} = f(N(t)) \qquad (2)$$

Dari model persamaan pertumbuhan eksponensial (1) dapat ditentukan suatu model baru yaitu persamaan pertumbuhan logistik (2). Pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi yang terkait dengan kepadatan yang mencerminkan pengaruh dari persaingan intraspesifik. Penghambatan pertumbuhan populasi dapat dijelaskan secara matematika dengan menambahkan variabel yang menjelaskan pengaruh kepadatan ke dalam persamaan eksponensial.

Dari persamaan (2), asumsi sederhana yang dapat dibuat adalah $f(N(t))$ berbentuk linier, yaitu $f(N(t)) = c_1 N(t) + c_2$. Jika kita menggunakan kondisi $f(0) = r$ dimana r adalah laju pertumbuhan dan $f(K) = 0$ (K adalah *carrying capacity* atau ambang batas populasi), maka kita dapat menemukan $c_2 = r$ dan $c_1 = -r/K$. Jadi diperoleh bentuk $f(N(t)) = r - \frac{r}{K}N(t)$. Oleh karena itu, persamaan logistik dengan $f(N(t))$ linier adalah:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(r - \frac{r}{K}N(t)\right)N(t) \qquad (3)$$

Persamaan (3) mempunyai solusi analitik

$$N(t) = \frac{rN(t)}{\frac{r}{K}N_0 + \left(r - \frac{r}{K}N_0\right)e^{-rt}}$$

(Zill, 2005).

Asumsi $f(N(t))$ linier dapat dikembangkan menjadi bentuk parabolik, yaitu:

$$f(N(t)) = a\,N(t)^2 + b \qquad (4)$$

dimana a dan b adalah konstanta. Dalam hal ini persamaan (4) akan menjadi asumsi dalam model pertumbuhan logistik yang akan dikaji.

Metode Ensemble Kalman Filter

Metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) adalah metode estimasi modifikasi dari algoritma Kalman Filter yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem linier maupun nonlinier. Metode EnKF diperkenalkan oleh Evensen (2003) dengan membangkitkan atau menggunakan sejumlah ensemble pada tahap prediksi untuk mengestimasi kovarian errornya. Oleh karena itu, proses estimasi pada metode EnKF sedikit berbeda dengan proses estimasi pada metode *Kalman Filter*.

Bentuk umum sistem dinamik nonlinier pada EnKF adalah

$$x_{k+1} = f(u_k, x_k) + w_k$$

dengan pengukuran linier $y_k \epsilon R^p$ yaitu:

$$y_k = \boldsymbol{H}_k x_k + v_k$$

dimana,

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$$

Proses estimasi pada EnKF diawali dengan membangkitkan sejumlah N_e ensemble dengan mean nol dan kovarian tertentu. Ensemble yang dibangkitkan dilakukan secara random dan berdistribusi normal. Misalkan akan dibangkitkan sejumlah N_e ensemble untuk $x_{0,i} = [x_{0,1} \quad x_{0,2} \quad x_{0,3} \quad \cdots \quad x_{0,N_e}]$.

Untuk tahap prediksi dan koreksi, sama dengan metode Kalman Filter tetapi sebelum masuk ke tahap prediksi, mean ensemblenya ditentukan terlebih dahulu, yaitu:

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_e}\sum_{i=1}^{N_e}(x_{k,i}) \qquad (5)$$

dan untuk kovarian error P_k, yaitu:

$$P_k = \frac{1}{N_e - 1}\sum_{i=1}^{N_e}(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T \qquad (6)$$

Persamaan (5) digunakan pada tahap prediksi dan tahap koreksi untuk menghitung estimasi masing-masing $\hat{x}_k^-$ dan $\hat{x}_k^-$, sedangkan persamaan (6) hanya digunakan untuk kovarian pada tahap prediksi. Pada EnKF, *noise* sistem w_k pada tahap prediksi dan *noise* pengukuran v_k pada tahap koreksi dibangkitkan dalam bentuk *ensemble*.

Dalam melakukan estimasi dengan sistem dinamik nonlinier dan pengukuran yang linier, diberikan suatu algoritma EnKF seperti pada Tabel 1.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang estimasi pertumbuhan logistik dengan menggunakan metode EnKF dan solusi eksak dari model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik mempunyai bentuk nonlinier dan kontinyu. Oleh karena itu, perlu dilakukan diskritisasi agar algoritma EnKF dapat dijalankan dengan pemrograman Matlab. Model pertumbuhan populasi yang masih berbentuk model deterministik harus diubah menjadi model dinamik stokastik dengan cara menambahkan *noise.* Kemudian akan dibahas hasil simulasi dengan cara membandingkan hasil estimasi EnKF dengan solusi analitik. Dalam hal ini pada metode EnKF akan dibandingkan hasil estimasi dengan ukuran *ensemble* 100, 200, 300, 400, 500, 1000 dan 3000.

Tabel 1. Algoritma *Ensemble Kalman Filter* (EnKF)

Model Sistem dan model Pengukuran: $x_{k+1} = f(u_k, x_k) + w_k,\ w_k \sim N(0, Q_k)$ $y_k = H_k x_k + vk,\ v_k \sim N(0, R_k)$
Tahap Inisialisasi:
Bangkitkan N_e ensemble sesuai estimasi awal $\bar{x}_0$. $x_{0,i} = [x_{0,1} \quad x_{0,2} \quad x_{0,3} \quad \cdots \quad x_{0,N_e}]$ Tentukan nilai awal: $\hat{x}_0 = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} (x_{0,i})$
Tahap Prediksi:
$\hat{x}_{k,i}^{-} = f(u_{k-1}, x_{k-1}) + w_{k,i}$ dengan $w_{k,i} \sim N(0, Q_k)$ Estimasi : $\hat{x}_k^{-} = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}^{-}$ Kovarian Error : $P_k^{-} = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\hat{x}_{k,i}^{-} - \hat{x}_k^{-})(\hat{x}_{k,i}^{-} - \hat{x}_k^{-})^T$
Tahap Koreksi:
$y_{k,i} = y_k + v_{k,i}$ dengan $v_{k,i} \sim N(0, R_k)$ Kalman Gain : $K_k = P_k^{-} H_k^T (H_k P_k^{-} H_k^T + R_k)^{-1}$ Estimasi : $\hat{x}_{k,i} = \hat{x}_{k,i}^{-} + K_k (y_{k,i} - H_k \hat{x}_{k,i}^{-})$ $\hat{x}_k = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}$ Kovarian Error : $P_k = [I - K_k H_k] P_k^{-}$

Keterangan:
$\hat{x}_k^{-}$: estimasi variabel keadaan pada tahap prediksi
P_k^{-} : kovariansi error pada tahap prediksi
(Purnomo, 2008)

Model pertumbuhan logistik yang dikaji merujuk pada persamaan (2) dan (4), dimana $f(N(t))$ adalah fungsi parabolik. Jika menggunakan kondisi $f(0) = r$ dan $f(K) = 0$, maka dapat ditemukan nilai dari konstanta *a* dan *b*, yaitu $a = -\frac{r}{K^2}$ dan $b = r$. Sehingga diperoleh bentuk $f(N(t)) = -\frac{r}{K^2} (N(t))^2 + r$. Oleh karena itu, persamaan pertumbuhan logistiknya menjadi:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(-\frac{r}{K^2} (N(t))^2 + r\right) N(t)$$

atau

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{r}{K^2} (N(t))^3 + rN(t) \qquad (7)$$

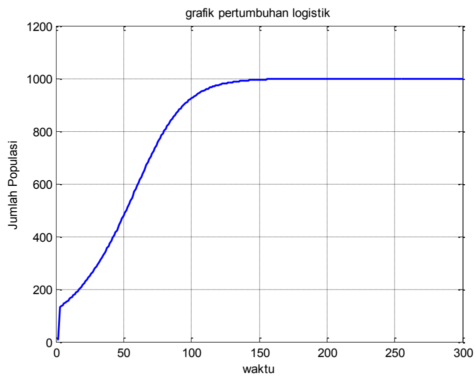
Persamaan terakhir ini dapat diubah menjadi persamaan diferensial Bernoulli (8), yaitu:

$$\frac{dN(t)}{dt} - rN(t) = -\frac{r}{K^2} (N(t))^3 \qquad (8)$$

Persamaan (7) ini mempunyai solusi analitik

$$N(t) = \sqrt{\frac{K^2}{1 + 2r e^{-2rt} C}} \qquad (9)$$

Persamaan (9) dapat ditunjukkan melalui grafik di bawah ini, dimana nilai konstanta yang diambil diasumsikan sebagai berikut: $N(0) = N_0 = 10, r = 0.03, K = 10^3$. Dengan mensubstitusikan ketiga nilai tersebut ke dalam persamaan (9), maka diperoleh nilai konstanta $C = 10^3$ dan grafik solusi sebagaimana pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik solusi model pertumbuhan logistik

Persamaan (9) merupakan solusi analitik dari persamaan pertumbuhan logistik. Solusi analitik atau solusi eksak merupakan solusi ideal dari suatu persamaan. Oleh karena itu, solusi analitik ini akan dibandingkan dengan hasil estimasi menggunakan metode Ensemble Kalman Filter.

Persamaan (7) yang merupakan model kontinyu selanjutnya akan didiskritisasi dengan beda hingga (*finite difference*). Jika $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat t, maka diperoleh:

$$N(t) \approx N_k$$

dimana $t \approx k\Delta t$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Perubahan variable state N_k terhadap waktu diaproksimasi dengan menggunakan metode beda hingga maju, sehingga diperoleh:

$$\frac{dN(t)}{dt} \approx \frac{N_{k+1} - N_k}{\Delta t}$$

Persamaan diatas kemudian disubtitusikan kepersamaan (7), sehingga diperoleh:

$$\frac{N_{k+1} - N_k}{\Delta t} = -\frac{r}{K^2} N_k^{\ 3} + rN_k$$

Atau

$$N_{k+1} = \left(-\frac{r}{K^2} N_k^{\ 3} + rN_k\right)\Delta t + N_k \quad (10)$$

Persamaan (10) merupakan bentuk sistem dinamik nonlinier, dengan model pengukuran yang berbentuk linier yaitu:

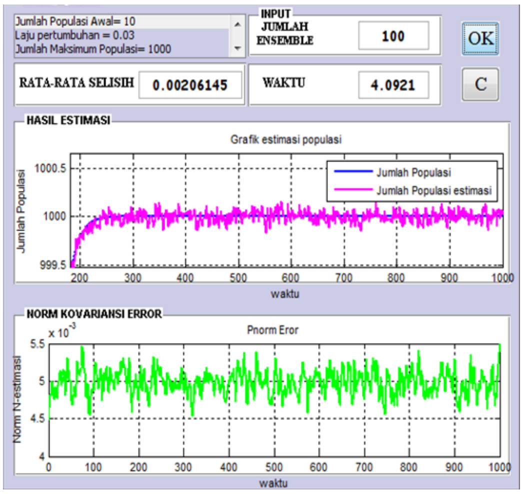
$y_k = \boldsymbol{H} x_k$

dengan $\boldsymbol{H}$ adalah sebuah matriks pengukuran yang bergantung pada variabel keadaan yang akan diukur. Dalam masalah ini, matriks pengukuran tersebut berukuran 1 × 1.

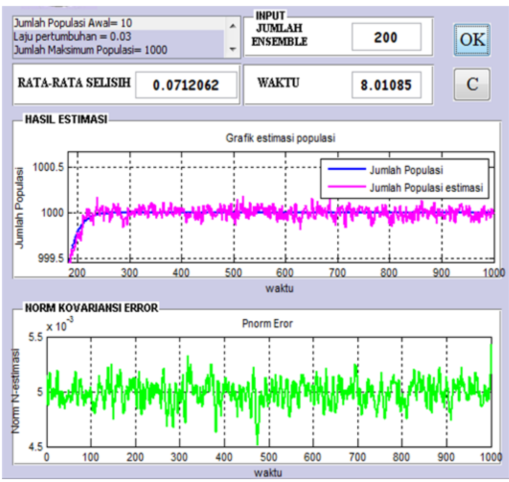
Simulasi dilakukan dengan menggunakan program Matlab 7.8.0. Dalam hal ini, algoritma yang akan akan digunakan dalam proses simulasi adalah algoritma dari metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) yang akan dibandingkan dengan solusi analitik atau solusi eksak dari model persamaan pertumbuhan logistik. Dalam proses simulasi terlebih dahulu ditentukan grid waktu (Δt). Nilai (Δt) ditentukan dengan menggunakan tebakan yang disesuaikan dengan hasil estimasi agar hasil estimasi dalam metode EnKF menunjukkan hasil estimasi yang konvergen. Nilai dari (Δt) yang akan diambil dalam proses simulasi pertumbuhan logistik ini adalah $(\Delta t) = 0.01$. Selain dari (Δt), data-data yang akan digunakan dalam proses simulasi pertumbuhan logistik adalah: laju pertumbuhan populasi $r = 0.03$, batas maksimum populasi $K = 10^3$, dan jumlah populasi awal $N_0 = 10$.

Dalam proses simulasi dengan menggunakan metode EnKF, pengambilan ukuran *ensemble* yang akan diambil adalah 100, 200, 300, 400, 500, 1000 dan 3000. Sedangkan variansi dari *noise* proses (Q_1) dan *noise* pengukuran (R_1) masing-masing adalah $(Q_1) = 0.01$ dan $(R_1) = 0.01$. Proses simulasi dalam hal ini dilakukan dengan jumlah iterasi sebanyak 1000. Hasil simulasi yang diperoleh akan dievaluasi dengan cara membandingkan hasil estimasi EnKF dengan solusi analitik dari model pertumbuhan logistik.

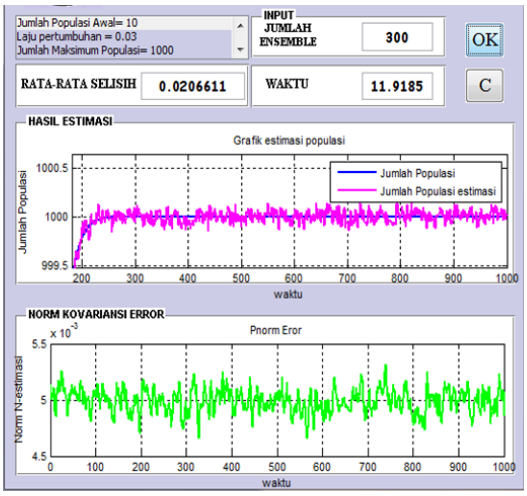
Dalam bagian ini akan disajikan grafik nilai analitik dan nilai estimasi EnKF dari pertumbuhan logistik. Penyajian hasil melalui gambar dimaksudkan untuk memperoleh gambaran umum hasil estimasi EnKF dengan solusi analitik. Selain itu, disajikan juga grafik norm kovariansi error P yang digunakan untuk menentukan tingkat keragaman dari hasil estimasi metode EnKF.



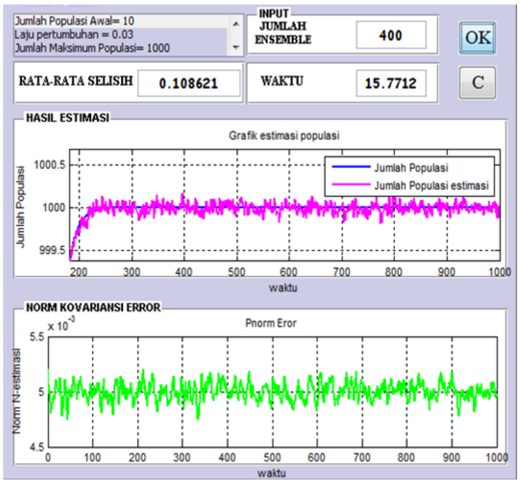
Gambar 2. Hasil estimasi EnKF dengan 100 ensemble



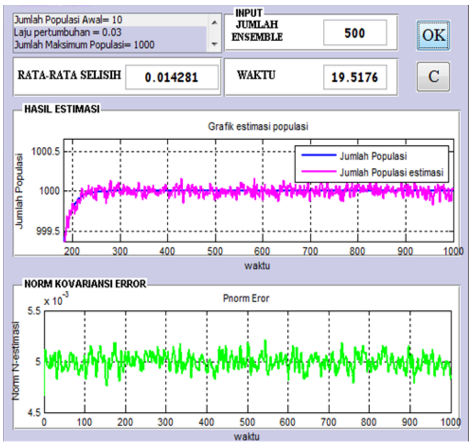
Gambar 3. Hasil estimasi EnKF dengan 200 ensemble



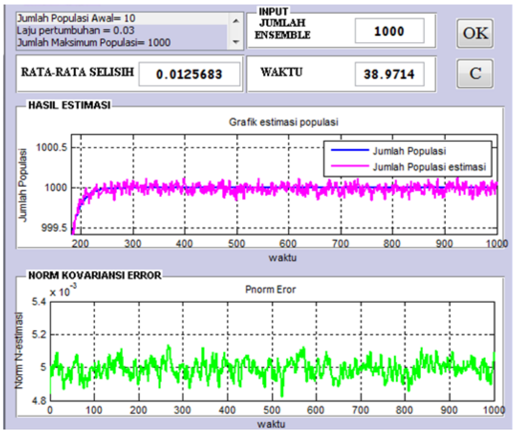
Gambar 4. Hasil estimasi EnKF dengan 300 ensemble



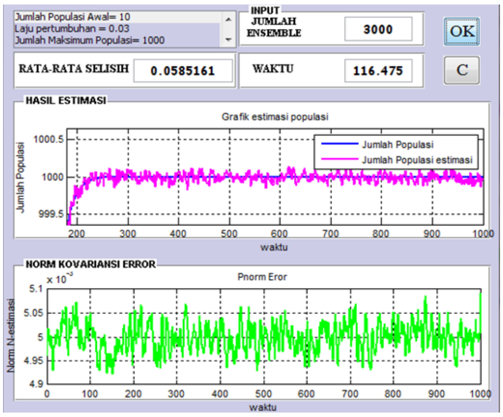
Gambar 5. Hasil estimasi EnKF dengan 400 ensemble



Gambar 6. Hasil estimasi EnKF dengan 500 ensemble



Gambar 7. Hasil estimasi EnKF dengan 1000 ensemble



Gambar 8. Hasil estimasi EnKF dengan 3000 ensemble

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 2 sampai dengan Gambar 8, dapat diketahui bahwa hasil estimasi dengan metode EnKF cukup dekat dengan hasil analitik pada Gambar 1. Grafik pada Gambar 1 menunjukkan bahwa pada solusi analitik secara asimtotik jumlah populasi mendekati nilai tertentu (dalam hal ini 1000) sebagai ambang batasnya. Sedangkan nilai estimasi dengan metode EnKF bergerak fluktuatif di sekitar solusi analitiknya. Hal ini menunjukkan bahwa metode EnKF dengan lebih dari 100 ensemble memberikan hasil estimasi yang cukup baik.

Dari Gambar 2 sampai Gambar 8 juga terlihat bahwa ukuran ensemble yang lebih besar secara umum memberikan nilai norm kovariansi error yang lebih kecil. Hal ini menunjukkan bahwa estimasi dengan ukuran ensemble yang lebih besar pada metode EnKF memberikan hasil yang relatif lebih baik dibandingkan ukuran ensemble yang lebih kecil. Namun demikian, patut dipertimbangkan juga bahwa ukuran ensemble yang lebih besar akan memberikan konskuensi perhitungan numerik yang banyak, sehingga juga akan membutuhkan waktu komputasi yang lebih besar.

KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Hasil estimasi dengan metode EnKF (dengan jumlah ensemble 100 atau lebih) cukup dekat dengan solusi analitiknya.
2. Ukuran ensemble yang lebih besar pada EnKF memberikan hasil estimasi yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Erna, A., Sanjoyo, A., dan Dieky, A. 2011. ‘’The Ground Water Pollution Estimation by The Ensemble Kalman Filter’’. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics*, **Vol 2** No. 2.

Evensen, G., 2003. “The Ensemble Kalman Filter: Theoretical formulation and practical implementation”. *Ocean Dynamics*, **Vol 53**, hal 343 - 367.

Purnomo, K. D. 2008. *Aplikasi Metode Kalman Filter pada Model populasi Plankton*. Tidak diterbitkan. Tesis. Surabaya: Program Pasca Sarjana Institut Teknologi Sepuluh November.

Erna, A., Sanjoyo, A., dan Dieky, A. 2011. ‘’The Ground Water Pollution Estimation by The Ensemble Kalman Filter’’. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics*, **Vol 2** No. 2.

Evensen, G., 2003. “The Ensemble Kalman Filter: Theoretical formulation and practical implementation”. *Ocean Dynamics*, **Vol 53**, hal 343 - 367.

Purnomo, K. D. 2008. *Aplikasi Metode Kalman Filter pada Model populasi Plankton*. Tidak diterbitkan. Tesis. Surabaya: Program Pasca Sarjana Institut Teknologi Sepuluh November