

Dinamika Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Model Mangsa-Pemangsa dengan Perilaku Anti-Pemangsa

Local Stability Dynamics of Equilibrium Points in Predator-Prey Models with Anti-Predator Behavior

Joko Harianto^{*}, Titik Suparwati, Alfonsina Lisda Puspa Dewi
 Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Cendrawasih
 Jl. Kampwolker Waena, Kota Jayapura, Papua
^{*}E-mail: joharijpr88@gmail.com

ABSTRACT

This article describes the dynamics of local stability equilibrium point models of interaction between prey populations and their predators. The model involves response functions in the form of Holling type III and anti-predator behavior. The existence and stability of the equilibrium point of the model can be obtained by reviewing several cases. One of the factors that affect the existence and local stability of the model equilibrium point is the carrying capacity (k) parameter. If $x_3^*, x_4^* > 0$ is a constant solution of the model and $k \in (0, x_3^*]$, then there is a unique boundary equilibrium point $E_k(k, 0)$. Whereas, if $k \in (x_3^*, x_4^*]$, then $E_k(k, 0)$ is unstable and $E_3(x_3^*, y_3^*)$ is stable. Furthermore, if $k \in (x_4^*, \infty)$, then $E_k(k, 0)$ remains stable and $E_4(x_4^*, y_4^*)$ is unstable, but the stability of the equilibrium point $E_3(x_3^*, y_3^*)$ is branching. The equilibrium point $E_3(x_3^*, y_3^*)$ can be stable or unstable depending on all parameters involved in the model. Variations of k parameter values are given in numerical simulation to verify the results of the analysis. Numerical simulation indicates that if $k = 0,92$ then nontrivial equilibrium point $E_k(0,92; 0)$ stable. If $k = 0,93$ then $E_k(0,93; 0)$ unstable and $E_3^*(0,929; 0,00003)$ stable. If $k = 23,94$, then $E_k(23,94; 0)$ and $E_3^*(0,929; 0,143)$ stable, but $E_4^*(23,93; 0,0005)$ unstable. If $k = 38$ then $E_k(38,0)$ stable, but $E_3^*(0,929; 0,145)$ and $E_4^*(23,93; 0,739)$ unstable.

Keywords: anti-predator behavior, carrying capacity, and holling type III.

PENDAHULUAN

Interaksi antara mangsa dan pemangsa telah menjadi topik penting dalam ekologi. Interaksi antara mangsa dan pemangsa sangat dinamis. Banyak peneliti telah mempelajari interaksi antara mangsa dan pemangsa secara mendalam. Salah satu interaksi yang dilakukan mangsa terkadang dapat melukai pemangsanya. Perilaku mangsa tersebut dikatakan sebagai perilaku anti-pemangsa. Perilaku anti-pemangsa sangat sering ditemukan di lingkungan sekitar kita. Perilaku tersebut membantu mangsa untuk bertahan hidup melawan pemangsanya. Perilaku anti-pemangsa telah dibahas oleh beberapa ahli ekologi, diantaranya dibahas dalam artikel (Abrams & Matsuda, 1993; Magurran, 1990; Moynihan & Kruuk, 1965; Riechert & Hedrick, 1990; Stanford, 1995; Wang *et al.*, 2005). Perilaku tersebut tentu saja dapat menimbulkan dampak bagi kehidupan bersama antara mangsa dan pemangsa dalam suatu lingkungan. Pemodelan matematika diperlukan sebagai alat untuk memprediksi dan menganalisis dampak terhadap perilaku anti-pemangsa di masa yang akan datang. Model anti-pemangsa pertama kali dibahas oleh Ives &

Dobson (1987) dalam (Ives & Dobson, 1987). Simulasi numerik yang mereka lakukan menunjukkan bahwa efisiensi perilaku anti-pemangsa meningkatkan kepadatan populasi mangsa dan menurunkan rasio kepadatan populasi pemangsa terhadap mangsa. Hasil tersebut juga serupa dengan hasil analisis yang dibahas dalam artikel (Křivan, 1998; Ramos-Jiliberto *et al.*, 2007; Srinivasu & Gayatri, 2005).

Penelitian terkait model mangsa dan pemangsa terus berkembang hingga saat ini. Kajian terbaru terkait model mangsa dan pemangsa dengan perilaku anti-pemangsa dibahas dalam artikel (Li *et al.*, 2019). mereka membuat model baru satu mangsa dan dua predator dengan perilaku anti-pemangsa. Hasil yang mereka peroleh adalah terdapat beberapa nilai parameter dalam model tersebut sehingga salah satu predator dapat dimusnahkan oleh predator lainnya. Kajian berikutnya dibahas dalam artikel (Zhang & Yang, 2020). Mereka mengkonstruksi model tiga mangsa dan satu pemangsa. Mereka menganalisis kestabilan global titik ekuilibrium model tersebut. Beberapa peneliti mengkaji model mangsa dan

pemangsa dengan melibatkan fungsi respon Holling Tipe I, I, III dan IV. Ruan dan Xiao dalam (Ruan & Xiao, 2000) membahas kestabilan global titik ekuilibrium sistem mangsa dan pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe IV. Mereka juga menunjukkan eksistensi bifurkasi saddle-node, bifurkasi Hopf dan bifurkasi Bogdanov-Takens pada sistem. Artikel (Shaikh *et al.*, 2018) membahas pembentukan model mangsa dan pemangsa dengan adanya penyakit pada pemangsa. Mereka membahas kestabilan lokal dan global titik ekuilibrium sistem mangsa dan pemangsa yang melibatkan fungsi respon Holling tipe III.

Model mangsa dan pemangsa yang melibatkan perilaku anti-pemangsa dan fungsi respon Holling tipe IV dibahas dalam artikel (Tang & Xiao, 2015). Mereka menganalisis kestabilan global titik ekuilibrium model. Mereka juga membahas eksistensi bifurkasi saddle-node, bifurkasi Hopf dan bifurkasi Bogdanov-Takens pada model. Fungsi respon pada populasi merupakan bagian penting dalam interaksi antara mangsa dan pemangsa. Fungsi respon pemangsa mendeskripsikan jumlah mangsa yang dikonsumsi per pemangsa per satuan waktu. Kepadatan populasi mangsa memiliki hubungan dengan tingkat pemangsaan yang bersifat sigmoid. Sigmoid yaitu suatu keadaan dimana kepadatan populasi mangsa rendah menyebabkan tingkat pemangsaan juga ikut rendah. Sebaliknya, jika kepadatan populasi mangsa meningkat, maka pemangsa akan lebih intensif mencari mangsanya (Agarwal & Pathak, 2013). Hubungan antara kepadatan populasi mangsa dengan tingkat pemangsaan dirumuskan dalam bentuk persamaan Holling tipe III. Model interaksi mangsa dan pemangsa dengan perilaku anti-pemangsa yang melibatkan fungsi respon Holling tipe III belum pernah dibahas sebelumnya. Oleh karena itu, pembahasan ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan lokal titik ekuilibrium model mangsa dan pemangsa dengan perilaku anti-pemangsa dan fungsi respon Holling tipe III.

METODE

Pemodelan matematika untuk masalah interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa merupakan kajian teoritis. Pembahasan artikel ini difokuskan pada dinamika kestabilan titik ekuilibrium model mangsa-pemangsa yang melibatkan fungsi respon Holling tipe III dan perilaku anti-pemangsa. Metode yang digunakan dalam pembahasan artikel ini adalah metode kajian teoritis yang bersumber dari artikel (Li *et al.*, 2019; Shaikh *et al.*, 2018; Tang & Xiao, 2015;

Zhang & Yang, 2020). Teori sistem dinamik untuk menunjang analisis kestabilan titik ekuilibrium model dipelajari dalam (Olsder, 1994) dan (Perko, 2001). Simulasi numerik dilakukan dengan bantuan software Maple 2016.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Asumsi yang diambil untuk membangun model merujuk pada artikel (Tang & Xiao, 2015). Populasi mangsa dalam model ini diasumsikan bertambah karena terjadi konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa mengikuti fungsi respon Holling tipe III. Berdasarkan artikel (Tang & Xiao, 2015) dan asumsi tersebut sehingga dibentuklah model sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= a \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mx^2y}{1 + bx^2} \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\gamma x^2y}{1 + bx^2} - \eta \cdot -c \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dengan semua parameter dalam Sistem (1) nilainya positif. x merupakan jumlah mangsa, y merupakan jumlah pemangsa, a laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa, k kapasitas lingkungan, m tingkat efisiensi penangkapan mangsa oleh pemangsa, b rata-rata waktu yang diperlukan pemangsa untuk menangkap mangsa, γ laju konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa, η laju perilaku anti-pemangsa dari populasi mangsa terhadap populasi pemangsanya, c laju kematian populasi pemangsa.

Sistem (1) merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Titik ekuilibrium Sistem (1) dapat ditentukan dengan mencari solusi konstan dari Sistem (1). Solusi konstan Sistem (1) ditentukan dengan menyelesaikan sistem nonlinear berikut :

$$\left\{ \begin{aligned} a \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mx^2y}{1 + bx^2} &= 0 \\ \frac{\gamma x^2y}{1 + bx^2} - \eta \cdot -c &= 0 \end{aligned} \right.$$

Jika dimisalkan (x^*, y^*) merupakan titik ekuilibrium Sistem (1), maka berlaku

$$ax^* \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{mx^{*2}y^*}{1 + bx^{*2}} = 0$$

yang kemudian dapat ditulis menjadi

$$x^* \left[a \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \frac{mx^*y^*}{1 + bx^{*2}} \right] = 0$$

Sehingga untuk memperoleh nilai x^* , perhitungannya dapat dibagi menjadi 2 kasus, yaitu:

1. Kasus $x^* = 0$

Jika $x^* = 0$, maka diperoleh $y^* = 0$ sehingga diperoleh titik ekuilibrium trivial, yaitu $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Titik ekuilibrium untuk kasus ini dinotasikan dengan $E_0 = (0, 0)$.

2. Kasus $x^* \neq 0$

Jika $x^* \neq 0$, maka diperoleh

$$\left(a - \frac{ax^*}{k}\right)(\eta x^{*3} + (b - \gamma)x^{*2} + \eta x^* + c) = 0 \quad (3)$$

Sehingga terdapat empat nilai $x^* \neq 0$. Salah satu akar Persamaan (3) yaitu $x^* = k$ sehingga diperoleh $y^* = 0$. Titik ekuilibrium $(x^*, y^*) = (k, 0)$ untuk kasus ini dinotasikan dengan E_k . Selanjutnya, untuk tiga nilai $x^* \neq 0$ yang lain dapat diperoleh dari akar persamaan kubik berikut:

$$\eta x^{*3} + (b - \gamma)x^{*2} + \eta x^* + c = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan persamaan kubik yang akarnya tidak mudah ditentukan secara analitik. Oleh karena itu, terlebih dahulu dibahas syarat eksistensi akar-akar positif dari Persamaan (4) dengan menyelidiki kemonotonan $f(x) = \eta x^3 + (b - \gamma)x^2 + \eta x + c$ menggunakan konsep turunan. Jika $f(x) = \eta x^3 + (b - \gamma)x^2 + \eta x + c$, maka diperoleh

$$f'(x) = 3\eta x^2 + 2(b - \gamma)x + \eta$$

$$f''(x) = 6\eta x + 2(b - \gamma)$$

Jika $x > p$ dengan $p = -\frac{b - \gamma}{3\eta}$, maka $f''(x) > 0$. Hal ini berarti bahwa $f(x)$ cekung ke atas pada (p, ∞) . Sebaliknya $f(x)$ cekung ke bawah pada $(-\infty, p)$.

Syarat eksistensi akar-akar positif Persamaan (4) bergantung pada koefisien x dari $f'(x)$ sehingga perhitungan akarnya dibedakan menjadi dua kasus yaitu:

Kasus 1 : Jika $b - \gamma \geq 0$

Jelas bahwa $f'(x) > 0$ untuk semua $x > 0$ sehingga $f(x)$ monoton naik untuk semua $x > 0$ dengan $f(0) = c > 0$. Jadi, Persamaan (4) tidak memiliki akar positif, akibatnya untuk kasus ini tidak terdapat titik ekuilibrium.

Kasus 2 : Jika $b - \gamma < 0$

Titik-titik kritis $f(x)$ merupakan akar dari $f'(x) = 0$ dengan

$$f'(x) = 3\eta x^2 + 2(b - \gamma)x + \eta$$

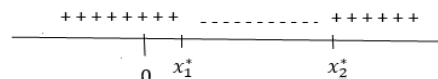
Sehingga titik-titik kritis $f(x)$, yaitu:

$$x_1^* = \frac{-(b - \gamma) - \sqrt{(b - \gamma)^2 - 3b\eta^2}}{3\eta}$$

$$x_2^* = \frac{-(b - \gamma) + \sqrt{(b - \gamma)^2 - 3b\eta^2}}{3\eta}$$

Titik-titik kritis x_1^* dan x_2^* bernilai riil positif jika $(b - \gamma)^2 > 3b\eta^2$ dengan $f(x_1^*)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(x_2^*)$ minimum lokal.

Jika $(b - \gamma)^2 > 3b\eta^2$, maka diberikan Gambar 1 sebagai ilustrasi $f(x)$ monoton naik atau turun pada garis bilangan real.

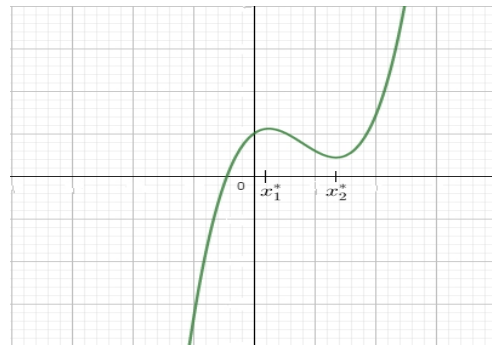


Gambar 1. Garis bilangan real untuk $f(x)$

$f(x)$ monoton naik pada interval $(-\infty, x_1^*)$ dan $(x_2^*, +\infty)$ kemudian monoton turun pada interval (x_1^*, x_2^*) . Jelas bahwa $f(x_1^*) > 0$ sehingga eksistensi akar positif $f(x) = 0$ bergantung pada nilai $f(x_2^*)$. Syarat eksistensi akar positif $f(x) = 0$ untuk kasus ini dibedakan menjadi tiga sub-kasus yaitu:

a. Kasus $f(x_2^*) > 0$

Jika $f(x_2^*) > 0$, maka grafik $f(x)$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2 tidak akan memotong sumbu x pada (x_1^*, ∞) . Untuk kasus ini tidak terdapat akar positif. Berikut ini diberikan ilustrasi grafik $f(x)$.



Gambar 2. Grafik $f(x)$ untuk kasus $f(x_2^*) > 0$

Jika dimisalkan

$$M = \sqrt{(b - \gamma)^2 - 3b\eta^2} ; e_1 = \frac{1}{27\eta^2 b^2} ;$$

$$e_2 = \frac{(3\eta a + b - \gamma)}{9\eta^2 b^2} ;$$

$$e_3 = \frac{(3\eta a^2 + 2b - 2\gamma a + \eta)}{3\eta}$$

$\varepsilon = e_3 M + \eta a^3 + b^2 - \gamma a^2 + \eta + c$ maka $f(x_2^*) > 0$ ekuivalen dengan $e_1 M^3 + e_2 M^2 + \varepsilon > 0$.

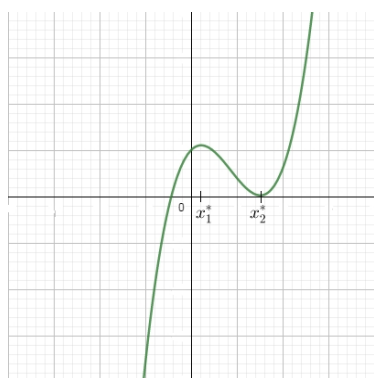
b. Kasus $f(x_2^*) = 0$

Jika $f(x_2^*) = 0$, maka grafik $f(x)$ seperti

yang ditunjukkan pada Gambar 3 menyinggung sumbu x tepat pada satu titik, yaitu x_2^* . Untuk kasus ini hanya terdapat satu akar Persamaan (22), yaitu x_2^* . Berikut ini diberikan ilustrasi grafik $f(x)$.

Jadi, titik ekuilibrium Sistem (1) untuk sub-kasus ini dinotasikan dengan $E_2(x_2^*, y_2^*)$ dengan

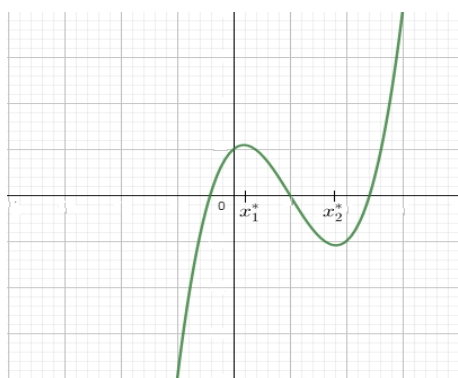
$$y_2^* = \frac{\left(a - \frac{ax_2^*}{k}\right)(1 + bx_2^{*2})}{mx_2^*}$$



Gambar 3. Grafik $f(x)$ untuk kasus $f(x_2^*) = 0$

c. Kasus $f(x_2^*) < 0$

Jika $f(x_2^*) < 0$, maka grafik $f(x)$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4 akan memotong sumbu x di dua titik pada (x_1^*, ∞) . Untuk kasus ini terdapat dua akar positif. Dua akar tersebut kemudian dinotasikan dengan x_3^* dan x_4^* . Berikut ini diberikan ilustrasi grafik $f(x)$.



Gambar 4. Grafik $f(x)$ untuk kasus $f(x_2^*) < 0$

Jadi, titik ekuilibrium Sistem (1) untuk sub-kasus ini dinotasikan dengan $E_3(x_3^*, y_3^*)$ dan $E_4(x_4^*, y_4^*)$ dengan x_3^* , x_4^* merupakan akar Persamaan (4) dan

$$y_3^* = \frac{\left(a - \frac{ax_3^*}{k}\right)(1 + bx_3^{*2})}{mx_3^*}$$

$$y_4^* = \frac{\left(a - \frac{ax_4^*}{k}\right)(1 + bx_4^{*2})}{mx_4^*}$$

Jadi, disimpulkan bahwa eksistensi titik ekuilibrium Sistem (1) bergantung pada tiga kasus berikut:

1. Jika $b \geq \gamma$ maka Sistem (1) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $E_0(0,0)$, dan $E_k(k, 0)$.
2. Jika $b < \gamma$, dan $(b - \gamma)^2 < 3b\eta^2$ maka Sistem (1) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $E_0(0,0)$, dan $E_k(k, 0)$.
3. Jika $b < \gamma$, $(b - \gamma)^2 > 3b\eta^2$ dan $k < x_i^*$, $i = 2,3,4$ maka Sistem (1) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $E_0(0,0)$, dan $E_k(k, 0)$.
4. Jika $b < \gamma$, $(b - \gamma)^2 > 3b\eta^2$, $k > x_i^*$, $i = 2,3,4$ dan
 - a. $e_1M^3 + e_2M^2 + \varepsilon > 0$, maka Sistem (1) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $E_0(0,0)$, dan $E_k(k, 0)$.
 - b. $e_1M^3 + e_2M^2 + \varepsilon = 0$, maka Sistem (1) mempunyai tiga titik ekuilibrium yaitu $E_0(0,0)$, $E_k(k, 0)$ dan $E_2(x_2^*, y_2^*)$ dengan x_2^* merupakan akar dari $f(x) = 0$.
 - c. $e_1M^3 + e_2M^2 + \varepsilon < 0$, maka Sistem (1) mempunyai empat titik ekuilibrium yaitu $E_0(0,0)$, $E_k(k, 0)$, $E_3(x_3^*, y_3^*)$ dan $E_4(x_4^*, y_4^*)$ dengan x_3^* dan x_4^* merupakan akar-akar dari $f(x) = 0$.

Uraian pembahasan eksistensi titik ekuilibrium positif pada Sistem (1) yang diperoleh tersebut kemudian dirangkum dalam teorema berikut ini.

Teorema 1.

Diberikan

$$f(x) = \eta x^3 + (b - \gamma)x^2 + \eta + c$$

$$x_2^* = \frac{-(b - \gamma) + \sqrt{D}}{3\eta}$$

$$y_i^* = \frac{\left(a - \frac{ax_i^*}{k}\right)(1 + bx_i^{*2})}{mx_i^*}$$

dengan $i = 2, 3, 4$, $b - \gamma < 0$, $D = (b - \gamma)^2 - 3b\eta^2 > 0$ dan x_3^* , x_4^* merupakan akar positif dari $f(x)$. Sistem (1) selalu memiliki titik ekuilibrium trivial dan titik ekuilibrium batas, yaitu $E_0(0,0)$ dan $E_k(k, 0)$.

- i. Jika $f(x_2^*) < 0$ dan $x_3^* < k \leq x_4^*$, maka Sistem (1) hanya memiliki satu titik ekuilibrium positif, yaitu $E_3(x_3^*, y_3^*)$.
- ii. Jika $f(x_2^*) < 0$ dan $x_3^* < x_4^* < k$, maka Sistem (1) memiliki dua titik ekuilibrium positif, yaitu $E_3(x_3^*, y_3^*)$ dan $E_4(x_4^*, y_4^*)$.
- iii. Jika $f(x_2^*) = 0$ dan $x_2^* < k$, maka Sistem (1) hanya memiliki satu titik ekuilibrium positif, yaitu $E_2(x_2^*, y_2^*)$.

Berikut ini diselidiki kestabilan lokal titik ekuilibrium Sistem (1) dengan pendekatan linearisasi. Matriks Jacobian Sistem (1) sebagai berikut.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - \frac{2a}{k} - \frac{2m}{1+bx^2}y & -\frac{mx^2}{1+bx^2} \\ \frac{2\gamma}{(1+b)^2}x_i^* - \eta & \frac{\gamma mx^2}{1+bx^2} - \eta - c \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobian Sistem (1) di titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ adalah sebagai berikut

$$J(k, 0) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{mk^2}{1+mk^2} \\ 0 & \frac{\gamma mk^2}{1+bk^2} - \eta - c \end{pmatrix}$$

Misalkan $d_k = \frac{\gamma mk^2}{1+bk^2} - \eta - c$. Matriks $J(k, 0)$ merupakan matriks segitiga atas sehingga dua nilai eigen matriks tersebut adalah diagonal utamanya. Jelas bahwa titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ merupakan titik pelana (*saddle point*) jika $d_k > 0$. Sebaliknya, jika $d_k < 0$, maka titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ merupakan simpul stabil (*stable node*).

Selanjutnya, dimisalkan J_i^* matriks Jacobian Sistem (1) di titik ekuilibrium endemik $E_i(x_i^*, y_i^*)$ dengan $i = 3, 4$ sebagai berikut

$$J_i^* = \begin{pmatrix} -\frac{ax_i^*}{k} + \frac{2bm^2x_i^{*3}y_i^*}{(1+bx_i^{*2})^2} & -\frac{mx_i^*}{1+bx_i^{*2}} \\ \frac{2\gamma}{(1+bx_i^{*2})^2}x_i^*y_i^* - \eta y_i^* & 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan titik ekuilibrium endemik $E_i(x_i^*, y_i^*)$, $i = 3, 4$ bergantung pada $t_i J_i^*$ dan $\det J_i^*$. Dengan demikian, kestabilan titik ekuilibrium Sistem (1) dirangkum secara singkat dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.

Diketahui

$$d_k = \frac{\gamma mk^2}{1+bk^2} - \eta - c ;$$

$$t_i J_i^* = -\frac{ax_i^*}{k} + \frac{2bm^2x_i^{*3}y_i^*}{(1+bx_i^{*2})^2}$$

$$d J_i^* = \frac{mx_i^{*2}y_i^*}{1+bx_i^{*2}} \left(\frac{2\gamma}{(1+bx_i^{*2})^2}x_i^* - \eta \right)$$

dengan $i = 3, 4$. Titik ekuilibrium trivial Sistem (1), yaitu $E_0(0,0)$ selalu merupakan titik pelana (*saddle point*). Titik ekuilibrium batas, yaitu $E_k(k, 0)$ merupakan titik pelana (*saddle point*) jika $d_k > 0$. Sebaliknya, jika $d_k < 0$ maka titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ merupakan simpul stabil asimtotik (*asymptotically stable node*). Jika untuk $i = 3$ dan $i = 4$ berlaku $d J_i^* > 0$, $(t_i J_i^*)^2 < 4 d J_i^*$ dan $t_i J_i^* < 0$, maka titik ekuilibrium $E_3(x_3^*, y_3^*)$ dan $E_4(x_4^*, y_4^*)$ merupakan fokus stabil asimtotik (*asymptotically stable focus*). Sebaliknya, jika $t_i J_i^* > 0$, maka titik ekuilibrium $E_3(x_3^*, y_3^*)$ dan $E_4(x_4^*, y_4^*)$ merupakan fokus tak stabil (*unstable focus*). Jika $d J_i^* < 0$, maka titik ekuilibrium $E_i(x_i^*, y_i^*)$ merupakan titik pelana (*saddle point*) untuk setiap $i = 3, 4$.

Jika diperhatikan kembali Persamaan (4) dan $d_k = 0$, maka dapat ditunjukkan bahwa dua persamaan tersebut ekuivalen. Dengan demikian, perubahan sifat kestabilan titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ dapat ditinjau berdasarkan akar-akar dari persamaan $d_k = 0$. Jika dimisalkan akar-akar tersebut dinotasikan dengan $k_1 (k_1 = x_3^*)$ dan $k_2 (k_2 = x_4^*)$ dan $k < k_1$, maka titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ stabil. Selanjutnya, jika $k_1 < k < k_2$ maka $E_k(k, 0)$ tidak stabil tetapi titik ekuilibrium E_3 stabil. Jika $k_2 < k$, maka $E_k(k, 0)$ stabil.

Berikut ini diberikan simulasi numerik untuk memastikan kebenaran hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium model dan analisis kestabilan yang telah diperoleh. Perubahan sifat kestabilan titik ekuilibrium Sistem (1) bergantung pada parameter k sehingga nilai k pada simulasi dibuat bervariasi sedangkan parameter lainnya dipertahankan nilainya tetap.

Hal ini dilakukan untuk menunjukkan beberapa potret fase Sistem (1) berdasarkan kasus-kasus kestabilan titik ekuilibriumnya yang telah diperoleh secara analitik. Parameter-parameter yang nilainya dipertahankan yaitu, $a = 0,05, b = 1,25, c = 0,24, \gamma = 0,8, m = 0,75$, dan $\eta = 0,01$. Variasi nilai k yang digunakan yaitu $k = 0,92 ; k = 0,93 ; k = 23,94$ dan $k = 25$. Jika diperhatikan kembali

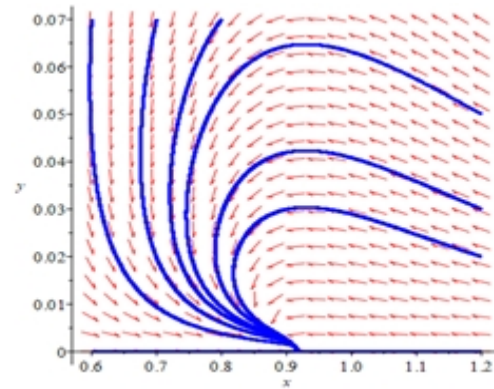
Persamaan (4) diketahui bahwa persamaan tersebut tidak bergantung terhadap parameter k sehingga solusi konstan Sistem (1) untuk populasi mangsa, yaitu $x_3^* = 0,929$ dan $x_4^* = 23,93$. Hasil perhitungan titik ekuilibrium nontrivial dan nilai eigen matriks Jacobian di titik ekuilibrium nontrivial Sistem (1) untuk setiap variasi parameter k disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Hasil Perhitungan Titik Ekuilibrium nontrivial dan Nilai Eigen Matriks Jacobian

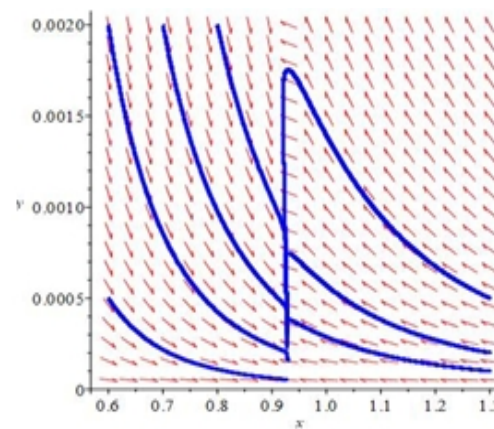
k	Titik Ekuilibrium	Nilai Eigen	Kestabilan
0,92	$E_k(0,92 ; 0)$	$\lambda_1 = -0,05 ;$ $\lambda_2 = -0,002$	Simpul Stabil
	$E_k(0,93 ; 0)$	$\lambda_1 = -0,049 ;$ $\lambda_2 = 0,00005$	Pelana (tak stabil)
0,93	$E_3^*(0,929 ; 3.10^{-5})$	$\lambda_1 = -0,049 ;$ $\lambda_2 = -0,00005$	Simpul Stabil
	$E_k(23,94 ; 0)$	$\lambda_1 = -0,049 ;$ $\lambda_2 = -0,00006$	Simpul Stabil
23,94	$E_3^*(0,929 ; 0,143)$	$\lambda_{1,2} = -4.10^{-5} \pm 0,105 i$	Fokus Stabil
	$E_4^*(23,93 ; 5.10^{-4})$	$\lambda_1 = -0,05 ;$ $\lambda_2 = 0,00006$	Pelana (tak stabil)
	$E_k(38 ; 0)$	$\lambda_1 = -0,05 ;$ $\lambda_2 = -0,14$	Simpul Stabil
38	$E_3^*(0,929 ; 0,145)$	$\lambda_{1,2} = 0,0003 \pm 0,1059 i$	Fokus tak Stabil
	$E_4^*(23,93 ; 0,739)$	$\lambda_1 = -0,07 ;$ $\lambda_2 = 0,06$	Pelana (tak stabil)

Gambar 5 menunjukkan potret fase dari Sistem (1) untuk $k = 0,92$ titik ekuilibrium nontrivial $E_k(0,92 ; 0)$ stabil. Gambar 6 menunjukkan potret fase dari Sistem (1) untuk $k = 0,93$ titik ekuilibrium nontrivial $E_k(0,93 ; 0)$ tidak stabil sedangkan $E_3^*(0,929 ; 0,00003)$ stabil.

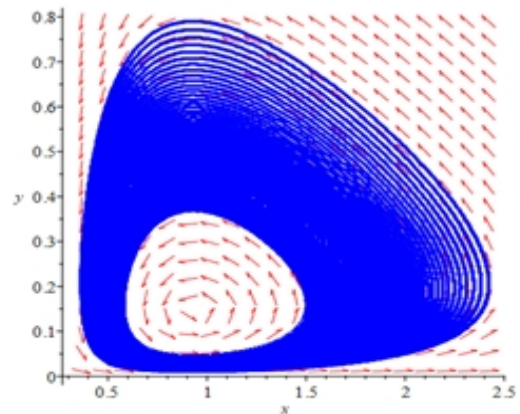
Gambar 7 menunjukkan potret fase dari Sistem (1) untuk $k = 23,94$ titik ekuilibrium $E_k(23,94 ; 0)$ stabil, $E_3^*(0,929 ; 0,143)$ stabil dan $E_4^*(23,93 ; 0,0005)$ tidak stabil. Gambar 8 menunjukkan potret fase dari Sistem (1) untuk $k = 38$ titik ekuilibrium $E_k(38,0)$ stabil sedangkan $E_3^*(0,929 ; 0,145)$ dan $E_4^*(23,93 ; 0,739)$ tidak stabil.



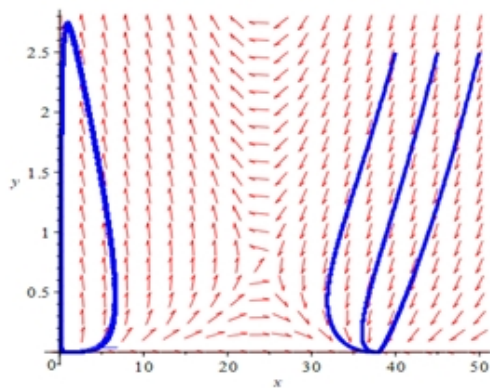
Gambar 5. Potret Fase Sistem (1) untuk $k = 0,92$



Gambar 6. Potret Fase Sistem (1) untuk $k = 0,93$



Gambar 7. Potret Fase Sistem (1) untuk $k = 23,94$



Gambar 8. Potret Fase Sistem (1) untuk $k = 38$

Menarik untuk diperhatikan bahwa populasi mangsa dapat hidup berdampingan dengan populasi pemangsa jika terjadi keseimbangan jumlah dua populasi tersebut untuk jangka panjang. Titik ekuilibrium $E_3(x_3^*, y_3^*)$ yang stabil sangat diharapkan agar tercapainya ekosistem yang seimbang. Simulasi numerik memperlihatkan bahwa ukuran akhir populasi mangsa dan pemangsa akan berbeda ketika dipilih nilai parameter k yang berbeda. Hal ini berarti bahwa salah satu faktor yang mempengaruhi kelestarian dua populasi tersebut adalah lingkungan. Jika nutrisi cukup, maka mangsa dan pemangsa akan hidup berdampingan. Pemangsa dalam rantai makanan berperan penting dalam keseimbangan lingkungan. Teori evolusi menjelaskan bahwa jika mangsa memiliki strategi yang lebih baik untuk meningkatkan perilaku anti-pemangsanya, maka pemangsa tersebut akan punah meskipun pada awalnya mereka hidup berdampingan secara alami.

KESIMPULAN

Eksistensi dan kestabilan lokal titik ekuilibrium Sistem (1) diperoleh dengan meninjau beberapa kasus. Kasus-kasus tersebut memberikan adanya dinamika kestabilan titik-titik ekuilibrium yang terjadi pada Sistem (1). Salah satu parameter yang dapat mempengaruhi eksistensi dan kestabilan lokal titik ekuilibrium Sistem (1), yaitu parameter k (kapasitas lingkungan). Jika diketahui $x_3^*, x_4^* > 0$ merupakan solusi konstan Sistem (1) dan $k \in (0, x_3^*]$, maka terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium batas $E_k(k, 0)$ yang stabil. Sedangkan, jika $k \in (x_3^*, x_4^*]$, maka $E_k(k, 0)$ tidak stabil dan $E_3(x_3^*, y_3^*)$ stabil. Selanjutnya, jika $k \in (x_4^*, \infty)$, maka $E_k(k, 0)$ tetap stabil dan $E_4(x_4^*, y_4^*)$ tidak stabil, tetapi kestabilan titik

ekuilibrium $E_3(x_3^*, y_3^*)$ mengalami percabangan. Titik ekuilibrium $E_3(x_3^*, y_3^*)$ dapat stabil atau tidak stabil tergantung pada semua parameter yang terlibat pada Sistem (1).

SARAN

Kajian ini masih dapat terus dikembangkan dengan memperhatikan fakta di lapangan seperti adanya interaksi antara tiga spesies atau lebih dan memperhitungkan waktu tundaan (*time delay*). Fokus pembahasan dalam artikel ini hanya pada pengaruh faktor lingkungan terhadap kestabilan titik ekuilibrium model. Pengaruh parameter anti-pemangsa dan parameter lainnya terhadap kestabilan titik ekuilibrium model dapat dikaji untuk pembahasan selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abrams, P., & Matsuda, H. (1993). Effects of Adaptive Predatory and Anti-predator Behaviour in A Two-prey-one-predator System. *Evolutionary Ecology*, 7(3): 312-326.

Agarwal, M., & Pathak, R. (2013). Persistence and Optimal Harvesting of Prey-predator Model with Holling Type III Functional Response. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 4(3).

Ives, A. R., & Dobson, A. P. (1987). Antipredator Behavior and The Population Dynamics of Simple Predator-prey Systems. *American Naturalist*, 130(3): 431-447.

Křivan, V. (1998). Effects of Optimal Antipredator Behavior of Prey on Predator-prey Dynamics: The Role of Refuges. *Theoretical Population Biology*, 53: 131-142.

Li, C., Zhang, Y., Xu, J., & Zhou, Y. (2019). Global Dynamics of a Prey-Predator Model with Antipredator Behavior and Two Predators. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2019(1): 1-9.

Magurran, A. E. (1990). The Inheritance and Development of Minnow Anti-predator Behaviour. *Animal Behaviour*, 39(5): 834-842.

Moynihan, M. H., & Kruuk, H. (1965). Predators and Anti-Predator Behaviour of the Black-Headed Gull (*Larus ridibundus* L.). *Bird-Banding*, 11.

Olsder, G. J. (1994). *Mathematical System Theory* (vi).

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3th ed.).

- Ramos-Jiliberto, R., Frodden, E., & Aránguiz-Acuña, A. (2007). Pre-encounter Versus Post-encounter Inducible Defenses in Predator-prey Model Systems. *Ecological Modelling*, **200**:99-108.
- Riechert, S. E., & Hedrick, A. V. (1990). Levels of Predation and Genetically Based Anti-predator Behaviour in The Spider, *Agelenopsis Aperta*. *Animal Behaviour*, **40**(4): 679-687.
- Ruan, S., & Xiao, D. (2000). Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **61**(4): 1445-1472.
- Shaikh, A. A., Das, H., & Ali, N. (2018). Study of LG-Holling Type III Predator-prey Model With Disease in Predator. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **58**(1-2): 235-255.
- Srinivasu, P. D. N., & Gayatri, I. L. (2005). Influence of Prey Reserve Capacity on Predator-prey Dynamics. *Ecological Modelling*, **181**:191-202.
- Stanford, C. B. (1995). The Influence of Chimpanzee Predation on Group Size and Anti-predator Behaviour in Red Colobus Monkeys. *Animal Behaviour*, **49**(3): 577-587.
- Tang, B., & Xiao, Y. (2015). Bifurcation Analysis of A Predator-prey Model With Anti-predator Behaviour. *Chaos, Solitons and Fractals*, **70**(1): 58-68.
- Wang, R. W., Yang, C. Y., Zhao, G. F., & Yang, J. X. (2005). Fragmentation Effects on Diversity of Wasp Community and Its Impact on Fig/fig Wasp Interaction in *Ficus Racemosa* L. *Journal of Integrative Plant Biology*, **47**(1): 20-26.
- Zhang, J., & Yang, Y. (2020). Three-prey One-predator Continuous Time Nonlinear System Model. *Complexity*, **2020**(1): 1-11.