

## Analisis Model Penipisan Sumber Daya Hutan Bakau akibat Pembukaan Tambak Ikan dengan Waktu Tunda

### *Analysis of Mangrove Forest Resource Depletion Models due to The Opening of Fish Pond Land with Time Delay*

Ummy Usrotus S. Wakhidah<sup>\*</sup>), Kartika Nugraheni, Winarni  
Program Studi Matematika, Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi,  
Institut Teknologi Kalimantan

<sup>\*</sup>E-mail: ummyusrotussw@gmail.com

#### ABSTRACT

Mangrove forest is an ecosystem with many resources and high biological diversity that contain many species of animal, such as proboscis monkeys. One of the problems that keep happening on mangrove forest is the opening of fish pond. Opening of fish pond can damage mangrove resource by the degradation of the mangrove habitat. This study aims to analyze the depletion stability model of mangrove forest resources with time delay, and to show effect of time delay and the presence of change in the equilibrium point (Hopf bifurcation) on depletion stability model of mangrove forest resources due to fish pond openings. The depletion stability model of mangrove forest resources can be modeled as a system of nonlinear differential equations. In the numerical simulation results, critical value of delay ( $\tau_0$ ) is 7.05 and the transverse conditions are not fulfilled. This mean there is no change in stability and the delay time parameter ( $\tau$ ) does not affect the stability of the system. System will remain stable when the mangrove forests, proboscis monkeys, and fish ponds are in equilibrium. In other words, mangrove forests, proboscis monkeys, and fish ponds can coexist even though time delays, and the analysis using the Hopf bifurcation cannot be carried out.

**Keywords:** Hopf bifurcation, mangrove forest, time delay.

#### PENDAHULUAN

Indonesia merupakan gugusan pulau yang memiliki luas hutan bakau terbesar di dunia (Onrizal, 2010). Hutan bakau didominasi oleh spesies pohon bakau diantaranya tanjung, bogem, bakau dan api-api yang merupakan populasi vegetasi pesisir tropis. Jenis spesies pohon tersebut dimanfaatkan oleh biota laut untuk tumbuh dan berkembang di daerah pasang surut pantai berlumpur. Dilihat dari segi ekosistem akuatik, hutan bakau dikenal sebagai tempat mengasuh dan membesarkan berbagai jenis hewan akuatik seperti kepiting, udang, ikan dan kerang-kerangan (Majid *et al.*, 2016). Selain berfungsi sebagai tempat tumbuh kembang biota laut, hutan bakau juga memiliki peran penting untuk mencegah terjadinya intrusi air laut ke daratan, erosi, dan abrasi pantai yaitu dengan mengendapkan lumpur di akar pohon.

Saat ini keberadaan hutan bakau di Indonesia semakin berkurang. Jumlah luasan hutan bakau dari tahun ke tahun semakin menurun mengindikasikan bahwa terjadi degradasi hutan bakau yang cukup tinggi. Adanya penyusutan luasan hutan bakau salah satunya disebabkan oleh aktivitas konversi hutan bakau menjadi tambak (Riwayati, 2014). Pengembangan budidaya tambak dengan

mengeksploitasi bakau di Indonesia sudah dimulai sejak tahun 1800, dan berdasarkan penelitian Ilman *et al.* (2016) dalam kurun waktu dua dekade kedepan penyebab utama kerusakan ekosistem bakau disebabkan oleh aktivitas konversi hutan bakau menjadi lahan tambak jika dibandingkan dengan aktivitas lainnya seperti pembangunan pesisir, penebangan dan bencana alam.

Kemudian sebagian besar wilayah hutan bakau menjadi habitat salah satu primata yaitu bekantan (Kartono *et al.*, 2008). Bekantan membutuhkan pohon di hutan bakau sebagai sarana pergerakan, pohon tidur, dan sumber pakan. Bagian tumbuhan yang digemari oleh bekantan untuk di konsumsi adalah bagian umbut, pucuk, bunga, buah, daun muda dan batang muda (Syarif & Maulana, 2019). Jenis-jenis tumbuhan yang menjadi konsumsi bekantan di hutan bakau meliputi tumbuhan bakau dan tumbuhan liar. Salah satu jenis pohon bakau yang teridentifikasi sebagai sumber makanan paling umum bagi bekantan ialah *Sonneratia caseolaris* (Noorhidayah, *et al.*, 2007). Berdasarkan penelitian Akbar *et al.* (2002) di Cagar Alam Pulau Kaget bekantan melakukan penggundulan sebagian pucuk dan memakan ranting *S. caseolaris* sehingga mengganggu pertumbuhan anakan bakau.

Secara tidak langsung, keberadaan bekantan dapat menghambat pertumbuhan bakau.

Pengembangan ilmu di bidang matematika turut memberikan peran penting sebagai kajian untuk mencegah masalah penipisan sumber daya hutan bakau. Penelitian terhadap penipisan hutan bakau telah dilakukan oleh Nugraheni *et al.* (2019). Pada tahun 2019, Nugraheni *et al.* membuat model matematis yang diformulasikan untuk memeriksa masalah penipisan sumber daya hutan bakau karena populasi bekantan dan pembukaan lahan untuk tambak ikan di kawasan konservasi. Pada model tersebut penipisan sumber daya hutan bakau bergantung pada waktu sekarang.

Berdasarkan penelitian yang dikemukakan oleh Nugraheni *et al.* (2019) dianggap perlu dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai penipisan sumber daya hutan bakau menggunakan waktu tunda. Waktu tunda ditambahkan untuk menyatakan selang waktu yang dibutuhkan untuk mengkonversi hutan bakau menjadi lahan tambak ikan dari tambak pertama ke tambak kedua, dan seterusnya. Hal ini didasarkan pada proses fenomena lingkungan yang terjadi secara real dalam berbagai permasalahan nyata sering melibatkan waktu tunda. Pada penelitian ini dianalisis kestabilan model penipisan sumber daya hutan bakau akibat pembukaan lahan tambak ikan dengan waktu tunda, serta pengaruh waktu tunda dan keberadaan bifurkasi Hopf terhadap kestabilan model tersebut. Hasil dari analisis kemudian disimulasikan secara numerik untuk memperlihatkan dinamika model yang disajikan dalam bentuk grafik.

## METODE

### Model Matematika

Model matematika dari permasalahan ini melibatkan 3 variabel, yaitu konsentrasi sumber daya hutan bakau ( $M(t)$ ), populasi bekantan ( $N(t)$ ), dan konsentrasi tambak ikan ( $P(t)$ ) yang direkonstruksi dari model Nugraheni *et al.* (2019) dengan menambahkan waktu tunda. Penambahan waktu tunda terdapat pada fungsi konsentrasi lahan tambak ikan persamaan konsentrasi sumber daya hutan bakau ( $M(t)$ ) dan pada fungsi sumber daya hutan bakau persamaan konsentrasi lahan tambak ikan ( $P(t)$ ).

Bakau tumbuh alami tanpa adanya persaingan dinyatakan dengan  $sM$ . Laju pertumbuhan konsentrasi sumber daya hutan bakau akan terbatas oleh luas lahan yang tersedia sehingga kapasitas maksimum habitat hutan bakau dinyatakan dengan  $L$  dan  $b$  merupakan respon konsentrasi bakau terhadap tekanan lingkungan sebagaimana ditunjukkan oleh

rasio  $\frac{M}{L}$ . Hutan bakau dimanfaatkan oleh bekantan sebagai tempat keberlangsungan hidup, sehingga konsentrasi hutan bakau akan berkurang seiring dengan pertumbuhan populasi bekantan yang dinyatakan dengan  $\alpha MN$ . Tingkat penipisan hutan bakau akibat pembukaan tambak ikan dinyatakan dengan  $eM^2P$ .

Pertumbuhan bekantan secara alami dan dapat dipengaruhi oleh eksternal dinyatakan dengan  $rN$ . Laju pertumbuhan konsentrasi bekantan akan terbatas oleh luas lahan yang tersedia sehingga kapasitas maksimum populasi bekantan dinyatakan dengan  $K$  dan  $c$  merupakan respon populasi bekantan terhadap tekanan lingkungan sebagaimana ditunjukkan oleh rasio  $\frac{N}{K}$ . Bertambahnya konsentrasi populasi bekantan disebabkan oleh tingkat pertumbuhan bekantan karena adanya interaksi dengan sumber daya hutan bakau yang dinyatakan dengan  $\beta\alpha MN$ . Berkurangnya konsentrasi populasi bekantan disebabkan oleh tingkat kematian alami bekantan yang dinyatakan dengan  $\mu N$ .

Konsentrasi pembukaan lahan tambak ikan dipengaruhi oleh berkurangnya sumber daya hutan bakau akibat proses penebangan hutan yang dinyatakan sebagai  $\gamma M$ . Konsentrasi lahan tambak ikan dapat berkurang apabila lahan tambak mengalami penurunan kualitas lahan secara alami yang dinyatakan dengan  $dP$ .

Berdasarkan penjelasan tersebut dapat disajikan dalam model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= sM \left(1 - \frac{b}{L}M\right) - \alpha MN - eM^2P(t - \tau), \\ \frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{c}{K}N\right) + \beta\alpha MN - \mu N, \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma M(t - \tau) - dP.\end{aligned}\quad (1)$$

dengan nilai awal  $M(0) \geq 0$ ,  $N(0) \geq 0$ , dan  $P(0) \geq 0$ .

### Waktu Tunda dan Bifurkasi Hopf

Model Persamaan (1) merupakan model persamaan diferensial nonlinier dengan  $\tau > 0$  menyatakan selang waktu yang dibutuhkan untuk mengkonversi hutan bakau menjadi tambak ikan dari tambak pertama ke tambak kedua, dan seterusnya. Secara matematis selang waktu atau penundaan pada konversi hutan bakau disebut sebagai waktu tunda (*time delay*). Pada sistem dinamis, kestabilan sistem dapat dipengaruhi oleh waktu tunda (Montolalu & Mongi, 2017). Titik kesetimbangan yang pada awalnya bersifat stabil lalu diberikan waktu tunda dapat berubah menjadi tidak stabil, begitupun sebaliknya. Perubahan kestabilan dari sistem apabila terjadi di titik kesetimbangan akibat adanya perubahan parameter disebut bifurkasi lokal (Puspita, 2016). Bifurkasi lokal terdiri dari bifurkasi fold dan bifurkasi Hopf. Pada penelitian ini yang dibahas hanya bifurkasi Hopf. Bifurkasi Hopf terjadi jika titik kesetimbangan mempunyai sepasang akar imajiner murni, yaitu  $\lambda(\tau^*) = p(\tau^*) + iq(\tau^*)$  dengan

$p(\tau^*) = 0, q(\tau^*) \neq 0$  dan memenuhi syarat kondisi transversal  $d = \frac{d}{dt} [Re \lambda(\tau^*)] \neq 0$  (Tu, 1994).

**Persamaan Diferensial Waktu Tunda**

Persamaan diferensial tundaan dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau)), \quad (2)$$

dengan

$\dot{x}$  = turunan  $x$  terhadap  $t$ ,

$\tau$  = waktu tunda,  $\tau \leq 0$  (Kuang, 1993).

Roussel (2019) mengatakan variabel yang tertunda ditunjukkan oleh nilai subskrip keterlambatan ( $x_\tau \equiv x(t - \tau)$ ). Analisis kestabilan linear pada persamaan diferensial waktu tunda dengan memisalkan  $\varepsilon x(t)$  merupakan perpindahan dari titik kesetimbangan yang diasumsikan sangat kecil sekali nilainya dalam interval terbuka  $[t_0 - \tau_{max}, \infty)$ , sedemikian sehingga diperoleh

$$x = x^* + \varepsilon x \quad (3)$$

dan

$$\dot{x} = \varepsilon \dot{x} = f(x^* + \varepsilon x, x^* + \varepsilon x_{\tau_1}, \dots, x^* + \varepsilon x_{\tau_n}), \quad (4)$$

masing-masing jumlah  $\varepsilon x, \varepsilon x_{\tau_1}, \dots, \varepsilon x_{\tau_n}$  adalah kecil.

Persamaan diferensial titik kesetimbangan dapat dilinearisasi menggunakan metode deret Taylor biasa

$$\varepsilon \dot{x} \approx J_0 \varepsilon x + J_{\tau_1} \varepsilon x_{\tau_1} + \dots + J_{\tau_n} \varepsilon x_{\tau_n}. \quad (5)$$

Persamaan diferensial waktu tunda linear memiliki solusi eksponensial, dapat ditulis

$$\varepsilon x(t) = A \varepsilon e^{\lambda t}. \quad (6)$$

Kemudian Persamaan (6) disubstitusikan ke Persamaan (5), diperoleh

$$\lambda A = (J_0 + e^{-\lambda \tau_1} J_{\tau_1} + \dots + e^{-\lambda \tau_n} J_{\tau_n}) A. \quad (7)$$

Oleh karena  $A \neq 0$ , maka diperoleh

$$|J_0 + e^{-\lambda \tau_1} J_{\tau_1} + \dots + e^{-\lambda \tau_n} J_{\tau_n} - \lambda I| = 0, \quad (8)$$

dengan

$J_0, J_{\tau_1}, \dots, J_{\tau_n}$  = matriks  $n \times n$ ,

$A$  = parameter,

$\lambda$  = akar imajiner murni,

$I$  = matriks identitas.

Persamaan (8) disebut persamaan karakteristik titik kesetimbangan.

**Eksistensi Nilai Waktu Tunda Kritis**

Forde & Nelson (2004) mengatakan titik kesetimbangan akan bersifat stabil ketika akar dari persamaan karakteristik memiliki bagian real yang bernilai negatif pada saat waktu tunda tidak ada ( $\tau = 0$ ). Namun, saat  $\tau \neq 0$  akar karakteristik akan mengalami perubahan kestabilan. Terdapat nilai kritis tundaan di mana perubahan kestabilan terjadi ketika Persamaan (9) memiliki akar imajiner murni.

$$G(\lambda, \tau) \equiv G_1(\lambda) + G_2(\lambda)e^{-\lambda \tau} = 0, \quad (9)$$

dengan

$G_1$  dan  $G_2$  = polinomial dalam  $\lambda$ ,

$\tau$  = panjang waktu tunda diskrit.

Misalkan akar Persamaan (9) adalah  $\lambda = i\omega, \omega > 0, \omega \in \mathbb{R}$ , sehingga Persamaan (9) menjadi

$$G_1(i\omega) + G_2(i\omega)e^{-i\omega \tau} = 0, \quad (10)$$

jika bagian polinomial dipisahkan menjadi bagian real dan imajiner, dan suku eksponensial diubah dalam bentuk trigonometri diperoleh

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos(\omega \tau) - i \sin(\omega \tau)) = 0, \quad (11)$$

karena murni imajiner,  $R_1$  dan  $R_2$  adalah polinomial genap dari  $\omega$ .  $Q_1$  dan  $Q_2$  adalah polinomial ganjil. Agar Persamaan (11) terpenuhi, maka kedua bagian real dan imajiner harus sama dengan nol, diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(\omega) &= R_2(\omega) \cos(\omega \tau) + Q_2(\omega) \sin(\omega \tau) = 0, \\ Q_1(\omega) &= R_2(\omega) \sin(\omega \tau) - Q_2(\omega) \cos(\omega \tau) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Persamaan (12) dikuadratkan dan dijumlahkan sehingga diperoleh

$$R_1(\omega)^2 + Q_1(\omega)^2 = R_2(\omega)^2 + Q_2(\omega)^2, \quad (13)$$

dari Persamaan (13) dapat dilihat dua hal. Pertama, bentuk trigonometri menghilangkan dan waktu tunda  $\tau$  telah dieliminasi. Kedua, Persamaan (13) ini sama dengan polinomial berderajat dua.

Misalkan ditemukan  $\omega^*$  memenuhi Persamaan (13) serta Persamaan (12) dikali dengan  $\frac{1}{\cos \omega^* \tau}$  dan diubah ke dalam bentuk sudut  $sec$  sehingga diperoleh

$$sec \omega^* \tau = \frac{R_2(\omega^*) + Q_2(\omega^*) \tan \omega^* \tau}{-R_1(\omega^*)}, \quad (14a)$$

$$sec \omega^* \tau = \frac{R_2(\omega^*) \tan \omega^* \tau - Q_2(\omega^*)}{Q_1(\omega^*)}. \quad (14b)$$

Persamaan (14a) disubstitusikan ke Persamaan (14b) diperoleh

$$\tau_n^* = \frac{1}{\omega^*} \arctan \left\{ \frac{Q_2(\omega^*)R_1(\omega^*) - R_2(\omega^*)Q_1(\omega^*)}{Q_1(\omega^*)Q_2(\omega^*) + R_1(\omega^*)R_2(\omega^*)} \right\} + \frac{2n\pi}{\omega^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Hasil pada Persamaan (15) menunjukkan terdapat tak hingga  $\tau_n^*$  yang memenuhi Persamaan (9). Oleh karena itu, pilih  $n = 0$  agar efektif. Jadi nilai  $\tau_n^* = \tau_0$  yang merupakan titik kritis.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Penentuan Titik Kesetimbangan Model tanpa Waktu Tunda**

Titik kesetimbangan dari model Persamaan (1) dilambangkan dengan  $E_i$ . Titik kesetimbangan diperoleh pada saat kondisi berikut

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dN}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0,$$

dan ditentukan saat  $\tau = 0$  atau saat model tanpa waktu tunda, sehingga Persamaan (1) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= sM \left( 1 - \frac{b}{L} M \right) - \alpha MN - eM^2 P(t - \tau) = 0, \\ \frac{dN}{dt} &= rN \left( 1 - \frac{c}{K} N \right) + \beta \alpha MN - \mu N = 0, \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma M(t - \tau) - dP = 0, \end{aligned}$$

dengan menggunakan perhitungan aljabar diperoleh enam titik kesetimbangan, yaitu

- $E_1(0,0,0)$ ,

- $E_2 \left( 0, \frac{K}{rc}(r - \mu), 0 \right)$ ,
- $E_{3,4} \left( M_{1,2}^*, 0, \frac{\gamma}{d} M_{1,2}^* \right)$ ,
- $E_{5,6} \left( M_{3,4}^*, \frac{K}{rc} (\beta \alpha M_{3,4}^* - \mu + r), \frac{\gamma}{d} M_{3,4}^* \right)$ ,

$$M_{1,2}^* = -\frac{d}{2e\gamma} \left( \frac{b}{L}s \pm \sqrt{\left(\frac{b}{L}s\right)^2 + 4e\frac{\gamma}{d}s} \right),$$

$$M_{3,4}^* = -\frac{d}{2e\gamma} \left( \frac{b}{L}s + \beta \alpha^2 \frac{K}{rc} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{L}s + \beta \alpha^2 \frac{K}{rc}\right)^2 + 4e\frac{\gamma}{d}\left(s + (\mu - r)\alpha \frac{K}{rc}\right)} \right)$$

(Nugraheni *et al.*, 2019).

$$\begin{bmatrix} \bar{M}'(t) \\ \bar{N}'(t) \\ \bar{P}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{b}{L}SM^* + S - \alpha N^* - 2eM^*P^* & -\alpha M^* & 0 \\ \beta \alpha N^* & -2\frac{c}{K}rN^* + r + \beta \alpha M^* - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \\ \bar{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -eM^*M^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_\tau \\ \bar{N}_\tau \\ \bar{P}_\tau \end{bmatrix},$$

Setelah dilakukan linearisasi, diperoleh persamaan

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} = A_2\vec{U}(t) + B_2\vec{U}(t - \tau). \quad (17)$$

dengan

$$\vec{U}(t) = \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \\ P(t) \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entri-entri dari  $A_2$  dan  $B_2$  adalah

$$a_{11} = -2\frac{b}{L}SM^* + s - \alpha N^* - 2eM^*P^*,$$

$$a_{21} = \beta \alpha N^*,$$

$$a_{12} = -\alpha M^*,$$

$$a_{22} = -2\frac{c}{K}rN^* + r + \beta \alpha M^* - \mu,$$

$$a_{33} = -d,$$

$$b_{13} = -eM^*M^*, \text{ dan}$$

$$b_{31} = \gamma.$$

Kemudian dari Persamaan (17) diperoleh penurunan persamaan karakteristik model waktu tunda dengan memisalkan  $\vec{U}(t) = \vec{C}e^{\lambda t}$  yaitu  $\det(A_2 + B_2e^{-\lambda\tau} - \lambda I) = 0$ , sehingga akar persamaan karakteristik tundaan dari model Persamaan (1) ialah

$$\begin{aligned} G(\lambda, \tau) &= \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \\ &\quad + (a_4\lambda + a_5)(e^{-\tau\lambda})^2, \\ 0 &= \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \\ &\quad + (a_4\lambda + a_5)(e^{-\tau\lambda})^2, \end{aligned} \quad (18)$$

### Analisis Kestabilan Model dengan Waktu Tunda

Analisis kestabilan dilakukan dengan pendekatan linear pada persamaan diferensial waktu tunda dengan memisalkan  $\varepsilon\bar{M}(t)$ ,  $\varepsilon\bar{N}(t)$ , dan  $\varepsilon\bar{P}(t)$  merupakan perpindahan dari titik kesetimbangan yang diasumsikan sangat kecil sekali nilainya, sedemikian sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} M(t) &= M^* + \varepsilon\bar{M}(t), \\ N(t) &= N^* + \varepsilon\bar{N}(t), \\ P(t) &= P^* + \varepsilon\bar{P}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Persamaan (16) disubstitusikan ke dalam Persamaan (1) diperoleh persamaan linear sebagai berikut.

dengan

$$a_1 = -a_{11} - a_{22} - a_{33},$$

$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21},$$

$$a_3 = -a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$a_4 = b_{13}b_{31}, \text{ dan}$$

$$a_5 = -a_{22}b_{13}b_{31}.$$

### Penentuan Nilai Kritis Tundaan

Kriteria perubahan kestabilan pada Persamaan (18) diperoleh dengan memisalkan  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , sehingga Persamaan (18) menjadi

$$\begin{aligned} -i\omega^3 - a_1\omega^2 + a_2i\omega + a_3 \\ + a_4i\omega \cos 2\omega\tau + a_4\omega \sin 2\omega\tau \\ + a_5 \cos 2\omega\tau - a_5 i \sin 2\omega\tau = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

dengan  $e^{-i2\omega\tau} = \cos 2\omega\tau - i \sin 2\omega\tau$ . Agar Persamaan (19) bernilai nol, maka bagian real dan bagian imajiner harus bernilai nol yang dikerjakan secara terpisah, diperoleh

$$\begin{aligned} a_1\omega^2 - a_3 &= a_5 \cos 2\omega\tau + a_4\omega \sin 2\omega\tau, \\ -\omega^3 + a_2\omega &= a_5 \sin 2\omega\tau - a_4\omega \cos 2\omega\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Mengeliminasi  $\tau$  dilakukan dengan mengkuadratkan Persamaan (20), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_1^2\omega^4 - 2a_1a_3\omega^2 &= a_5 \cos^2 2\omega\tau \\ + a_3^2 &\quad + 2a_4a_5\omega (\cos 2\omega\tau) \\ &\quad (\sin 2\omega\tau) + a_4^2\omega^2 \sin^2 2\omega\tau, \\ \omega^6 - 2a_2\omega^4 &= a_5^2 \sin^2 2\omega\tau \\ + a_2^2\omega^2 &\quad - 2a_4a_5\omega (\cos 2\omega\tau) \end{aligned}$$

$$(\sin 2\omega\tau) + a_4^2 \omega^2 \cos^2 2\omega\tau.$$

Selanjutnya kedua persamaan tersebut dijumlahkan dan karena  $\cos^2 2\omega\tau + \sin^2 2\omega\tau = 1$ , diperoleh polinomial berderajat enam

$$\omega^6 + d_1\omega^4 + d_2\omega^2 + d_3 = 0, \quad (21)$$

dengan

$$d_1 = a_1^2 - 2a_2, \\ d_2 = -2a_1a_3 + a_2^2 - a_4^2, \\ d_3 = a_3^2 - a_5^2.$$

Kemudian dimisalkan  $v = \omega^2$  untuk memudahkan proses perhitungan, sehingga Persamaan (21) menjadi  $h(v) = v^3 + d_1v^2 + d_2v + d_3$ . Nilai akar dari Persamaan (21) dapat diketahui dengan menggunakan lemma yang diberikan oleh Ruan dan Wei sebagai berikut:

$$\tau_k^* = \frac{1}{2\omega_0} \arctan \left\{ \frac{-(a_1a_4 + a_5)\omega_0^3 + (a_3a_4 - a_2a_5)}{a_4\omega_0^4 + (a_2a_4 - a_1a_5)\omega_0^2 + a_3a_5} \right\} + \frac{k\pi}{\omega_0}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dipilih  $\tau_0$  merupakan nilai terkecil dari tak terhingga  $\tau_k^*$  sebagai nilai kritis tundaan yang dinyatakan dalam bentuk

$$\tau_0 = \frac{1}{2\omega_0} \arctan \left\{ \frac{-(a_1a_4 + a_5)\omega_0^3 + (a_3a_4 - a_2a_5)}{a_4\omega_0^4 + (a_2a_4 - a_1a_5)\omega_0^2 + a_3a_5} \right\}. \quad (22)$$

**Kondisi Transversal**

Pada saat kritis tundaan  $\tau_0$ , persamaan karakteristik (21) memiliki sepasang akar imajiner, maka memungkinkan terjadinya bifurkasi atau perubahan struktur orbit. Syarat terjadinya bifurkasi Hopf adalah memenuhi kondisi transversal dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{d}{d\tau} Re(\lambda(\tau))|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0} \neq 0.$$

Menurut Forde dan Nelson (2004) kondisi tersebut terpenuhi jika dan hanya jika

$$R_1(v^*)R_1'(v^*) + Q_1(v^*)Q_1'(v^*) \neq R_2(v^*)R_2'(v^*) + Q_2(v^*)Q_2'(v^*). \quad (23)$$

Misalkan  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$  sebagai akar Persamaan (18) yang memenuhi  $\alpha(\tau_0) = 0$  dan  $v^* = \omega(\tau_0) = \omega_0$ , dari Persamaan (20) diperoleh

$$R_1(\omega) = -a_1\omega^2 + a_3, \\ R_2(\omega) = a_5, \\ Q_1(\omega) = \omega^3 + a_2\omega, \\ Q_2(\omega) = a_4\omega. \quad (24)$$

Kemudian Persamaan (24) diturunkan terhadap  $\omega$ , sehingga diperoleh

$$R_1'(\omega) = -2a_1\omega, \\ R_2'(\omega) = 0, \\ Q_1'(\omega) = 3\omega^2 + a_2, \quad (25)$$

**Lemma 1**

Misalkan  $\Delta = d_1^2 - 3d_2$ ,

- a) Jika  $d_3 < 0$ , maka Persamaan  $h(v)$  paling sedikit memiliki satu akar yang bernilai positif.
- b) Jika  $d_3 \geq 0$  dan  $\Delta < 0$ , maka Persamaan  $h(v)$  tidak memiliki akar yang bernilai positif.
- c) Jika  $d_3 \geq 0$  dan  $\Delta \geq 0$ , maka Persamaan  $h(v)$  memiliki akar-akar yang bernilai positif jika dan hanya jika  $v_1 = \frac{1}{3}(-d_1 + \sqrt{\Delta}) > 0$  dan  $h(v_1) \leq 0$ .

Persamaan (21) memiliki akar imajiner murni  $i\omega$ , sehingga dengan mensubstitusikan  $\omega$  ke Persamaan (21) diperoleh nilai tundaan kritis.

$$Q_2'(\omega) = a_4.$$

Selanjutnya Persamaan (25) disubstitusikan ke Persamaan (23), diperoleh

$$R_1(\omega)R_1'(\omega) + Q_1(\omega)Q_1'(\omega) \neq R_2(\omega)R_2'(\omega) + Q_2(\omega)Q_2'(\omega) \\ 3\omega^5 + (2a_1^2 + 4a_2)\omega^3 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega \neq a_4^2\omega. \quad (26)$$

Jika Persamaan (26) terpenuhi maka Persamaan Karakteristik (18) memenuhi kondisi transversal. Terpenuhinya kondisi transversal mengakibatkan terjadinya perubahan kestabilan titik kesetimbangan, yaitu stabil asimtotik saat  $\tau < \tau_0$  dan tidak stabil saat  $\tau > \tau_0$ , atau sebaliknya dengan nilai  $Re(\lambda) \neq 0$ .

**Simulasi Numerik**

Pada tahapan ini diberikan beberapa simulasi numerik yang bersesuaian dengan hasil analisis yang dipaparkan sebelumnya. Simulasi numerik dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter asumsi  $b = 0,3$ ;  $L = 90$ ;  $\alpha = 0,11$ ;  $e = 0,1$ ;  $K = 50$ ;  $\mu = 0,44$ ;  $\gamma = 0,36$  dan menganut nilai parameter milik Nugraheni *et al.* (2019) yaitu  $s = 0,8$ ;  $r = 0,3$ ;  $c = 0,1$ ;  $\beta = 0,4$ ;  $d = 0,5$ . Nilai parameter yang dipilih memenuhi salah satu syarat

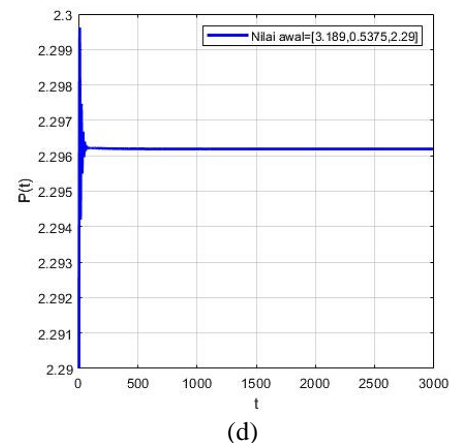
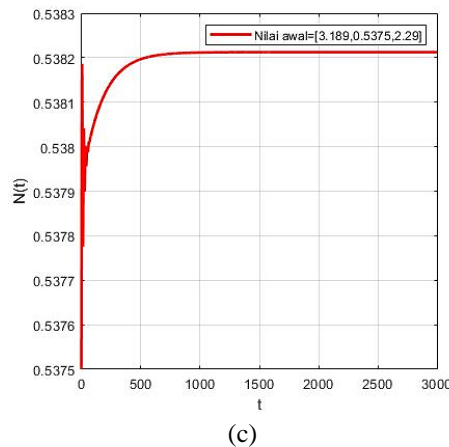
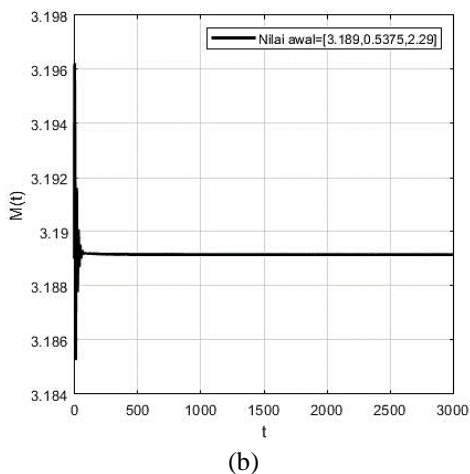
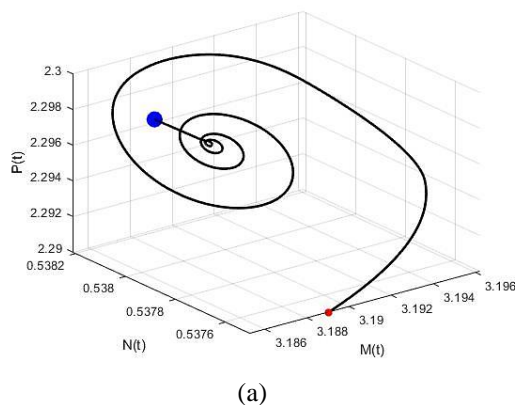
terjadinya bifurkasi Hopf, yaitu memiliki akar imajiner murni pada Lemma 1 poin (c) untuk titik kesetimbangan  $E_6$ , dengan nilai  $d_1 = 0,7822$ ;  $d_2 = -0,0009$ ;  $d_3 = 0,000018$ ;  $\Delta = 0,614$ ; dan  $h(v_1) = 0$ ; sehingga diperoleh  $\omega_0 = 0,0246$ . Namun, saat parameter disubstitusikan ke Persamaan (26) nilai parameter tersebut tidak memenuhi kondisi transversal

$$\begin{aligned} & 3\omega_0^5 \\ & + (2a_1^2 + 4a_2)\omega_0^3 \neq a_4^2\omega = 0.0033. \\ & + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_0 = 0.0033 \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai parameter disubstitusi ke Persamaan (22) diperoleh nilai kritis tundaan terkecil  $\tau_0 = 7,05$ . Untuk mengamati bifurkasi Hopf akibat variasi nilai parameter  $\tau$ , dilakukan pengamatan dengan menggunakan nilai awal (3,189; 0,5375; 2,29).

- $\tau < \tau_0$

Simulasi model dengan waktu tunda  $\tau < \tau_0$  ditunjukkan dengan memilih nilai  $\tau = 2$ .

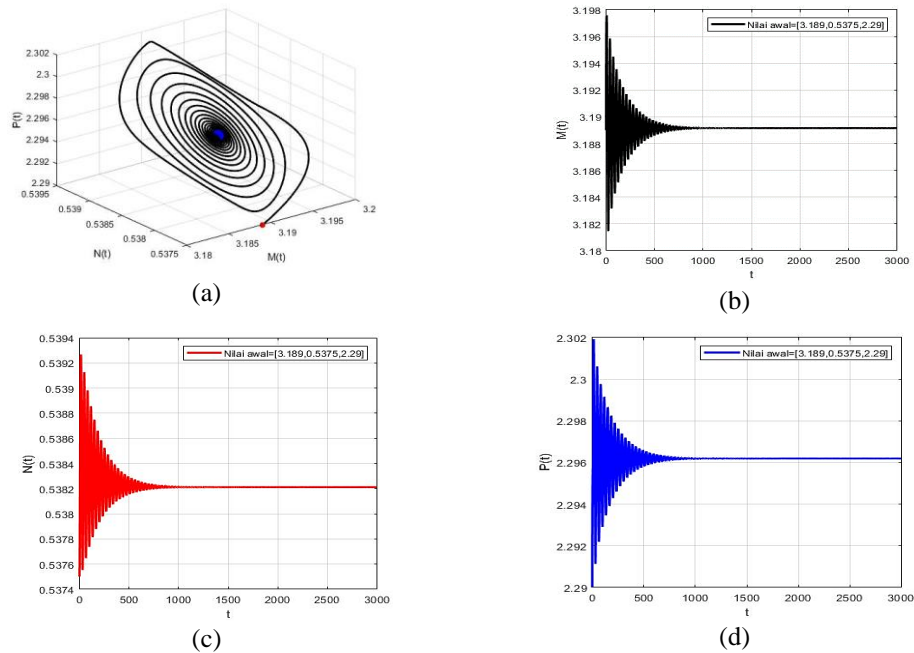


Gambar 1. Solusi sistem untuk  $\tau = 2$ , (a) pertumbuhan bakau, bekantan, dan tambak ikan, (b) pertumbuhan bakau, (c) pertumbuhan bekantan, (d) pertumbuhan tambak ikan

Pada Gambar 1 (a) titik berwarna merah merupakan nilai awal yang bergerak ke arah dalam, yaitu menuju kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_6(3,1892; 0,5382; 2,2962)$  dan orbit periodiknya stabil asimtotik. Kemudian pada bidang solusi (b), (c), dan (d) tingkat pertumbuhan konsentrasi hutan bakau, bekantan, dan tambak ikan beresilasi diawal dan semakin lama simpangannya semakin kecil hingga mencapai kondisi setimbang. Dengan demikian, sistem dengan nilai parameter  $\tau < \tau_0$  bersifat stabil asimtotik pada titik kestabilan  $E_6$ .

- $\tau = \tau_0$

Simulasi model ditunjukkan dengan memilih nilai  $\tau = 7,05$ . Nilai tersebut merupakan nilai yang sama dengan  $\tau_0 = 7,05$ .



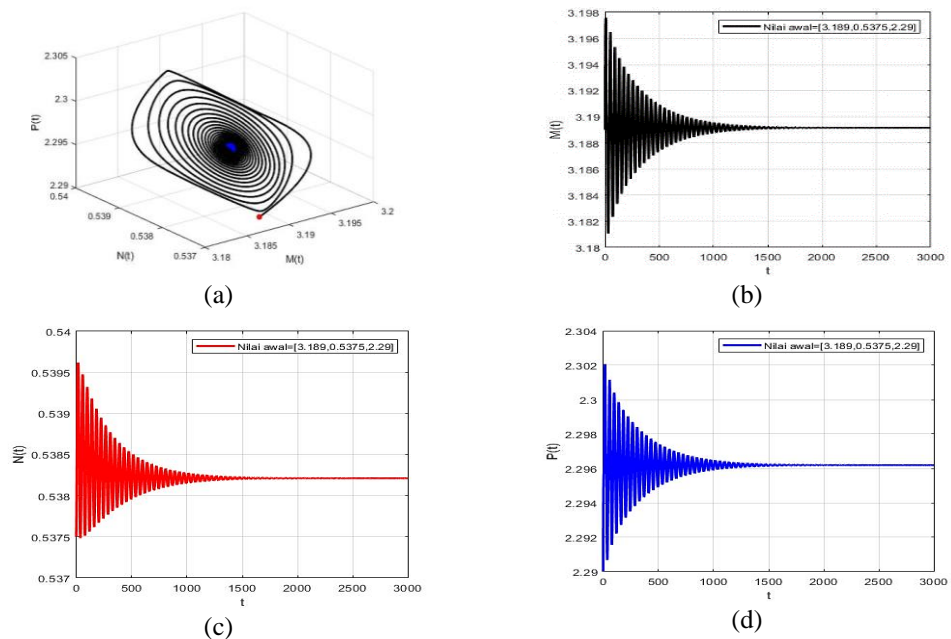
Gambar 2. Solusi sistem untuk  $\tau = 7,05$ , (a) pertumbuhan bakau, bekantan, dan tambak ikan, (b) pertumbuhan bakau, (c) pertumbuhan bekantan, (d) pertumbuhan tambak ikan

Pada Gambar 2 (a), titik berwarna merah merupakan nilai awal yang bergerak ke arah dalam, yaitu menuju kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_6(3,1892; 0,5382; 2,2962)$  dan orbit periodiknya stabil asimtotik. Kemudian pada bidang solusi (b), (c), dan (d) tingkat pertumbuhan konsentrasi hutan bakau, bekantan, dan tambak ikan beresilasi diawal dan

semakin lama simpangannya semakin kecil hingga mencapai kondisi setimbang. Dengan demikian, sistem dengan nilai parameter  $\tau = \tau_0$  bersifat stabil asimtotik pada titik kestabilan  $E_6$ .

- $\tau > \tau_0$

Simulasi model dengan waktu tunda  $\tau > \tau_0$  ditunjukkan dengan memilih nilai  $\tau = 9$ .



Gambar 3. Solusi sistem untuk  $\tau = 9$ , (a) pertumbuhan bakau, bekantan, dan tambak ikan, (b) pertumbuhan bakau, (c) pertumbuhan bekantan, (d) pertumbuhan tambak ikan

Pada Gambar 3 (a), titik berwarna merah merupakan nilai awal yang bergerak ke arah dalam, yaitu menuju kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_6(3,1892; 0,5382; 2,2962)$  dan orbit periodiknya stabil asimtotik. Kemudian pada bidang solusi (b), (c), dan (d) tingkat pertumbuhan konsentrasi hutan bakau, bekantan, dan tambak ikan beresilasi diawal dan semakin lama simpangannya semakin kecil hingga mencapai kondisi setimbang. Dengan demikian, sistem dengan nilai parameter  $\tau > \tau_0$  bersifat stabil asimtotik pada titik kestabilan  $E_6$ .

Dalam penelitian ini, berdasarkan hasil analisis kondisi transversal tidak terpenuhi, sehingga tidak terjadi perubahan kestabilan. Hasil simulasi menunjukkan waktu tunda tidak berpengaruh pada sistem di sekitar titik kesetimbangan  $E_6$ . Hal tersebut mengindikasikan bahwa berbagai macam perubahan nilai waktu tunda yang disubstitusikan ke dalam model tidak akan mempengaruhi kestabilan sistem. Analisis menggunakan teori bifurkasi Hopf tidak bisa dilakukan karena tidak terjadi bifurkasi.

### KESIMPULAN

Perubahan kestabilan tidak terjadi di sistem oleh karena nilai kritis tundaan ( $\tau_0$ ) adalah 7,05 serta kondisi transversal tidak terpenuhi.

Parameter waktu tunda ( $\tau$ ) tidak berpengaruh terhadap kestabilan sistem, sistem akan tetap bersifat stabil pada saat konsentrasi dalam keadaan setimbang. Dengan kata lain, jika waktu tunda diasumsikan terjadi pada pembukaan lahan tambak ikan, ketiga konsentrasi bisa hidup secara berdampingan. Dengan demikian, tidak terjadi bifurkasi Hopf pada model yang digunakan dalam penelitian ini meskipun diperhitungkan adanya selang waktu yang dibutuhkan untuk membuka lahan tambak ikan, sehingga analisis menggunakan bifurkasi Hopf tidak bisa dilakukan.

### DAFTAR PUSTAKA

- Akbar A, Priyatno E, Basaing HA, Manaon & Rizani F. 2002. *Pengaruh Pemagaran Terhadap Pertumbuhan Awal Permudaan Rambai (Sonneratia caesolaris (L.) Engl.) di Cagar Alam Pulau Kaget*. Buletin Teknologi Reboisasi 9: 42-53. Yogyakarta: Pusat Penelitian dan Pengembangan Bioteknologi dan Pemuliaan Tanaman Hutan.
- Forde J & Nelson P. 2004. Applications of Sturm Sequences to Bifurcation Analysis of Delay Differential Equation Models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **300**(2): 273-284.
- Ilman M, Dargusch P, Dart P & Onrizal. 2016. A Historical Analysis of The Drivers Ofloss and Degradation of Indonesia's Mangroves. *Land Use Policy*. **54**(1):448-459
- Kartono AP, Ginting A & Santoso N. 2008. Karakteristik Habitat dan Wilayah Jelajah Bekantan di Hutan Mangrove Desa Nipah Panjang Kecamatan Batu Ampar Kabupaten Kubu Raya Provinsi Kalimantan Barat. *Media Konservasi*. **13**(3): 1-6.
- Kuang Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Boston: Academic Press.
- Majid I, Muhdar MHIA, Rohman F & Syamsuri I. 2016. Konservasi Hutan Mangrove di Pesisir Pantai kota Ternate Terintegrasi dengan Kurikulum Sekolah. *Jurnal Bioedukasi*. **4**(2): 488-496.
- Montolalu CEJC & Mongi CE. 2017. Analisis Bifurkasi Hopf Dan Kestabilan Model Dinamik Transmisi Virus Dengue Dengan Waktu Tunda Dalam Pengaruhnya Terhadap Kemunculan Penyakit Demam Berdarah Dengue. *d'Cartesian: Jurnal Matematika dan Aplikasi*. **6**(2): 86-95.
- Noorhidayah, Sidiyasa K & Ma'ruf A. 2007. Struktur dan Komposisi Vegetasi Habitat Bekantan (Nasalis Larvatus Wurmb.) Pada Hutan Mangrove di Bagian Hilir Sungai Wain Kalimantan Timur. *Jurnal Penelitian Hutan dan Konservasi Alam*. **4**(2):107-116.
- Nugraheni K, Burhan MJI, Pancahayani S & Azka M. 2019. Stability Analysis of Mangrove Forest Resource Depletion Models Due to The Opening of Fish Pond Land. *Journal of Physics: Conference Series*. **1277**(1): 1-8.
- Onrizal. 2010. Perubahan Tutupan Hutan Mangrove di Pantai Timur Sumatera Utara Periode 1977-2006. *Jurnal Biologi Indonesia*. **6**(2): 163-172.
- Puspita M. 2016. Bentuk Normal Bifurkasi Hopf Pada Sistem Umum Dua Dimensi. *Jurnal Matematika UNAND*. **5**(3): 15-23.
- Riwayati. 2014. Manfaat dan Fungsi Hutan Mangrove Bagi Kehidupan. *Jurnal Keluarga Sehat Sejahtera*. **12**(2): 17-23.
- Roussel MR. 2019. *Nonlinear Dynamics A Hands-On Introductory Survey*. Amerika: Morgan & Claypool.
- Ruan S & Wei J. 2001. On The Zeros of A Third



Degree Exponential Polynomial With Applications to A Delayed Model For The Control of Testosterone Secretion. *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*. **18**(1): 41-52.

Syarif A & Maulana F. 2019. Keanekaragaman Jenis Tumbuhan Sebagai Alternatif Konsumsi Bekantan (*Nasalis Larvatus*) di Desa Lawahan Kabupaten Tapin. *Jurnal Pendidikan Hayati*. **5**(4): 180-186.

