

**Modelisasi Benda Onyx dan Marmer Melalui
Penggabungan dan Pemilihan Parameter Pengubah Bentuk Permukaan
Putar Bezier
(Onyx and Marmer Objects Modeling by Joining and Choosing Parametric
Modifications of Bezier Revolution Surfaces)**

Kusno ¹⁾, Antonius Cahya P. ²⁾ dan Mahros Darsin ³⁾

¹⁾ Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

²⁾ Staf Pengajar Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

³⁾ Staf Pengajar Program Studi Teknik Universitas Jember

ABSTRACT

We formulate application of Bezier revolution surfaces for modeling onyx and marmer objects in three steps as the following. Firstly, calculating the parametric representation of Bezier revolution surfaces and its shape modification in some different forms is done. Secondly, we formulate parametric continuity for joining the surfaces. Finally, the application of those formulas for modeling onyx and marmer objects of revolution by using computer are simulated.

Keywords: onyx and marmer, Bezier surface of revolution, modeling, parametric continuity and shape modification.

PENDAHULUAN

Pada prakteknya, dalam proses fabrikasi benda onyx dan marmer, diperlukan beberapa tahapan perlakuan berikut. Pertama, membangun model benda yang akan dikonstruksi. Kedua, mengubah bahan mentah menjadi barang setengah jadi, ketiga, membentuk barang setengah jadi ke bentuk yang lebih halus, terakhir, penghalusan permukaan benda. Masalahnya adalah ternyata teknik desain dan fabrikasi benda yang telah ada, sering menimbulkan kerugian industri. Pertama, dengan cara desain *teknik mal* yang banyak digunakan oleh para pengrajin, hasilnya didapatkan sering gagal untuk memenuhi pesanan kontrak ekspor, karena ukuran model benda menjadi tidak sesuai dengan pesanan pembeli. Kedua, fabrikasi teknik *trial and error* ternyata memerlukan biaya lebih mahal, karena banyak menimbulkan kesalahan (resiko) fabrikasi, membutuhkan ekstra waktu dan tenaga untuk kegiatan proses produksi. Selain itu, karena kurang diperhatikannya kebutuhan volume benda yang difabrikasi, proses pengolahannya banyak membuang bahan mentah. Sehubungan dengan masalah-masalah tersebut, tulisan ini dimaksudkan untuk mendapatkan solusi masalah pertama, khususnya dalam hal mendapatkan teknik hitung dan formula parametrik konstruksi komponen-komponen dasar benda onyx dan marmer karakter putar dengan bantuan permukaan putar Bezier.

Formulasi bentuk natural permukaan putar telah diperkenalkan oleh Faux dan Kusno (Faux *et al.*, 1987 dan Karnik *et al.*, 2005), sedangkan untuk putaran bagian benda oleh Karnik (Kusno *et al.*, 2006). Adapun studi kekontinyuan penggabungan dua potongan kurva dan permukaan Bezier telah dibahas oleh Du *et al.*, 1990; Hui, 1999; dan Liu, 1990. Dalam tulisan ini, lebih lanjut dikembangkan pendefinisian permukaan putar Bezier yang dilengkapi dengan parameter pengubah bentuk dasar permukaan. Selanjutnya, dikenalkan hitung kekontinyuan parametrik penggabungan permukaan putar Bezier beserta aplikasinya untuk modelisasi komponen benda onyx dan marmer. Uraian detailnya sebagai berikut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Permukaan Putar Bezier Tegak dan Miring

Rumus umum kurva Bezier derajat n didefinisikan dalam bentuk

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \tag{1}$$

dengan $0 \leq t \leq 1$ sedangkan

$$B_i^n(t) = C_i^n (1-t)^{n-1} \cdot t^i \tag{2}$$

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Apabila $C_x(u)$, $C_y(u)$, $C_z(u)$ menyatakan komponen-komponen skalar dari kurva generatrix Bezier $C(u)$ di bidang meridian

XOZ, maka permukaan putar Bezier bersumbu putar OZ dibangkitkan oleh kurva $C(u)$ dapat diformulasikan sebagai

$$S(u,v) = \langle C_x(u) \cos v, C_x(u) \sin v, C_z(u) \rangle \dots\dots\dots(2)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$.
 Permukaan putar terdefinisi dari sumbu putar miring menurut arah vektor satuan u_1 , bergeneratris kurva $C(u)$ pada bidang meridian yang dibangun oleh vektor satuan $u_1 \perp u_2$ dan berkedudukan awal pada vektor posisi titik $A = \langle x_A, y_A, z_A \rangle$, dapat dirumuskan dengan singkat dalam bentuk [6]

$$S(u,v) = \langle x_A, y_A, z_A \rangle + \mathbf{AX}' + r(u) [\cos v \mathbf{u}_3 + \sin v \mathbf{u}_1] \dots\dots\dots(3)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$. Dalam hal ini u_3 merupakan vektor satuan tegak lurus bidang meridian $[u_1, u_2]$ dan $r(u)$ merupakan panjang jari-jari permukaan putar yang dibangun oleh

perubahan jarak titik X di $C(u)$ ke titik proyeksinya X' di sumbu putar.

Modifikasi Bentuk Kurva Kuadrat Bezier melalui Bentuk Kuartik Bezier

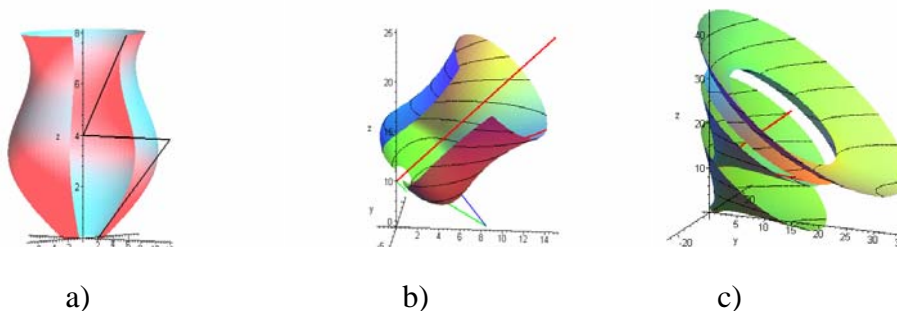
Misalkan kurva kuadrat Bezier dinyatakan dalam bentuk

$$C_2(u) = \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(u) \dots\dots\dots(4)$$

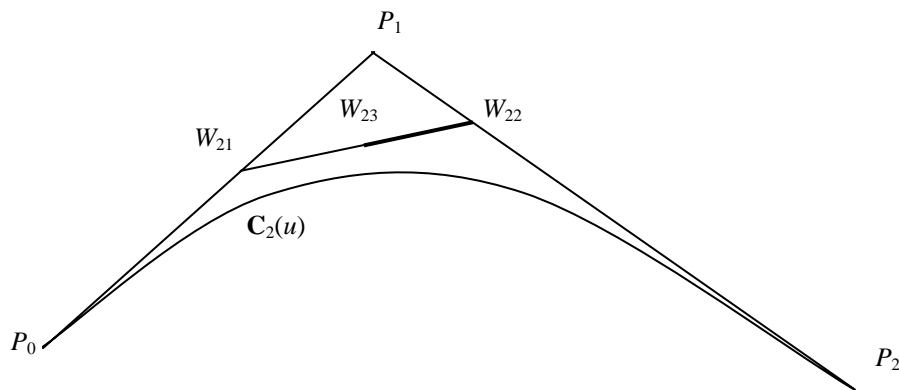
dengan $0 \leq u \leq 1$, maka turunan pertama $C_2'(0) = 2(P_1 - P_0)$ dan $C_2'(1) = 2(P_2 - P_1)$. Pandang pada poligon Bezier $[P_0, P_1, P_2]$ titik kontrol antara W_{21} , W_{22} dan W_{23} masing-masing didefinisikan oleh hubungan

$$W_{21} = \lambda_{21} P_1 + (1 - \lambda_{21}) P_0 \dots\dots\dots(5)$$

$W_{22} = \lambda_{22} P_2 + (1 - \lambda_{22}) P_1$
 $W_{23} = \lambda_{23} W_{22} + (1 - \lambda_{23}) W_{21}$
 dengan $0 \leq \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} \leq 1$ dan $\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}$ ditetapkan (Gambar 2).



Gambar 1. Konstruksi permukaan putar bezier tegak dan miring



Gambar 2. Pendefinisian titik kontrol interpolasi kurva kuadrat

Dengan titik-titik kontrol poligon Bezier baru $\Omega = [P_0, W_{21}, W_{23}, W_{22}, P_2]$ dapat dimodifikasi model kurva kuadratik Bezier $C_2(u)$ menjadi kurva kuartik Bezier $C_4(u)$ dalam poligon Ω berbentuk

$$C_4(u) = P_0(1-u)^4 + 4W_{21}(1-u)^3.u + 6W_{23}(1-u)^2.u^2 + 4W_{22}(1-u).u^3 + P_2.u^4 \quad \dots\dots\dots(6)$$

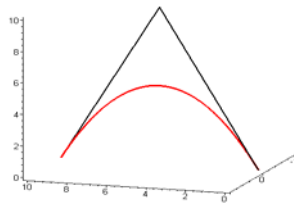
dengan $0 \leq u \leq 1$. Diketahui turunan pertama $C_4'(0)$ dan $C_4'(1)$ masing-masing diberikan oleh

$$C_4'(0) = 4(W_{21} - P_0) = 4 \overrightarrow{P_0W_{21}} \quad \dots\dots\dots(7)$$

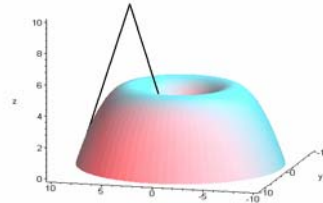
$$C_4'(1) = 4(P_2 - W_{22}) = 4 \overrightarrow{W_{22}P_2}$$

Karena titik $W_{21} \in \overline{P_0P_1}$ dan $W_{22} \in \overline{P_1P_2}$, maka $\overrightarrow{P_0W_{21}} \parallel \overrightarrow{P_0P_1}$ dan $\overrightarrow{W_{22}P_1} \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$.

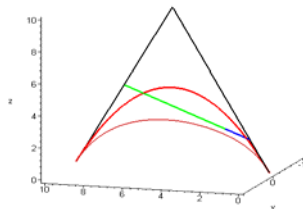
Hal ini berarti bahwa arah kecekungan (kecembungan) kurva $C_2(u)$ dan $C_4(u)$ pada harga $u = 0$ dan $u = 1$ dari kedua kurva adalah sama, sedangkan untuk mengubah bentuk kurva $C_2(u)$ sepanjang harga $0 < u < 1$, dapat ditentukan melalui pemilihan harga λ_{21} , λ_{22} dan λ_{23} (Gambar 3).



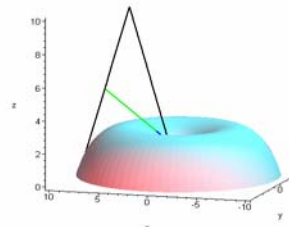
a). Kurva awal



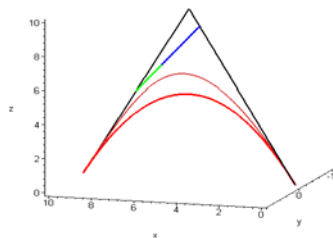
b). Permukaan hasil pemutaran kurva (a)



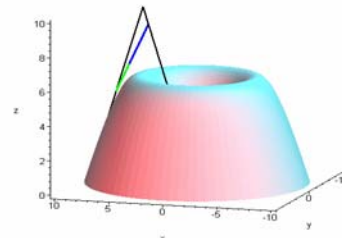
c). Harga $\lambda_{21}=0,2$; $\lambda_{22}=0,5$ dan $\lambda_{23}=0,2$.



d). Permukaan hasil pemutaran kurva (c)



e). Harga $\lambda_{21}=0,9$; $\lambda_{22}=0,5$ dan $\lambda_{23}=0,6$



f). Permukaan hasil pemutaran kurva (e)

Gambar 3. Beberapa contoh modifikasi bentuk kurva kuadratik bezier

Dalam persamaan (5), diberikan kebebasan pemilihan 3 (tiga) parameter untuk memodifikasi bentuk kurva $C_2(u)$. Seperti diperlihatkan dalam Gambar 3, dari kurva awal (Gambar 3a) dapat dimodifikasi ke bentuk kurva baru berketinggian dibawah/diatas kurva awal (Gambar 3c,e). Akibatnya, permukaan putar yang terbentuk (Gambar 3d,f) berbeda dengan permukaan putar awal (Gambar 3b).

Modifikasi Bentuk Kurva Kubik melalui Bentuk Kuartik Bezier

Pandang kurva kubik Bezier

$$C_3(u) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(u) \tag{8}$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan data titik kontrol $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ ditetapkan. Misalkan titik-titik kontrol antara W_{31} , W_{32} dan W_{33} didefinisikan sebagai

$$W_{31} = \lambda_{31} P_1 + (1 - \lambda_{31}) P_0 \tag{9}$$

$$W_{32} = \lambda_{32} P_1 + (1 - \lambda_{32}) P_2$$

$$W_{33} = \lambda_{33} P_3 + (1 - \lambda_{33}) P_2$$

dengan $0 \leq \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33} \leq 1$ dan harga $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ dipilih terlebih dahulu (Gambar 4).

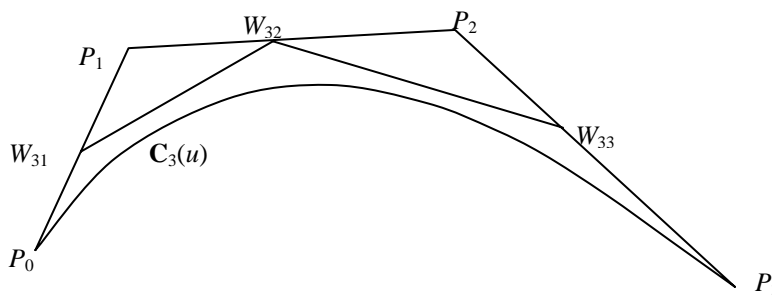
Analog kasus modifikasi kurva kuadrat Bezier ke kurva kuartik, maka melalui titik-titik

kontrol poligon baru $[P_0, W_{31}, W_{32}, W_{33}, P_3]$ dapat dilakukan pemodelan kurva kubik Bezier $C_3(u)$ dengan kurva kuartik Bezier $C_4(u)$ dalam bentuk

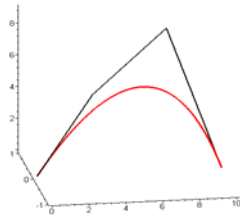
$$C_4(u) = P_0 (1-u)^4 + 4 W_{31} (1-u)^3 \cdot u + 6 W_{32} (1-u)^2 \cdot u^2 + 4 W_{33} (1-u) \cdot u^3 + P_2 u^4 \tag{10}$$

dengan $0 \leq u \leq 1$. Dalam hal ini perubahan bentuk kurva $C_3(u)$ oleh kurva $C_4(u)$ mutlak dipengaruhi oleh letak pergeseran titik-titik kontrol W_{31} , W_{32} dan W_{33} di sepanjang masing-masing sisi poligon Bezier $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ dari kurva kubik. Hasil beberapa pemilihan parameter $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ diperlihatkan dalam Gambar 5.

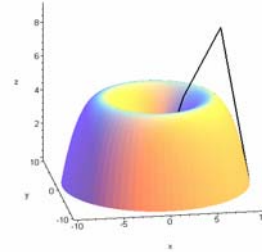
Dari beberapa formula permukaan putar beserta teknik pemodifikasian bentuk kurva Bezier yang telah dikenalkan, selanjutnya perlu diaplikasikan untuk modelisasi beragam bentuk komponen benda putar. Oleh sebab itu dalam studi berikut, dibahas tentang teknik penggabungan (pemasangan) dua permukaan putar Bezier berdekatan kontinyu parametrik order dua. Uraian detailnya seperti penjelasan berikut.



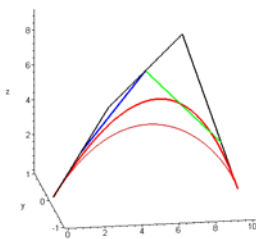
Gambar 4. Pendefinisian titik kontrol interpolasi kurva kubik



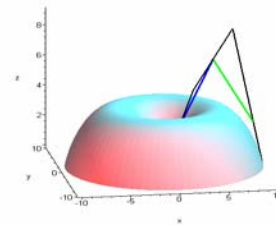
a). Kurva awal



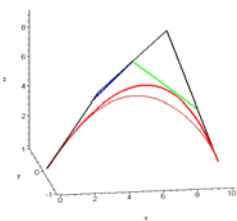
b). Permukaan hasil pemutaran kurva (a)



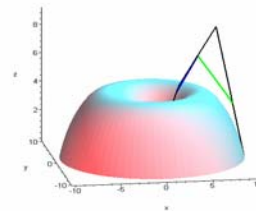
c). Harga $\lambda_{31}=0,5$; $\lambda_{32}=0,5$ dan $\lambda_{33}=0,7$.



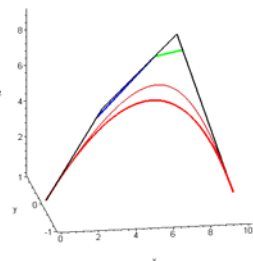
d). Permukaan hasil pemutaran kurva (c)



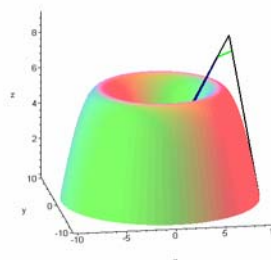
e). Harga $\lambda_{31}=0,9$; $\lambda_{32}=0,5$ dan $\lambda_{33}=0,6$



f). Permukaan hasil pemutaran kurva (e)

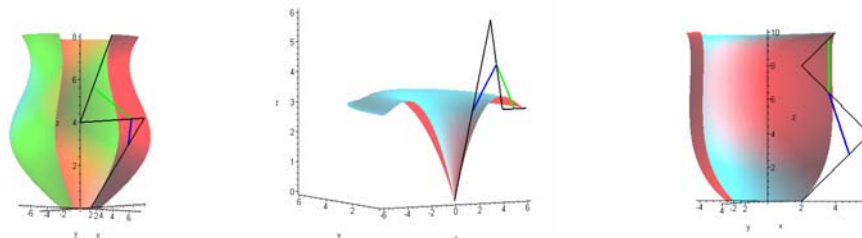


g). Harga $\lambda_{31}=0,9$; $\lambda_{32}=0,5$ dan $\lambda_{33}=0,2$



h). Permukaan hasil pemutaran kurva (g)

Gambar 5. Beberapa contoh modifikasi bentuk kurva kubik Bezier



Gambar 6. Beberapa contoh hasil modifikasi permukaan putar kubik Bezier

Penggabungan (Pemasangan) Dua Permukaan Putar Bezier

Misalkan dua permukaan putar $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ memiliki sumbu putar g dan orientasi arah kurva sama, masing-masing pada bidang meridian Ψ dibangkitkan oleh kurva generatrix $C_1(u)$ dan $C_2(u)$. Masalahnya adalah menggabung kontinyu parametrik kedua permukaan $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ sepanjang kurva persekutuannya Γ (Gambar 7). Dalam hal ini pemilihan $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ dapat berupa permukaan putar natural, bentuk standar (berupa potongan bola, ellipsoida, paraboloida, hiperboloida, silinder dan kerucut) ataupun dari permukaan putar Bezier.

Jika pada permukaan tersebut masing-masing parameter u dan v terdefinisi dalam selang $u_0 \leq u \leq u_1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$, maka untuk mendapatkan kekontinyuan parametrik

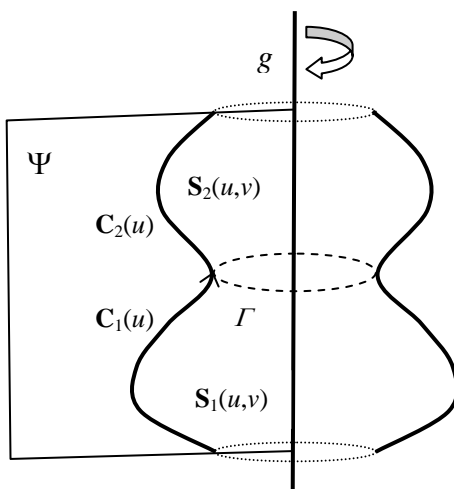
sepanjang kurva persekutuan lingkaran Γ harus dipenuhi kondisi berikut

1. Kontinyu order nol, apabila dipenuhi $S_2(u_0,v) = S_1(u_1,v)$ atau $C_2(u_0) = C_1(u_1)$.
.....(11a)

2. Kontinyu order 1, apabila selain kontinyu order nol dipenuhi $S_2'(u_0,v) = \lambda_1 S_1'(u_1,v)$ atau $C_2'(u_0) = \lambda_1 C_1'(u_1)$
.....(11b)

3. Kontinyu order 2, apabila selain kontinyu order satu dipenuhi $S_2'''(u_0,v) = \lambda_2 S_1'''(u_1,v)$ atau $C_2'''(u_0) = \lambda_2 C_1'''(u_1)$
.....(11c)

dengan λ_2 suatu konstanta.



Gambar 7. Problem penggabungan dua permukaan putar

Karena alasan aplikasi, misalkan $S_1(u,v)$ berupa permukaan putar kubik Bezier dan $S_2(u,v)$ merupakan permukaan standar paraboloida dengan sumbu OZ sebagai sumbu simetri/putarnya, masing-masing dalam bentuk

$$S_1(u,v) = \left\langle \sum_{i=0}^3 P_{xi} B_i^3(u) \cdot \cos v, \sum_{i=0}^3 P_{xi} B_i^3(u) \sin v, \sum_{i=0}^3 P_{zi} B_i^3(u) \right\rangle \dots\dots\dots(12)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$ dan

$$S_2(u,v) = \langle r \cdot u \cdot \cos v, r \cdot u \cdot \sin v, u^2 \rangle \dots\dots\dots(13)$$

dengan $r > 0$ konstan, $a \leq u \leq b$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$.
Di bidang meridian XOZ, untuk mendapatkan kontinyu

- a. Order nol, cukup dipenuhi $C_2(a) = C_1(1)$, artinya $P_{x3} = r \cdot a$ dan $P_{z3} = a^2$;
 - b. Order satu, jika dipenuhi juga $C_2'(a) = \lambda_1 C_1'(1)$, yaitu $r = \lambda_1(P_{x3} - P_{x2})$ dan $2a = \lambda_1(P_{z3} - P_{z2})$;
 - c. Order dua, jika selain order satu dipenuhi juga $C_1''(a) = \lambda_2 C_2''(1)$ artinya $2 = \lambda_2(P_{z3} - 2P_{z2} + P_{z1})$.
- Untuk persamaan (12) dan (13) misalkan dipilih titik-titik kontrol

$$P_0 = \langle 6,0,-4 \rangle, \quad P_1 = \langle 0,0,-2 \rangle, \\ P_2 = \langle 2,0,0 \rangle \text{ dan } P_3 = \langle 4,0,4 \rangle,$$

sedangkan $r = 2$, $a = 2$ dan $b = 3$. Jika dievaluasi maka didapatkan (Gambar 8a,b,c)

- a). kondisi order nol terpenuhi, sebab $P_{x3} = 4 = r \cdot a$ dan $P_{z3} = 4 = a^2$;
- b). kondisi order satu terpenuhi, karena $r = 2 = \lambda_1(4 - 2)$ dan $2a = 4 = \lambda_1(4 - 0)$;
- c). kondisi order dua terpenuhi, karena $2 = \lambda_2(P_{z3} - 2P_{z2} + P_{z1}) = \lambda_2(4 - 2 \cdot 0 - 2)$.

Dalam hal persamaan (13) berbentuk permukaan putar kubik Bezier

$$S_2(u,v) = \left\langle \sum_{i=0}^3 Q_{xi} B_i^3(u) \cdot \cos v, \sum_{i=0}^3 Q_{xi} B_i^3(u) \sin v, \sum_{i=0}^3 Q_{zi} B_i^3(u) \right\rangle \dots\dots\dots(14)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$, maka untuk mendapatkan kontinyu parametrik di bidang

meridian XOZ antara permukaan putar $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ dipersyaratkan:

- a. Order nol, cukup dipenuhi $C_2(0) = C_1(1)$, artinya $[Q_{x0}]_2 = [P_{x3}]_1$ dan $[Q_{z3}]_2 = [P_{z3}]_1$; (15a)
- b. Order satu, jika dipenuhi juga $C_2'(0) = \lambda_1 C_1'(1)$, yaitu $[Q_{x1} - Q_{x0}]_2 = \lambda_1[P_{x3} - P_{x2}]_1$ dan $[Q_{z1} - Q_{z0}]_2 = \lambda_1[P_{z3} - P_{z2}]_1$;
- c. Order dua, jika selain order satu dipenuhi juga $C_1''(0) = \lambda_2 C_2''(1)$ artinya $[Q_{x2} - 2Q_{x1} + Q_{x0}]_2 = \lambda_2[P_{x3} - 2P_{x2} + P_{x1}]_1$ (15c) dan $[Q_{z2} - 2Q_{z1} + Q_{z0}]_2 = \lambda_2[P_{z3} - 2P_{z2} + P_{z1}]_1$.

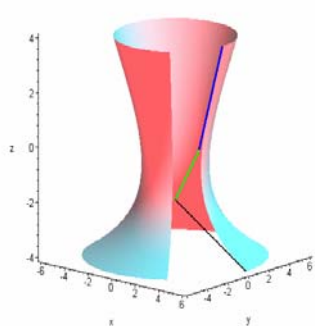
Dalam kasus yang lebih umum daripada generatris kurva kubik Bezier persamaan (12) dan (14), apabila masing-masing dari bentuk

$$S_1(u,v) = \left\langle \sum_{i=0}^n P_{xi} B_i^n(u) \cdot \cos v, \sum_{i=0}^n P_{xi} B_i^n(u) \sin v, \sum_{i=0}^n P_{zi} B_i^n(u) \right\rangle \dots\dots\dots(16)$$

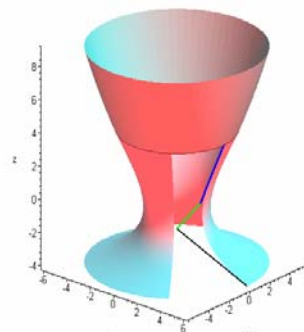
$$S_2(u,v) = \left\langle \sum_{i=0}^n Q_{xi} B_i^n(u) \cdot \cos v, \sum_{i=0}^n Q_{xi} B_i^n(u) \sin v, \sum_{i=0}^n Q_{zi} B_i^n(u) \right\rangle \dots\dots\dots(17)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$, maka untuk mendapatkan kontinyu parametrik di bidang meridian XOZ antara permukaan putar Bezier $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ syarat yang harus dipenuhi adalah

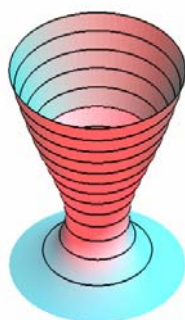
- a. Order nol: $[Q_{x0}]_2 = [P_{xn}]_1$ dan $[P_{z3}]_2 = [Q_{zn}]_1$;
- b. Order satu, jika dipenuhi juga: $[P_{x1} - P_{x0}]_2 = \lambda_1[Q_{xn} - Q_{x(n-1)}]_1$ dan $[P_{z1} - P_{z0}]_2 = \lambda_1[Q_{zn} - Q_{z(n-1)}]_1$;
- c. Order dua, jika selain order satu dipenuhi juga: $[P_{x2} - 2P_{x1} + P_{x0}]_2 = \lambda_2[Q_{xn} - 2Q_{x(n-1)} + Q_{x(n-2)}]_1$ dan $[P_{z2} - 2P_{z1} + P_{z0}]_2 = \lambda_2[Q_{zn} - 2Q_{z(n-1)} + Q_{z(n-2)}]_1$.



a). Permukaan putar kubik bezier



b). Gabungan permukaan putar kubik bezier dengan paraboloida



c). Pandangan beberapa posisi permukaan (b)

Gambar 8. Contoh penggabungan permukaan putar bezier dengan paraboloida

Modifikasi Kontinyu Gabungan Permukaan Putar Bezier

Misalkan dua permukaan putar kubik Bezier bentuk (12) dan (14). Di bidang meridian XOZ, masing-masing permukaan memiliki kurva generatris

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(u) \tag{18a}$$

dan

$$C_2(u) = \sum_{i=0}^3 Q_i B_i^3(u) \tag{18b}$$

termodifikasi oleh kurva kuartik formula (10) dan (9) masing-masing ke dalam bentuk

$$C_{41}(u) = P_0 (1-u)^4 + 4 W_{311} (1-u)^3 .u + 6 W_{321} (1-u)^2 .u^2 +$$

$$W_{331} (1-u).u^3 + P_3 u^4 \tag{19}$$

$$C_{42}(u) = Q_0 (1-u)^4 + 4 W_{312} (1-u)^3 .u + 6 W_{322} (1-u)^2 .u^2 +$$

$$W_{332} (1-u).u^3 + Q_3 u^4 \tag{20}$$

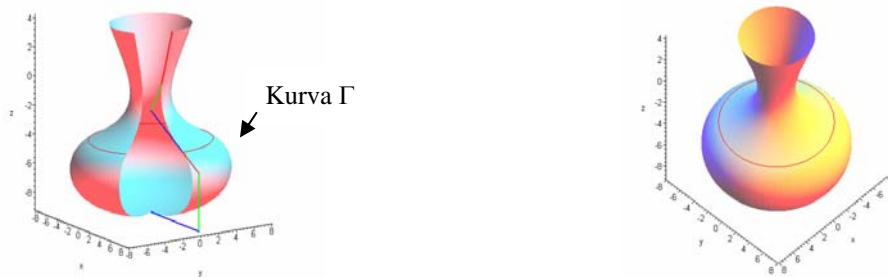
dengan $0 \leq u \leq 1$. Masalahnya adalah, apabila kedua kurva $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ bergabung kontinyu parametrik order dua di bidang meridian XOZ, bagaimana melakukan modifikasi kontinyu pasangan titik-titik kontrol $[W_{311}, W_{321}, W_{331}]$ dan $[W_{312}, W_{322}, W_{332}]$ agar bentuk kurva $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ berubah tetapi pada titik gabungannya tetap memiliki tingkat kontinyuan parametrik yang sama dengan titik gabung kurva semula.

Karena kurva generatris $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ bergabung kontinyu parametrik order 2 (dua), maka keduanya memenuhi kondisi persamaan (15a,b,c). Pengubahan posisi titi-titik kontrol

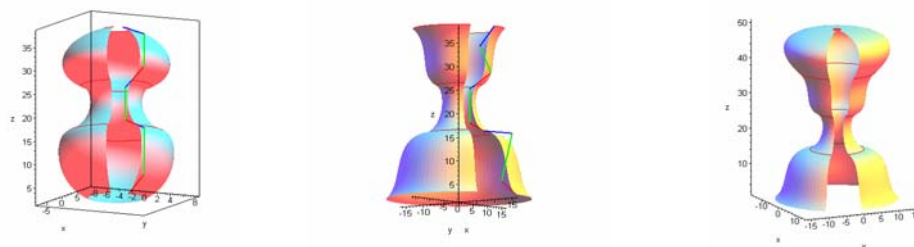
$[W_{311}, W_{321}, W_{331}]$ dan $[W_{312}, W_{322}, W_{332}]$ karena variasi pemilihan parameter λ dalam selang $0 \leq \lambda \leq 1$, tetap menghasilkan gabungan order nol, sebab nilai $Q_0 = P_3$ tidak berubah. Kondisi kontinyu order satu gabungan kurva awal berbentuk $(Q_1 - Q_0) = \lambda_1(P_3 - P_2)$ identik/segaris dengan $(W_{312} - Q_0) = \xi_1(P_3 - W_{331})$ karena titik $W_{312} \in Q_0Q_1$ dan $W_{331} \in P_3P_2$. Oleh karena itu hasil gabungan kurva kuartik Bezier juga kontinyu parametrik order satu. Kondisi kontinyu order 2 (dua) gabungan kurva awal berbentuk $(Q_2 - 2Q_1 - Q_0) = \lambda_2(P_3 - 2P_2 - P_1)$ dan gabungan kurva kuartik Bezier berbentuk $(W_{322} - 2W_{312} - Q_0) = \xi_2(P_3 - 2W_{331} - W_{321})$. Untuk mendapatkan gabungan kurva kuartik Bezier kontinyu order dua, vektor pada masing-masing ruas dari kedua persamaan terakhir dipilih sehingga satu merupakan kelipatan dari yang lain. Contoh hasil teknik perlakuan order satu dapat dilihat pada Gambar 10.

Desain Prototype Benda Onyx dan Marmer

Dari beberapa fasilitas parameter pengubah bentuk permukaan putar Bezier yang ada dalam formula (1) sampai dengan (20), selanjutnya dapat didesain beberapa bentuk benda onyx dan marmer menurut prinsip teknik penggabungan beberapa komponen benda putar berikut. *Pertama*, tetapkan sumbu putar utama benda yang akan dibangun. *Kedua*, konstruksi secara bertahap beberapa potongan benda putar dalam urutan ketinggian sumbu putar naik (turun) untuk mendefinisikan masing-masing potongan bentuk luar benda onyx (marmer) yang diinginkan. Dalam hal ini, konstruksi komponen benda dapat hanya menggunakan satu sumbu putar atau multi sumbu. *Ketiga*, evaluasi beberapa parameter dalam formula yang telah digunakan agar penggabungan antar dua komponen benda putar yang berdekatan didapat kontinyu parametrik dan permukaannya menjadi lebih alami. Beberapa contoh hasil menurut perlakuan ini, dapat dilihat pada Gambar 11.

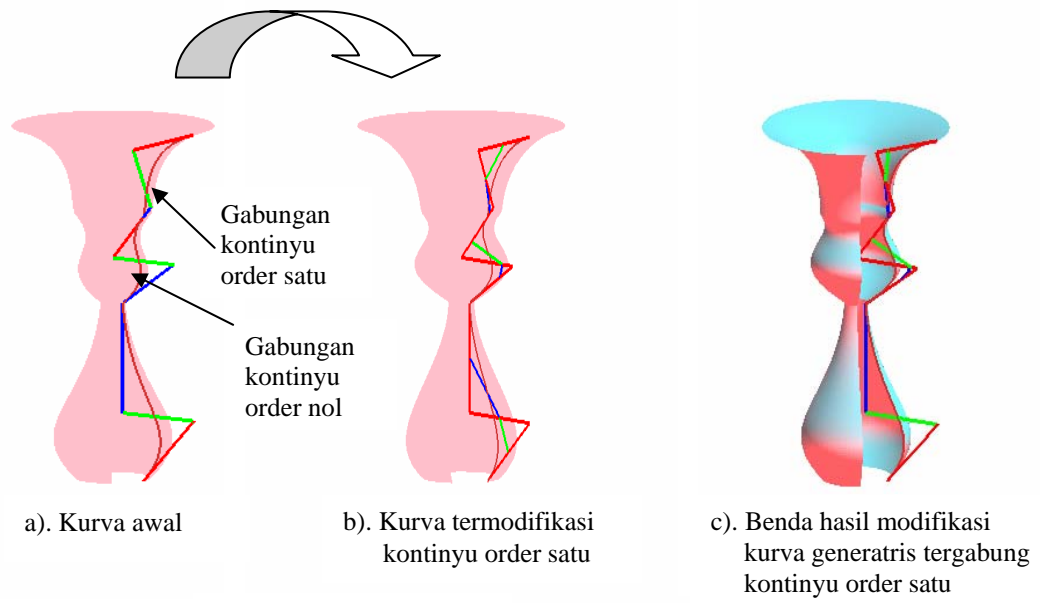


a. Penggabungan dua permukaan putar kubik Bezier

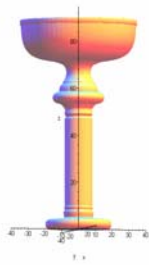


b. Penggabungan tiga dan empat permukaan putar kubik Bezier

Gambar 9. Contoh penggabungan kontinyu parametrik order satu



a)



b)



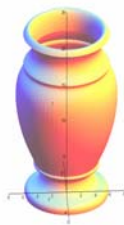
c)



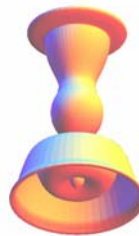
d)



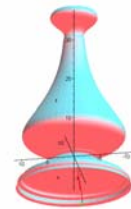
e)



f)



g)



h)

Gambar 11. Contoh hasil simulasi desain *prototype* benda onyx dan marmer

KESIMPULAN

Dari diskusi di bagian pembahasan, maka dapat disimpulkan hasilnya sebagai berikut:

1. Dengan dikenalkan parameter pengubah bentuk dasar permukaan putar Bezier, maka dapat diperoleh beragam bentuk baru permukaan putar Bezier. Dengan demikian proses dan hasil kreasi model benda onyx dan marmer menggunakan permukaan tersebut menjadi lebih mudah dan variatif.
2. Konstruksi bentuk benda onyx dan marmer dapat dilakukan melalui teknik penggabungan beberapa permukaan putar Bezier yang dilengkapi dengan beberapa parameter pengubah bentuk dasar permukaan tersebut. Tahapannya sebagai berikut. *Pertama*, tetapkan sumbu putar utama benda yang akan dibangun. *Kedua*, konstruksi secara bertahap beberapa potongan permukaan putar Bezier dalam urutan ketinggian sumbu putar naik (turun) untuk mendefinisikan masing-masing potongan bentuk luar benda onyx yang diinginkan. Dalam hal ini, konstruksi komponen benda dapat hanya menggunakan satu sumbu putar atau multi sumbu. *Ketiga*, evaluasi beberapa parameter dalam formula yang telah digunakan agar penggabungan antar dua komponen benda putar yang berdekatan, permukaannya menjadi lebih kontinyu dan alami.

Acknowledgment

Penulis mengucapkan terima kasih kepada **Pimpinan Program Insentif Riset Terapan RISTEK Tahun 2007** atas dukungan dana dalam pelaksanaan penelitian yang hasilnya antara lain berupa tulisan ini. Selanjutnya,

penulis berterima kasih juga kepada **Drs. Suwandi**, pengrajin dan pengusaha batu onyx dan marmer Desa Gamping Kecamatan Campurdarat Tulungagung, atas dukungan fasilitas yang diberikan kepada penulis dalam melaksanakan penelitian dan praktek pembuatan beberapa *prototype*/model benda onyx dan marmer di perusahaannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Du W.H. and Schmitt, J.M., 1990. On the G^1 Continuity of Piecewise Bezier Surfaces: a Review with New Results, *CAD*, **22** (9) : 556-571.
- Faux I.,D. and Pratt, M.J., 1987. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Ellis Horwood Limited, Reading.
- Hui K.C., 1999. Shape Blending of Curves and Surfaces with Geometric Continuity, *CAD*, **(31)** : 819-828.
- Karnik M., Gupta, S.K., dan Magrap, E., 2005. Geometric Algorithms for Analysis of Rotational Parts, **37** (2) : 213-230).
- Kusno, 2003. Survey Rancang Bangun Obyek dengan Kurva dan Permukaan, *Jurnal MIPA*, **32** (1) : 1-14, FMIPA Universitas Negeri Malang.
- Kusno, Hidayat, R., Santoso, K.A., 2006. Penggunaan Kurva Bezier untuk Desain Benda Pecah Belah dan Plastik Karakter Simetrik dan Putar, *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIII-Universitas Negeri Semarang*, : 747-756.
- Liu D. 1990. G^1 Continuity Conditions between two adjacent rational Bezier Surface patches. *CAGD*, **7** : 151-163.