Dekomposisi C_3 Ajaib pada Graf Persahabatan dengan Orde Ganjil

A Magic C_3 Decomposition on Friendship Graph with Odd Order

Indah Chairun Nisa[1], Sigit Pancahayani[2*)], Annisa Rahmita Soemarsono[1]
[1]*Program Studi Matematika, Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan*
[2]*Program Studi Statistika, Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan*
[*]E-mail: spancahayani@lecturer.itk.ac.id

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ is graph with a non-empty set V containing vertices and a set of edges E. Also note that if $H = \{H_i \,\square\, G_i = 1,2,3, \ldots, n\}$ is a collection of subgraphs from G with $H_i \,\square\, H_j, i \neq j$. If $H_i \cap H_j = \square$ and $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = G$, then graph G admits a decomposition H. Furthermore, in this paper we define a new concept of labeling, that is tiered labeling f which labels V or E to a label set containing arithmetic sequences with the smallest element a and difference d. If $f(v)$ and $g(e)$ are respectively vertices and edges labeling at G and the total weight of each subgraph $H_i, i = 1,2,3, \ldots, n$ has the same value, namely $\sum_{v \square V(H_i)} f(v) + \sum_{e \square E(H_i)} g(e) = c$, then the graph G contains a magic H decomposition with c as the magic constant. This research shows that using total tiered labeling, the friendship graph F_n with $n = 2k + 1$ for $k \,\square\, N$ admits a magic C_3 decomposition with a magic constant $c = 29d \;\; + 6a + 15d$.

Keywords: cyclic, friendship graph, arithmetic labeling, magic decomposition.

PENDAHULUAN

Berbagai permasalahan di dunia nyata dapat diselesaikan menggunakan perhitungan matematis. Salah satu cabang ilmu yang dapat digunakan yaitu teori graf. Contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan graf yaitu susunan pegawai dalam suatu perusahaan. Misalkan dalam suatu perusahaan terdapat sejumlah divisi yang di dalamnya mencakup berbagai pegawai. Jika setiap pekerjaan diberi bobot kerja dan perusahaan mengharapkan bobot kerja setiap divisi seimbang, maka hal ini dapat diselesaikan menggunakan dekomposisi ajaib graf dengan memodelkan susunan pegawai beserta bobotnya ke dalam suatu graf. Pada permasalahan ini, divisi berperan sebagai subgraf yang di dalamnya terdapat pegawai dengan masing-masing bobot kerja yang berbeda. Pada permasalahan tersebut juga diberikan label pada setiap titik dan sisinya.

Misalkan $G=(V,E)$ adalah suatu graf berhingga dengan V (atau $V(G)$) sebagai himpunan titik yang tak kosong dan E (atau $E(G)$) adalah himpunan sisi yang dibentuk dari sepasangan titik berbeda di G (Chartrand & Zhang, 2005). Selanjutnya, H dikatakan subgraf dari graf G jika setiap titik dalam H merupakan titik dari G dan setiap sisi di H merupakan sisi dari G (Wilson, 1990). H yang merupakan subgraf dari G dapat dinotasikan sebagai $H \square G$. Subgraf H dikatakan subgraf pembentang dari graf G jika $(H) = (G)$ (Gross & Yellen, 2006).

Selanjutnya, misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong, dan f adalah fungsi yang memetakan setiap elemen di A ke tepat satu elemen di B. Notasi fungsi ini dituliskan sebagai $f{:}A \rightarrow B$ yang merupakan relasi dari A ke B. Hasil peta dari $a \square A$ oleh f ke $b \,\square\, B$ dinotasikan $(a)=b$ (Bartle & Donald, 2011). Lebih jauh, f dikatakan sebagai fungsi pada (surjektif) jika dan hanya jika setiap $b \,\square\, B$ terdapat $a \,\square\, A$ sehingga $(a) = b$. Pada fungsi pada, elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih himpunan A. Kemudian, suatu fungsi f dikatakan satu-satu (injektif) jika dan hanya jika $(a_1) = (a_2)$ mengakibatkan $a_1 = a_2$ untuk setiap a_1, $a_2 \square A$. Dengan kata lain, pada fungsi satu-satu, setiap elemen di himpunan A tidak memiliki bayangan yang sama di B. Selebihnya, jika suatu fungsi bersifat satu-satu dan pada, maka disebut sebagai fungsi bijektif (Rosen, 2012).

Pada teori graf, terdapat pelabelan yang merupakan proses pemberian label atau nilai pada sisi dan/atau titik. Dengan kata lain, pelabelan adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan titik dan/atau sisi ke suatu himpunan nilai, biasanya berupa himpunan bilangan asli. Pelabelan yang memetakan titik dinamakan pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan pelabelan yang memetakan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika pelabelan memetakan keduanya, yaitu titik dan sisi maka pelabelan tersebut merupakan pelabelan total (*total labeling*) (Baca & Miller, 2008).

Kajian pelabelan pada graf telah banyak berkembang menjadi berbagai jenis di antaranya adalah pelabelan total titik ajaib, sebut f_1, yaitu jika pelabelan tersebut merupakan pemetaan bijektif $f_1: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3,\dots,|V(G)| + |E(G)|\}$ sedemikian hingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ berlaku $f_1(v) + \sum f_1(u\ ) = c$ dengan u merupakan titik tetangga dari titik v dan c adalah konstanta ajaib. Di sisi lain dikatakan pelabelan total titik anti-ajaib, sebut f_2, pada graf G jika pemetaan bijektif $f_2: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3,\dots,|V(G)| + |E(G)|\}$ menghasilkan barisan bobot titik $w = f_2(v) + \sum f_2(u)$ yang semuanya berbeda. Kedua pelabelan f_1 dan f_2 disebut pelabelan titik ajaib super dan pelabelan titik anti ajaib super di G jika seluruh titik menerima label terkecil, yaitu $\{1,2,3,\dots,|V(G|\}$ (Baca & Miller, 2008).

Pelabelan juga berlaku pada subgraf-subgraf dari suatu graf yang dinamakan dekomposisi graf. Dekomposisi graf merupakan salah satu topik perluasan dari tema pelabelan. Dekomposisi dari suatu graf G merupakan himpunan $\mathcal{H} = \{H_i, i = 1,2,3,\dots,n\}$ yang merupakan koleksi subgraf dari G dengan $H_i \subseteq H_j, \forall i \neq j$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = G$. Dalam hal ini, maka graf G memuat suatu dekomposisi H (Rahmawati, 2014). Selanjutnya, jika terdapat $f(v)$ dan $g(e)$ yang merupakan dua buah pelabelan titik dan sisi pada G dan total bobot dari masing-masing subgraf H_i bernilai sama, yaitu $\sum_{v \in V(H_i)} f(v) + \sum_{e \in E(H_i)} g(e) = k$, maka graf G memuat dekomposisi H ajaib dengan c sebagai konstanta ajaib (Chartrand & Lesniak, 1996).

Beberapa penelitian sebelumnya telah banyak mengangkat topik penelitian mengenai dekomposisi graf. Contoh penelitian sebelumnya, yaitu pelabelan total titik ajaib pada Graf Peterson yang diperumum (Simangunsong, 2015), dekomposisi H super (anti) ajaib dari graf Antiprisma (Hendy, 2016), dekomposisi super ajaib berbentuk lintasan dari amalgamasi graf siklus oleh Pancahayani (2017) dan graf hasil kali leksikografik (Hendy *et al*, 2018). Selain itu, telah dikaji pula dekomposisi (a, d) antiajaib berbentuk P_4 pada Graf Generalized Peterson $G\ (n, 3)$ (Masyitoh, 2019) dan. dekomposisi H anti ajaib dari grid toroidal and triangulasinya (Hendy *et al*, 2020).

Selanjutnya, graf dibagi menjadi beberapa jenis (kategori) sesuai dengan jenis pengelompokannya. Pengelompokan graf terbagi berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang, berdasarkan jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah sisi (Munir, 2014). Salah satu jenis graf, yaitu graf persahabatan. Graf persahabatan (F_n) merupakan graf tak berarah dengan titik sebanyak $2n + 1$ dan sisi sebanyak $3n$. Graf persahabatan F_n dapat dibentuk dengan menggabungkan n buah graf siklik (C_n) pada sebuah titik tetap (Darmaji, 2011). Saat ini, graf persahabatan merupakan graf yang masih jarang dikaji sehingga pada penelitian ini dikaji bagaimana membangun dekomposisi C_3 ajaib pada graf persahabatan.

METODE

Dalam menentukan dekomposisi C_3 ajaib pada graf persahabatan F_n digunakan pola pelabelan sisi dan titik, serta pemberian bobot pada setiap titik v dan sisi e. Penentuan dekomposisi tersebut dijabarkan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan graf serta subgraf yang akan digunakan dalam penelitian.
2. Menentukan label titik dan sisi, serta kardinalitas dari titik v dan sisi e pada graf persahabatan F_n dengan n ganjil atau $n = 2k + 1$ untuk $k \in \mathbb{N}$.
3. Menentukan bobot dari masing-masing titik v dan sisi e serta konstanta ajaib pada graf persahabatan F_n.
4. Menentukan pola penempatan label pada setiap titik v dan sisi e pada graf persahabatan F_n.
5. Menentukan fungsi pelabelan titik dan sisi berdasarkan hasil pada poin (4).
6. Membentuk teorema dan menyusun bukti berdasarkan hasil dari poin (5).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai hasil dekomposisi ajaib dari graf persahabatan yang terdekomposisi menjadi graf siklik C_3. Dekomposisi graf memerlukan pelabelan untuk menentukan apakah dekomposisi tersebut bersifat ajaib atau anti ajaib. Penelitian ini menggunakan pelabelan total yang dimulai dari melabeli titik terlebih dahulu kemudian sisinya. Pelabelan total adalah suatu fungsi bijektif yang memetakan semua unsur pada graf baik titik maupun sisinya ke suatu himpunan yang berisi bilangan bulat positif dari 1 sampai $|V| + |E|$.

Selanjutnya, graf persahabatan F_n yang dibangun dari n buah graf siklik berorder 3, sebut $C_{3,i}$ dengan $i = 1,2,3,\dots,n$, memiliki satu titik terminal yang berfungsi sebagai titik bersama dari seluruh graf C_3. Titik tersebut dinotasikan sebagai v_{2n+1}. Untuk membangun sebuah dekomposisi pada F_n dengan $n = 2k +$

1, maka dibutuhkan format atau susunan titik dan sisi sebagai berikut

1. Himpunan titik untuk setiap $C_{3,i}$ dengan $i = s + 1$ adalah sebagai berikut:
   $V(C_{3,i}) = \{v_{s+1}, v_{4k+2-s}, v_{4k+3}\}$
   untuk $s \in [0, n-1]$.
2. Himpunan sisi untuk setiap C_3 dibagi menjadi dua, yaitu sebagai berikut
   - Pada saat i ganjil dengan $i = 2s_1 + 1$ didapatkan:
     $E(C_{3,i}) = \{e_{2s_1+1}, e_{3k+2-s_1}, e_{6k+3-s_1}\}$,
     untuk $s_1 \in [0, k]$.
   - Pada saat i genap dengan $i = 2s_2 + 2$ didapatkan:
     $E(C_{3,i}) = \{e_{2s_2+2}, e_{4k+2-s_2}, e_{5k+2-s_2}\}$,
     untuk $s_2 \in [0, k-1]$.

Misalkan diberikan himpunan bilangan bulat berhingga X dengan $X = \{1,2,3,\dots,k\}$ dimana $k \in \mathbb{N}$. Kemudian, dapat dituliskan bahwa

$$\sum X = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$$

adalah sumset dari X, dimana $\sum X = \sum_{a \in X} a$, yaitu jumlah dari seluruh anggota (Inayah *et al*, 2012).

Pada penelitian ini, diperkenalkan suatu bentuk pelabelan baru, yaitu pelabelan bertingkat yang melabeli titik atau sisi menggunakan himpunan label berupa barisan aritmatika. Pelabelan ini berbeda dengan definisi pelabelan aritmatika yang pernah ada (Solairaju & Shoba, 2017).

Definisi 1.
Misalkan f adalah fungsi pelabelan pada graf G. f disebut sebagai pelabelan bertingkat jika ia memetakan himpunan titik atau himpunan sisi di G ke suatu himpunan aritmatika $\{a + d, i = 0,1,2,\dots\}$ dengan suku pertama a dan beda d. Untuk pelabelan bertingkat titik, maka $0 \le i \le |V(G)| - 1$, sedangkan untuk pelabelan bertingkat sisi, maka $0 \le i \le |E(G)| - 1$. Selanjutnya, untuk pelabelan bertingkat total, maka $0 \le i \le |V(G)| + |E(G)| - 1$.

Kemudian, perhatikan bahwa setiap subgraf C_3 dari graf persahabatan F_n memuat indeks titik dan sisi sesuai dengan format yang berikan. Untuk mengetahui apakah graf persahabatan tersebut dapat terdekomposisi, maka perlu diketahui total dari indeks titik dan sisi yang termuat di dalam subgraf C_3. Lemma 1 akan menjelaskan mengenai total indeks sisi setiap subgraf C_3 pada graf persahabatan F_n.

Lemma 1 Misalkan himpunan $A = \{1,2,3,\dots,3(2k+1) | k \in \mathbb{N}\}$ merupakan himpunan indeks sisi pada graf persahabatan F_n. Himpunan A dapat dibagi menjadi $2k + 1$ subhimpunan yang saling lepas dengan jumlah indeks sisi dari masing-masing subhimpunan bernilai sama, yaitu $9k + 6$. Dalam hal ini, $2k + 1 = n$ adalah order ganjil dari F_n.

Bukti. Misalkan $A = \{1,2,3,\dots,3(2k+1) | k \in \mathbb{N}\}$ adalah himpunan indeks sisi pada F_n. Untuk membagi himpunan A ke dalam n subhimpunan, dimana $n = 2k + 1$, digunakan acuan subhimpunan sebagai berikut:

$A_{i_g} = \{2s_1 + 1, 3k + 2 - s_1, 6k + 3 - s_1\}$
untuk $s_1 \in [0, k]$,

$A_{i_g} = \{2s_2 + 2, 4k + 2 - s_2, 5k + 2 - s_2\}$ untuk $s_2 \in [0, k-1]$.

Berdasarkan himpunan sisi A_{i_g} dan A_{i_g} dapat dilihat bahwa tidak ada indeks sisi yang sama, sehingga didapatkan $A_{i_g} \cap A_{i_g} = \emptyset$. Hal ini berarti, himpunan sisi A_{i_g} dan A_{i_g} saling lepas. Selanjutnya, dapat dilihat bahwa

1. $\sum A_{i_g} = 2s_1 + 1 + 3k + 2 - s_1 + 6k + 3 - s_1 = 9k + 6$,
2. $\sum A_{i_g} = 2s_2 + 2 + 4k + 2 - s_2 + 5k + 2 - s_2 = 9k + 6$.

Dengan demikian, Lemma 1 terbukti. ■

Berdasakan Lemma 1 diketahui bahwa total indeks sisi pada masing-masing subgraf C_3 dari graf persahabatan F_n, yaitu $9k + 6$. Selanjutnya, dicari total indeks titik pada graf persahabatan F_n seperti pada Lemma 2. Total indeks titik dari graf persahabatan F_n bertujuan untuk melihat apakah pola pelabelan titik yang diberikan sesuai dengan total indeks yang diketahui.

Lemma 2. Misalkan himpunan B merupakan himpunan indeks titik $\{1,2,3,\dots,4k+3 | k \in \mathbb{N}\}$ pada graf persahabatan F_n. Himpunan B dapat dibagi menjadi $2k + 1$ subhimpunan yang masing-masing memuat indeks titik terminal, yaitu $4k + 3$ dan jumlah indeks titik dari masing-masing subhimpunan bernilai sama, yaitu $8k + 6$.

Bukti. Misalkan $B = \{1,2,3,\dots,3(2k+1) | k \in \mathbb{N}\}$. Misalkan pula B_i dengan $i = 1,2,3,\dots,n$ adalah subhimpunan dari B dengan susunan sebagai berikut:

$B_i = \{s + 1, 4k + 2 - s, 4k + 3\}$
untuk $s \in [0, n-1]$,

dan diperoleh

$$\begin{aligned}\sum B_i &= s + 1 + 4k + 2 - s + 4k + 3\\ &= 8k + 6.\end{aligned}$$

Dengan demikian, Lemma 2 terbukti. ■

Berdasakan Lemma 2 diketahui bahwa total indeks sisi dari masing-masing subgraf C_3 pada graf persahabatan F_n, yaitu $8k + 6$. Setelah didapatkan total indeks pada titik dan sisi, selanjutnya ditentukan total konstanta ajaib c yang dituangkan dalam Teorema 1. Penetuan teorema ini bertujuan untuk mengetahui bobot konstanta ajaib c yang dibangun oleh dekomposisi C_3 pada graf persahabatan F_n yang berorder ganjil.

Teorema 1. Diberikan suatu graf Persahabatan F_n dengan order ganjil $n = 2k + 1 \geq 3$ dan pelabelan bertingkat total. F_n memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan konstanta ajaib $c = 29d \quad + 6a + 15d$.

Bukti. Pertama, perlu dilakukan konstruksi fungsi pelabelan bertingkat titik dan sisi sebagai berikut:

$f(v_i) = a + d(i - 1)$ untuk $i \square [1, 2n + 1]$, (1)

$g(e_i) = 4d \quad + a + d(i + 2)$ (2)

untuk $i \square [1, 3n]$, dengan $n = 2k + 1$,

Kemudian, dengan menggunakan himpunan titik dan sisi sesuai dengan Lemma 1 dan Lemma 2 maka, diperoleh total label titik dan sisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{v \square V(C_{3,i})} f(v) + \sum_{g \square E\left(C_{3,i_g}\quad\right)} g(e)\\ &= (a + d(s + 1 - 1) + a + d(4k + 2 - s - 1) + a + d(4k + 3 - 1)) + (4d \quad + a + d(2s_1 + 1 + 2) + (4d \quad + a + d(3k + 2 - s_1 + 2) + (4d \quad + a + d(6k + 3 - s_1 + 2))\\ &= 8d \quad + 3a + 3d + 21d \quad + 12d + 3a\\ &= 29d \quad + 6a + 15d,\end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{v \square V(C_{3,i})} f(v) + \sum_{g \square E\left(C_{3,i_g}\quad\right)} g(e)\\ &= (a + d(s + 1 - 1) + a + d(4k + 2 - s - 1) + a + d(4k + 3 - 1)) + (4d \quad + a + d(2s_2 + 2 + 2) + (4d \quad + a + d(4k + 2 - s_2 + 2) + (4d \quad + a + d(5k + 2 - s_2 + 2))\\ &= 8d \quad + 3a + 3d + 21d \quad + 12d + 3a\\ &= 29d \quad + 6a + 15d.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, graf Persahabatan F_n dengan order ganjil $n \geq 3, n \square \mathbb{N}$ memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan konstanta ajaib c sebesar $29d \quad + 6a + 15d$. ■

Berdasarkan Teorema 1, didapatkan beberapa akibat yang bertujuan untuk memudahkan penentuan nilai konstanta ajaib, beda dari perluasan nilai a dan d serta order (n) dari graf persahabatan yang memuat dekomposisi ajaib.

Akibat 1. Misalkan graf persahabatan F_n dengan $n = 2k + 1 \geq 3$; $k \square \mathbb{N}$ dan berdasarkan pelabelan bertingkat total memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan konstanta ajaib c sebagaimana disebutkan di Teorema 1. Jika terdapat konstanta pengali $m \square \mathbb{N}$ sedemikian hingga himpunan label berupa $\{m(a + d\ ), 0 \leq i \leq |V(G)| + |E(G)| - 1\}$, maka F_n memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan c' sebagai konstanta ajaib yang baru sebesar $c' = m\ $.

Bukti. Ambil sembarang nilai $m \square \mathbb{N}$. Berdasarkan fungsi pelabelan titik dan sisi pada Persamaan (1) dan (2), didapatkan fungsi pelabelan baru untuk titik dan sisi yang telah dikalikan dengan m sebagai berikut:

$f_m(v_i) = m\ \ (v_i) = m(a + d(i - 1))$, untuk $i \square [1, 2n + 1]$ (3)

$g_m(e_i) = m\ \ (e_i) = m(4d \quad + a + d(i + 2))$, untuk $i \square [1, 3n]$ (4)

Mengacu pada pembentukan himpunan titik dan sisi pada Persamaan (3) dan (4), maka diperoleh total label titik dan sisi dari masing-masing $C_{3,i}$ sebagai berikut:

Untuk i ganjil,

$$\begin{aligned}c' &= \textstyle\sum_{v \square V(C_{3,i})} f_m(v) + \sum_{g \square E\left(C_{3,i_g}\quad\right)} g_m(e)\\ &= m((a + d(s + 1 - 1) + a + d(4k + 2 - s - 1) + a + d(4k + 3 - 1))) + m((4d \quad + a + d(2s_1 + 1 + 2) + (4d \quad + a + d(3k + 2 - s_1 + 2) + (4d \quad + a + d(6k + 3 - s_1 + 2)))\\ &= m(8d \quad + 3a + 3d) + m(21d \quad + 12d + 3a)\\ &= m(29d \quad + 6a + 15d) = m\ ,\end{aligned}$$

dan untuk i genap,

$$\begin{aligned}c' &= \textstyle\sum_{v \square V(C_{3,i})} f_m(v) + \sum_{g \square E\left(C_{3,i_g}\quad\right)} g_m(e)\\ &= m((a + d(s + 1 - 1) + a + d(4k + 2 - s - 1) + a + d(4k + 3 - 1))) + m((4d \quad + a + d(2s_2 + 2 + 2) + (4d \quad + a + d(4k + 2 - s_2 + 2) + (4d \quad + a + d(5k + 2 - s_2 + 2)))\\ &= m(8d \quad + 3a + 3d) + m(21d \quad + 12d + 3a)\\ &= m(29d \quad + 6a + 15d) = m\ .\end{aligned}$$

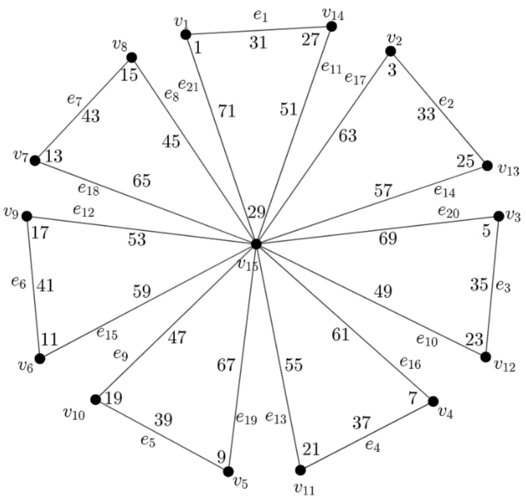
Oleh karena itu, terbukti bahwa $c' = m\ $. ■

Selanjutnya, diperoleh pula Akibat 2 mengenai selisih konstanta ajaib suatu graf persahabatan ketika order n diperluas menjadi m apabila memuat pelabelan bertingkat total dengan a dan d yang sama untuk F_n dan F_m.

Akibat 2. Misalkan graf persahabatan F_n $(n = 2k_1 + 1 \geq 3; k_1 \in \mathbb{N})$ dan F_m $(m = 2k_2 + 1 \geq 3;\ k_2 \in \mathbb{N})$ dan keduanya memuat pelabelan bertingkat total dengan a dan d yang sama. F_n dan F_m masing-masing memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan c_n dan c_m sebagai masing-masing konstanta ajaib dari F_n dan F_m sebagaimana disebutkan pada Teorema 1, dan $|c_n - c_m| = 29d|k_1 - k_2|$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1, konstanta ajaib dari F_n adalah sebesar $c = 29d\ \ + 6a + 15d$. Ketika order dari graf persahabatan F_n diperluas menjadi F_m, maka $|c_n - c_m| = |(29dk_1 + 6a + 15d) - (29dk_2 + 6a + 15d)| = 29d|k_1 - k_2|$. ■

Sebagai contoh diberikan suatu dekomposisi C_3 ajaib pada graf persahabatan F_7 yang memuat pelabelan bertingkat total dengan $a = 1$ dan $d = 2$ yang dapat dilihat pada Gambar 1 dan Gambar 2.

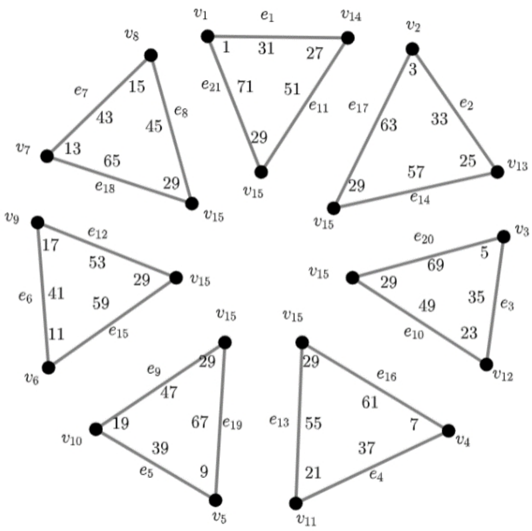


Gambar 1. Pelabelan bertingkat total pada graf persahabatan F_7 dengan $a = 1$ dan $d = 2$

Dari Gambar 1, terlihat bahwa F_7memiliki 15 titik dan 21 sisi, sehingga jika $a = 1$ dan $d = 2$, maka fungsi pelabelan bertingkat total yang digunakan adalah

$$f: V(G) \cup E(G) \to \{1,3,5,\ldots,71\}.$$

Selanjutnya dekomposisi dari F_7 dalam bentuk C_3 ditunjukkan oleh Gambar 2 dan diperoleh total bobot dari seluruh titik dan sisi di setiap C_3 bernilai sama, yaitu 210.



Gambar 2. Dekomposisi C_3 ajaib dari graf persahabatan F_7 dengan pelabelan bertingkat total $(a = 1, d = 2)$ dan konstanta ajaib $c = 210$.

KESIMPULAN

Hasil dari penelitian dapat disimpulkan bahwa graf persahabatan F_n dengan $n = 2k + 1; k \in \mathbb{N}$ dengan pelabelan bertingkat total diperoleh sifat sebagai berikut, F_n memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan konstanta ajaib sebesar $c = 29d\ \ + 6a + 15d$. Jika terdapat konstanta pengali $m \in \mathbb{N}$ pada pelabelan bertingkat total sedemikian hingga himpunan label berupa$\{m(a + d\ ), 0 \leq i \leq |V(G)| + |E(G)| - 1\}$, maka F_n memuat dekomposisi C_3 ajaib dengan $c' = m$; dan Selisih konstanta ajaib dari F_n dan F_m pada dekomposisi C_3 ajaib dengan pelabelan bertingkat total yang sama adalah $|c_n - c_m| = 29d|k_1 - k_2|$.

DAFTAR PUSTAKA

Baca M & M. Miller. 2008. *Super Edge-Antimagic Graph, A Wealth of Problems and Some Solution*. Boca Raton-Florida: Brown Walker Press.

Bartle Robert & Sherbert Donald. 2011. *Introduction to Real Analysis 4th Edition.* New York: John Wiley and Sons, Inc.

Chartrand, Gery & L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition.* Boca Raton-Florida: Chapman Hall/CRC.

Chartrand, Gery & P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. Singapore: McGraw-Hill.

Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung. [Tesis] Sekolah Pascasarjana Institut Teknologi Bandung (ITB).

Hendy. 2016. The *H*- super (anti) magic Decomposition of Antiprism graphs, *AIP Conference Proceedings* 1707. 020007.

Hendy, Kiki A. Sugeng, A.N.M. Salman, Nisa Ayunda. 2018. Another *H*-super Magic Decompositions of The Lexicographic Product of Graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **2**(2): 72-78.

Hendy, A. N. Mudholifah, K. A. Sugeng, Martin Bača & Andrea Semaničová-Feňovčíková. 2020. On *H*-antimagic Decomposition of Toroidal Grids and Triangulations. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. **17**(3): 761-770.

Inayah N, A Llado & J Moragas. 2012. Magic and Anti-Magic H- Decompositions, *Discrete Mathematic*. **312**(1367-1371).

Masyitoh Soffi N. 2019. *Dekomposisi* $(a, d) - P_4 -$ *Antiajain Pada Graf Generelized Peterson* $G\ (n, 3)$. [Skripsi] UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Jakarta.

Munir R. 2014. *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung: Informatika Bandung.

Pancahayani Sigit. 2017. Dekomposisi Super Ajaib Berbentuk Lintasan dari Amalgamasi Graf Siklus. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. **2**(2): 128-133.

Rahmawati Nur & Budi Rahajeng. 2014. Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan. *MathHunesa,* **3**(3): 64-71.

Rosen KH. 2012. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: McGraw-Hill.

Simangunsong JW & Mulyono. 2015. Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf Petersen yang Diperumum. *Karismatika.* **3**(11-24).

Solairaju, A dan Shoba, B. 2017. *Super Magic and Arithmetic Labelings of the Graphs* $P_3 \times P_n$ *and* $C_3 \times C_{2n}$. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. **13**(5): 1365-1374

Wilson Robin J & Walkins John J. 1990. *Graphs an Introductory Approach: A First Course in Discrete Matematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.