Pusat dari Beberapa Gelanggang Polinom Miring

The Centre of Some Skew Polynomial Rings

Amir Kamal Amir
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin

ABSTRACT

Let R be any ring with identity 1, σ be an endomorphism and δ be a left σ - derivation. The Skew Polynomial Ring over R in an indeterminate x is: $R[x;\sigma,\delta]=\{f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0 \mid a_i\in R\}$ with $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$. In this paper, we will investigate the centre of some skew polynomial rings in the case when R is a commutative domain and σ is an automorphism. More precisely, let D be a commutative domain with its quotient field K and σ be an automorphism of D. Then, we will show that intersection of the centre of skew polynomial rings $D[x;\sigma]$ and $D[x;\delta]$ is a subset of the centre of skew polynomial rings $D[x;\sigma,\delta]$. On the other hand, we will also show the centre of factor skew polynomial ring $\left[D[x;\sigma]\big/f(x)D[x;\sigma]\right]$.

Keywords : Centre, skew polynomial ring

PENDAHULUAN

Gelanggang polinom miring (gelanggang tak komutatif), disimbol dengan $R[x;\sigma,\delta]$, dalam peubah tak diketahui x, adalah gelanggang yang terdiri dari polinom seperti $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ yang memenuhi aturan perkalian: $xa=\sigma(a)x+\delta(a),\forall a\in R$. Berikut diberikan definisi lengkap dari gelanggang polinom miring.

Defenisi 1.1 (McConnel & Robson 1987)
Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisma dari R, dan δ adalah suatu $\sigma-$derivatif , yaitu:
δ adalah suatu endomorfisma pada R, dengan R sebagai grup penjumlahan
$\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$ untuk setiap $a,b\in R$.
Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel x adalah gelanggang:

$$R[x;\sigma,\delta]=\{f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0 \mid a_i\in R\}$$

dengan $xa=\sigma(a)x+\delta(a),\forall a\in R$.
Suatu elemen p dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ mempunyai bentuk kanonik

$$p=\sum_{i=0}^{r}a_ix^i,\ r\in\mathbf{Z}_+=\{0,1,\cdots\},\ a_i\in R,\ i=1,2,\cdots,r.$$

Apabila $\sigma=1$ atau σ adalah suatu endomorfisma identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\delta]$. Untuk hal $\delta=0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\sigma]$. Sedangkan untuk kasus $\sigma=1$ dan $\delta=0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinom biasa.

Contoh 1.2
Misalkan $\mathbf{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. σ suatu endomorfisma pada $\mathbf{C}$ yang didefinisikan sebagai $\sigma(a+bi)=a-bi$, untuk setiap $a+bi\in\mathbf{C}$, dan $\delta=0$. Akan ditunjukkan ketidak komutatifan dalam gelanggang polinom miring $\mathbf{C}[x;\sigma]$.

$$\begin{aligned}[(2+3i)x][(4+5i)x]&=(2+3i)[x(4+5i)]x\\&=(2+3i)[\sigma(4+5i)x]x\\&=(2+3i)(4-5i)x^2=(23+2i)x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(4+5i)x][(2+3i)x]&=(4+5i)[x(2+3i)]x\\&=(4+5i)[\sigma(2+3i)x]x\\&=(4+5i)(2-3i)x^2=(23-2i)x^2\end{aligned}$$

Dewasa ini, gelanggang polinom miring banyak digunakan dalam dunia aplikasi.

Seperti yang ditunjukkan oleh Zerz (Zerz 2006), menggunakan gelanggang polinom miring untuk mentransfer sistem kontrol teori (klasik) ke dalam sistem kontrol linier abstrak. Selanjutnya pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier diterjemahkan menjadi pengkajian struktur, sifat, dan kelakuan sitem linier abstrak terkait, misalnya dengan memanfaatkan hasil-hasil yang diperoleh dalam bidang aljabar. Dengan hal yang hampir sama, Cluzeau dan Quadrat (Cluzeau & Quadrat 2006) menggunakan gelanggang polinom miring untuk mengkaji sifat-sifat sistem fungsional linier. Uraian ini memberikan penegasan bahwa pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier, yang banyak digunakan dalam dunia aplikasi akan sangat terbantu jika kita mengetahui dengan baik sifat-sifat dan struktur gelanggang polinom miring tersebut.

Definisi dari gelanggang polinom miring (gelanggang tak komutatif) ini pertamakali diperkenalkan oleh Ore (Ore 1933). Sejak kemunculan paper dari Ore (Ore 1933), Gelanggang Polinom Miring telah memerankan peran yang penting dalam teori gelanggang yang tidak komutatif dan telah banyak peneliti yang bergelut dalam teori gelanggang tak komutatif menginvestigasi bentuk gelanggang tersebut dari berbagai sudut pandang, seperti teori ideal, teori order, teori Galois, dan aljabar homologi.

Dalam hal R adalah suatu gelanggang devisi, Ore telah menginvestigasi sifat-sifat dasar dari gelanggang polinom miring seperti yang dipaparkan pada (Ore 1933). Setelah Ore, Jacobson (Jacobson 1937) telah mempelajari gelanggang polinom miring dalam hal R adalah gelanggang devisi dan σ adalah suatu automorfisma dan mendapatkan hasil seperti berikut:

Misalkan R adalah gelanggang devisi dan σ adalah suatu automorfisma dari R. Misalkan $I(R[x;\sigma,\delta])$ adalah himpunan semua polinom-polinom invariant dari $R[x;\sigma,\delta]$ dan misalkan $f(x)\in I(R[x;\sigma,\delta])$, maka $f(x)=p_1(x)\dots p_m(x)$, dimana $p_i(x)$ adalah elemen-elemen dalam $I(R[x;\sigma,\delta])$. Misalkan bahwa $\delta=0$. Jika $O(\sigma)=\infty$, maka $I(R[x;\sigma,\delta])=\{x^n \mid n=1,2,\dots\}$, yaitu himpunan semua ideal-ideal dalam $x^nR[x;\sigma,\delta]$ $(n=1,2,\dots)$. Jika $O(\sigma)=n<\infty$, maka sebarang polinom monik $f(x)\in I(R[x;\sigma,\delta])$ berbentuk $f(x)=x^l+a_{l-n}x^{l-n}+a_{l-2n}x^{l-2n}+\dots$ dengan $\sigma(a_{l-jn})=a_{l-jn}$ dan

$$a_{l-jn}\,\sigma^{l-jn}(b)=\sigma^l(b)a_{l-jn}$$

untuk setiap $b\in R$.

Selama 1957 Amitzur (Amitzur 1957) telah menginvestigasi teori ideal dari gelanggang polinom miring dalam hal R adalah suatu gelanggang devisi dan $\sigma=1$.

Hasil-hasil yang telah diperoleh oleh Jacobson dan Amitzur telah dikembangkan ke dalam kasus umum oleh Lam, Leung, Leroy dan Matczuk (Lam & Leroy 1998) dan (Lam *et al*. 1989).

Dalam tulisan ini gelanggang R yang digunakan adalah gelanggang yang merupakan daerah integral komutatif dengan elemen satuan yang selanjutnya disimbol dengan D. Lebih jelasnya, misalkan D adalah daerah integral komutatif , σ adalah suatu automorfisma dari D, dan δ adalah suatu σ-derivatif, maka akan diinvestigasi pusat dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$ dan $D[x;\delta]$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa irisan dari pusat gelanggang $D[x;\sigma]$ dan $D[x;\delta]$ adalah merupakan himpunan bagian dari pusat gelanggang $D[x;\sigma,\delta]$. Lebih jauh, dalam tulisan ini, akan ditunjukkan pusat dari gelanggang faktor

$$\left[D[x;\sigma] \big/ f(x)D[x;\sigma]\right].$$

Pengetahuan tentang pusat dari suatu gelanggang polinom miring akan sangat membantu untuk mengetahui tentang gelanggang polinom miring tersebut secara keseluruhan.

METODE

Kajian ini merupakan kajian ilmu murni yang bersifat studi literatur. Oleh karena itu, kajian ini akan menggunakan pendekatan eksploratif dan adaptasi. Khususnya, dalam hal ini akan dimanfaatkan pengetahuan yang penulis miliki dari penelitian-penelitian sebelumnya dan hasil-hasil lain yang telah ada di leteratur. Strategi yang digunakan dalam kajian ini adalah membagi proses pengkajian menjadi beberapa bagian. Dalam kajian ini proses pengkajian yang akan dilakukan dibagi dalam empat tahap.

Tahap I
Pada tahapan ini akan diinvestigasi pusat dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$, dimana δ diambil sama dengan nol. Jadi yang dikaji dalam tahapan ini hanya pusat gelanggang $R[x;\sigma]$ saja (tanpa ada δ).

Tahap II
Pada tahapan ini akan diinvestigasi pusat gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$, dimana σ diambil sama dengan 1 atau identitas. Jadi yang dikaji dalam tahapan ini hanya pusat gelanggang $R[x;\delta]$ saja (tanpa ada σ).

Tahap III
Pada tahapan ini akan diinvestigasi karakteristik dari pusat gelanggang polinomial miring $R[x;\sigma,\delta]$, (secara keseluruhan).

Tahap IV
Pada tahapan ini akan diinvestigasi karakteristik dari pusat gelanggang polinom $\left[D[x;\sigma] \big/ f(x)D[x;\sigma]\right]$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pusat dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$

Untuk pemaparan tentang pusat gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$ dibutuhkan pengertian pusat gelanggang secara umum. Oleh karena itu, Definisi dari pusat gelanggang secara umum disajikan terlebih dahulu.

Definisi 3.1 (Passman 1991)
Misalkan D adalah suatu gelanggang. Pusat dari gelanggang D disimbol dengan $\mathbf{Z}(D)$ didefinisikan seperti:

$$\mathbf{Z}(D)=\{d\in D \mid dx=xd,\ \forall x\in D\}.$$

Dengan menggunakan definisi pusat gelanggang di atas, berikut ini akan dibuktikan bahwa pusat dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$ berbentuk $S[x^n]$ dimana $S=\{a\in R \mid \sigma(a)=a\}$.

Teorema 3. 2
Misalkan D adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu automorfisma dimana terdapat suatu n bilangan asli sedemikian sehingga $\sigma^n=1$, maka $S[x^n]$ adalah pusat dari $D[x;\sigma]$, dimana $S=\{a\in D \mid \sigma(a)=a\}$.
Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa

$$S[x^n]=\{f(x)\in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x)=g(x)f(x),\ \forall g(x)\in D[x;\sigma]\}$$

, atau $S[x^n]$ adalah pusat dari $D[x;\sigma]$.
Proses pembuktian akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu :

(1). Akan ditunjukkan bahwa

$$S[x^n]\subseteq\{f(x)\in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x)=g(x)f(x),\ \forall g(x)\in R[x;\sigma]\}$$

.

Ambil $f(x)=\sum_{i=0}^{k} f_i(x^n)^i \in S[x^n]$.

$$f(x).g(x)=\left[\sum_{i=0}^{k} f_i(x^n)^i\right]\left[\sum_{i=0}^{l} g_i x^i\right]=\sum_{i=0}^{nk+l} h_i x^i$$

dengan

$$h_p=\sum_{i=0}^{p} f_i(\sigma^n)^i(g_{p-i})=\sum_{i=0}^{p} f_i\, g_{p-i}\ .$$

$$g(x).f(x)=\left[\sum_{i=0}^{l} g_i x^i\right]\left[\sum_{i=0}^{k} f_i(x^n)^i\right]=\sum_{i=0}^{nk+l} r_i x^i$$

, dengan

$$r_p=\sum_{i=0}^{p} g_i\,\sigma^i(f_{p-i})=\sum_{i=0}^{p} g_i\, f_{p-i}\ .$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa $h_p=t_p$ untuk setiap p, sehingga $f(x).g(x)=g(x).f(x)$. Oleh karena itu

$$f(x)\in\{f(x)\in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x)=g(x)f(x),\ \forall g(x)\in R[x;\sigma]\}$$

. Ini membuktikan bahwa

$$S[x^n]\subseteq\{f(x)\in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x)=g(x)f(x),\ \forall g(x)\in R[x;\sigma]\}$$

.

(2). Akan ditunjukkan bahwa

$$\{f(x)\in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x)=g(x)f(x),\ \forall g(x)\in R[x;\sigma]\}\subseteq S[x^n].$$

Ambil

$$f(x)\in\{f(x)\in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x)=g(x)f(x),\forall g(x)\in R[x;\sigma]\}.$$

Ini berarti bahwa $f(x).g(x)=g(x).f(x),\ \forall g(x)\in R[x;\sigma]$.

Misalkan $f(x)=\sum_{i=0}^{l} f_i x^i$, kemudian ambil $a\in R$, maka diperoleh

$f(x).a = a.f(x)$ atau

$\left[\sum_{i=0}^{l} f_i x^i\right].a = a.\left[\sum_{i=0}^{l} f_i x^i\right]$ atau

$\sum_{i=0}^{l} f_i\,\sigma^i(a)x^i = \sum_{i=0}^{l} af_i\,x^i$. Dari persamaan ini diperoleh persamaan $f_i\,\sigma^i(a) = af_i$, $\forall i$. Untuk setiap i dengan $i = kn$ untuk k bilangan asli berlaku $\sigma^i = 1$, dan untuk setiap i dimana $i \neq kn$ berlaku $\sigma^i \neq 1$. Akibatnya, dari persamaan $f_i\,\sigma^i(a) = af_i$ diperoleh $f_i = 0$ untuk $i \neq kn$. Dengan demikian f(x) dapat ditulis seperti:

$$f(x) = f_0 + f_n x^n + f_{2n}x^{2n} + \cdots + f_{kn}x^{kn}.$$

Selanjutnya $x.f(x) = f(x).x$ atau

$$x.\left[f_0 + f_n x^n + f_{2n}x^{2n} + \cdots + f_{kn}x^{kn}\right] = \left[f_0 + f_n x^n + f_{2n}x^{2n} + \cdots + f_{kn}x^{kn}\right].x$$

$$\sigma(f_0)x + \sigma(f_n)x^{n+1} + \sigma(f_{2n})x^{2n+1} + \cdots + \sigma(f_{kn})x^{kn+1} =$$

$$f_0 x + f_n x^{n+1} + f_{2n}x^{2n+1} + \cdots + f_{kn}x^{kn+1}$$

Dari persamaan ini, diperoleh kesamaan-kesamaan $\sigma(f_0) = f_0$, $\sigma(f_n) = f_n$, ... , dan $\sigma(f_{kn}) = f_{kn}$. Hal ini menunjukkan bahwa $f_0, f_n, \cdots, f_{kn} \in S$. Dengan demikian disimpulkan bahwa

$$f(x) = f_0 + f_n x^n + f_{2n}x^{2n} + \cdots + f_{kn}x^{kn} \in S[x^n]$$

atau

$$\{f(x) \in R[x;\sigma] \mid f(x)g(x) = g(x)f(x),\ \forall g(x) \in R[x;\sigma]\} \subseteq S[x^n].$$

Pusat dari gelanggang polinom miring $D[x;\delta]$

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa pusat dari gelanggang polinom miring $D[x;\delta]$ merupakan himpunan konstanta-konstanta yang dipetakan oleh δ ke dirinya sendiri. Teorema berikut memberikan deskripsi lengkap tentang pusat gelanggang tersebut.

Teorema 3. 3

Misalkan D adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, $\sigma = 1$, dan δ adalah suatu σ-derivatif, maka $\mathbf{Z}(D[x;\delta]) = D_\delta$, dimana $D_\delta = \{a \in D \mid \delta(a) = a\}$.

Bukti:

Proses pembuktian akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu

(i). Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{Z}(D[x;\delta]) \subseteq D_\delta$

Ambil

$$f(x) = f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0 \in \mathbf{Z}(D[x;\sigma])$$

dan $a \in D$ dengan $\delta(a) \neq 0.$ Karena $f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0 \in \mathbf{Z}(D[x;\sigma])$, maka diperoleh kesamaan

$$a\left(f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0\right) = \left(f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0\right)a.$$

Selanjutnya dengan menggunakan aturan perkalian dalam gelanggang polinom miring diperoleh kesamaan

$$af_m x^m + af_{m-1}x^{m-1} + \cdots + af_0 = f_m\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\delta^k(a)x^{m-k}\right)x^m +$$
$$f_{m-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\delta^k(a)x^{m-1-k}\right) + \cdots + f_0 a$$

Dengan mencermati bentuk deret di ruas kanan, dapat terlihat bahwa koefisien x^{m-1} diruas kanan adalah $f_n.n.\delta(a) + f_{n-1}a$. Oleh karena itu, dengan menyamakan ruas kiri dan kanan diperoleh kesamaan $af_{n-1} = f_n.n.\delta(a) + f_{n-1}a$. Karena $\delta(a) \neq 0$, maka diperoleh $f_n = 0$. Sehingga bentuk dari $f(x)$ adalah

$$f(x) = f_{m-1}x^{m-1} + f_{m-2}x^{m-2} + \cdots + f_0.$$

Mengulangi proses pembuktian seperti di atas, secara berturut turut dapat ditunjukkan bahwa $f_{n-1} = 0,\ f_{n-2} = 0,\ \ldots, f_1 = 0$. Sehingga $f(x) = f_0$. Untuk melengkapi pembuktian pada bagian ini, akan ditunjukkan bahwa $f_0 \in D_\delta$ atau $\delta(f_0)$. Karena $f(x) = f_0 \in \mathbf{Z}(D[x;\sigma])$, maka $f_0 x = xf_0 = f_0 x + \delta(f_0)$. Dari sini diketahui $\delta(f_0) = 0$ atau $f(x) = f_0 \in D_\delta$. Sehingga terbukti bahwa $\mathbf{Z}(D[x;\delta]) \subseteq D_\delta$.

(2). Akan ditunjukkan bahwa $D_\delta \subseteq \mathbf{Z}(D[x;\delta])$.

Ambil $a \in D_\delta$ berarti $\delta(a) = 0$. Untuk setiap

$$f(x) = f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0 \in \mathbf{Z}(D[x;\sigma])$$

berlaku

$$af(x) = af_m x^m + af_{m-1}x^{m-1} + \cdots + af_0.$$

Karena $\delta(a)=0$, maka diperoleh kesamaan

$$af(x)=af_m x^m + af_{m-1}x^{m-1}+\cdots+af_0 = f_m x^m a + f_{m-1}x^{m-1}a+\cdots+f_0 a$$
$$=\left(f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1}+\cdots+f_0\right)a = f(x)a.$$

Karena $af(x)=f(x)a$, maka $a\in \mathbf{Z}\left(D[x;\delta]\right)$, sehingga terbukti $D_\delta \subseteq \mathbf{Z}\left(D[x;\delta]\right)$. □

Pada bagian 3.1 dipaparkan bentuk dari pusat gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$. Sedangkan pada bagian 3.2 ini, dipaparkan bentuk dari pusat gelanggang polinom miring $D[x;\delta]$. Hasil-hasil tersebut akan digunakan untuk menyelidiki bentuk dari pusat gelanggang polinom miring $D[x;\sigma,\delta]$. Hasil berikut ini menunjukkan bahwa irisan dari pusat gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$ dengan pusat gelanggang polinom miring $D[x;\delta]$ merupakan himpunan bagian dari pusat gelanggang polinom miring $D[x;\sigma,\delta]$.

Teorema 3. 4

Misalkan D adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu automorfisma dimana terdapat suatu n bilangan asli sedemikian sehingga $\sigma^n=1$, dan δ adalah suatu σ-derivatif, maka

$$\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]\right)\cap\mathbf{Z}\left(D[x;\delta]\right)\subseteq\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma,\delta]\right)$$

atau $S[x^n]\cap D_\delta\subseteq\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma,\delta]\right)$.

Bukti:

Ambil $a\in S[x^n]\bigcap D_\delta$. Hal ini berarti $a\in S[x^n]$ dan $a\in D_\delta$. Oleh karena itu $\sigma(a)=a$ dan $\delta(a)=0$. Untuk setiap $f(x)=f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1}+\cdots+f_0\in D[x;\sigma,\delta]$ diperoleh

$$af(x)=a\left(f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1}+\cdots+f_0\right).$$
$$=f_m(ax^m)+f_{m-1}(ax^{m-1})+\cdots+(af_0)$$

Karena $\sigma(a)=a$ dan $\delta(a)=0$, maka $ax^m=x^m a$, untuk setiap m, sehingga dari persamaan di atas diperoleh

$$af(x)=f_m(ax^m)+f_{m-1}(ax^{m-1})+\cdots+(af_0)$$
$$=f_m(x^m a)+f_{m-1}(x^{m-1}a)+\cdots+(f_0 a)$$
$$=\left(f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1}+\cdots+f_0\right)a$$
$$=f(x)a.$$

Jadi terbukti $a\in\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma,\delta]\right)$.

Pusat dari gelanggang polinom miring $\left[{D[x;\sigma]}/{f(x)D[x;\sigma]}\right]$.

Teori berikut ini menunjukkan bahwa, dalam kondisi tertentu, pusat gelanggang faktor dari gelanggang polinom miring akan sama dengan gelanggang faktor dari pusat gelanggang polinom miring.

Teorema 3. 5

Misalkan D adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu automorfisma dimana terdapat suatu n bilangan asli sedemikian sehingga $\sigma^n=1$, dan δ adalah suatu σ-derivatif. Misalkan juga bahwa $f(x)\in S[x^n]$, $P=f(x)D[x;\sigma]$, dan $p=P\bigcap\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]\right)$, maka

$$\mathbf{Z}\left({D[x;\sigma]}/{P}\right)={\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]\right)}/{p}.$$

Bukti:

Proses pembuktian akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu

(1). Akan ditunjukkan bahwa ${\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]\right)}/{p}\subseteq\mathbf{Z}\left({D[x;\sigma]}/{P}\right)$.

Ambil $f(x)+p\in{\mathbf{Z}(D[x;\sigma)}/{p}$ dengan $f(x)\in\mathbf{Z}(D[x;\sigma])\setminus p$. Ambil juga $g(x)+P\in{D[x;\sigma]}/{P}$ dengan $g(x)\in D[x;\sigma]\setminus P$. Dengan menggunakan definsi perkalian anggota ${\mathbf{Z}(D[x;\sigma])}/{p}$ dengan ${D[x;\sigma]}/{P}$ dan mengetahui bahwa $p\subseteq P$, maka diperoleh

$$\left[f(x)+p\right]\left[g(x)+P\right]=\left[\left(f(x)g(x)\right)+P\right]$$
$$=\left[\left(g(x)f(x)\right)+P\right]$$
$$=\left[g(x)+P\right]\left[f(x)+p\right]$$

.

Dari sini disimpulkan bahwa $f(x)+p\in\mathbf{Z}\left({D[x;\sigma]}/{P}\right)$. Dengan demikian terbukti bahwa ${\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]\right)}/{p}\subseteq\mathbf{Z}\left({D[x;\sigma]}/{P}\right)$.

(2). Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{Z}\left({D[x;\sigma]}/{P}\right)\subseteq{\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]\right)}/{p}$.

Ambil $g(x)+P \in \mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]/P\right)$. Karena $P = f(x)D[x;\sigma]$ dengan $f(x) \in S[x^n]$, maka tanpa mengurangi berlaku umumnya pembuktian dapat dimisalkan $g(x) = g_{n-1}x^{n-1} + g_{n-2}x^{n-2} + \cdots + g_0$. Ambil $a \in D$, maka $a \notin P$. Jadi $a + P \in D[x;\sigma]/P$. Karena $g(x)+P \in \mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]/P\right)$, maka diperoleh persamaan

$$[g(x)+P][a+P] = [a+P][g(x)+P]$$

$$(g(x)a)+P = [ag(x)+P].$$

Karena $g(x)a,\ ag(x) \notin P$, maka dari persamaan di atas diperoleh $g(x)a = ag(x)$. Sehingga

$$a\left(g_{n-1}x^{n-1} + g_{n-2}x^{n-2} + \cdots + g_0\right) = \left(g_{n-1}x^{n-1} + g_{n-2}x^{n-2} + \cdots + g_0\right)a.$$

Menggunakan definisi perkalian dalam gelanggang polinom miring, kemudian membandingkan koefisien suku ruas kiri dengan kanan, diperoleh persamaan: $g_i\sigma^i(a) = ag_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sehingga $g(x) = g_0$. Karena $\sigma^i \neq 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$, maka $g_i = 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Selanjutnya, karena $g(x)+P \in \mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]/P\right)$, maka

$$[g(x)+P][x+P] = [x+P][g(x)+P]$$

$$[g_0+P][x+P] = [x+P][g_0+P]$$

$$(g_0x)+P = (xg_0)+P.$$

Karena $g_0x,\ xg_0 \notin P$, maka disimpulkan $g_0x = xg_0 = \sigma(g_0)x$. Dari sini diperoleh $\sigma(g_0) = g_0$ yang membuktikan bahwa $g(x) = g_0 \in \mathbf{Z}(D[x;\sigma])$ sehingga $g(x)+P \in \mathbf{Z}(D[x;\sigma])/p$. Dengan demikian terbukti bahwa $\mathbf{Z}\left(D[x;\sigma]/P\right) \subseteq \mathbf{Z}(D[x;\sigma])/p$.

KESIMPULAN

Untuk mengetahui pusat dari gelanggang $D[x;\sigma,\delta]$ dapat diperoleh dengan mencari pusat dari gelanggang $D[x;\sigma]$ dan $D[x;\delta]$ terlebih dahulu. Selanjutnya, dengan menggunakan pengetahuan tentang pusat gelanggang $D[x;\sigma]$ dan $D[x;\delta]$, pusat gelanggang $D[x;\sigma,\delta]$ dapat dicari.

Untuk mengetahui pusat dari gelanggang $\left[D[x;\sigma]/f(x)D[x;\sigma]\right]$ dapat diperoleh dengan mencari pusat dari gelanggang $D[x;\sigma]$ terlebih dahulu. Selanjutnya, dengan menggunakan pengetahuan tentang pusat gelanggang $D[x;\sigma]$, pusat gelanggang $\left[D[x;\sigma]/f(x)D[x;\sigma]\right]$ dapat dicari.

DAFTAR PUSTAKA

Amir AK, Astuti P & Muchtadi-Alamsyah I. 2008. Sekitar ideal maksimal dari pusat gelanggang polinom miring atas daerah Dedekind. *Prosiding Konferensi nasional Matematika* **XIV**. Palembang.

Amir AK, Astuti P, & Muchtadi-Alamsyah I. 2008. Around prime and maximal ideals of skew polynomial ring over a Dedekind domain, Poceeding *The 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3)*. Bogor.

Amitsur S. 1957. Derivations in simple rings. *Proc. London Math. Soc*: **7**. 87-112

Cluzeau T & Quadrat A. 2006. *Using morphism computations for factoring and decomposing general linear functional systems*. INRIA Sophia Antipolis report.

Jacobson N. 1937. Pseudo-linear transformations. *Annals of Math*. **38**: 484-507.

Lam TY & Leroy A. 1998. *Algebraic conjugasy classess and skew polynomial rings. Proceedings of the Antwerp Conf. in Ring Theory*. Kluwer Academic Publishers.

Lam TY, Leung KH, Leroy A & Matczuk J. 1989. Invariant and semi invariant polynomilas in skew polynomial rings. *Israel Math. Conf. Proceedings* **1:** 247-261.

Mc Connell JC & Robson JC. 1987. *Noncommutative Noetehrian Rings*. John Wiley and Sons. Inc.

Passman DS. 1991. *A Course in Ring Theory*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.

Ore O. 1933. Theory of non-Commutative polynomials. *Annals of Math*. **34**: 480-508.

Zerz E. 2006. *Algebraic Systems Theory*. Lehrstuhl fur Mathematik RWTH Aachen.