Estimator Robust S Pada Model Seemingly Unrelated Regression

The S Robust Estimator in Seemingly unrelated Regression Model

Suliyanto
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Airlangga

ABSTRACT

Regression parameter estimation is mainly used to describe the effect of dependent variable to the response variable. On development of it, parameter estimation is also used to case of multivariate regression. Seemingly Unrelated Regression model is one of regression multivariate cases which has especially assumption, i.e., correlation between errors on the multivariate regression. Robust S is one of robust estimation methods. This estimation can be resistant in presence of outlier in the data. In this research, we studied about parameter estimation for Seemingly Unrelated Regression model using robust S. We applied the model obtained to General Electric and Westinghouse data from 1935 to 1954

Keywords: Seemingly Unrelated Regression Model, Robust S Estimation.

PENDAHULUAN

Model regresi linier berganda merupakan perluasan dari model regresi linier sederhana. Model regresi linier berganda terdiri atas variabel respon yang bergantung pada dua atau lebih variabel bebas. Model regresi linier berganda multivariat pada dasarnya dibagi menjadi tiga model, yaitu model tunggal, model simultan, dan model Seemingly Unrelated Regression (SUR). Model tunggal adalah model yang terdiri atas beberapa macam persamaan tetapi antara persamaan-persamaan tersebut tidak saling berkaitan. Model Simultan adalah suatu model yang terdiri dari beberapa persamaan yang saling terkait, artinya suatu variabel bebas pada persamaan yang satu berfungsi sebagai variabel respon pada persamaan yang lain atau sebaliknya.

SUR adalah suatu model yang terdiri dari beberapa persamaan dan variabel-variabelnya tidak bersifat dua arah, akan tetapi antara persamaan-persamaan tersebut terjadi kaitan satu sama lainnya sehingga terjadi korelasi antara galat-galat persamaan tersebut (Zellner 1962). Estimasi parameter model SUR diperkenalkan oleh Greene (2000) yang dilakukan dengan metode Generalized Least Square (GLS). Metode ini merupakan pengembangan dari metode Ordinary Least Square (OLS) yang digunakan untuk model multivariat. Model SUR memiliki matriks kovarian antar persamaan untuk menunjukkan korelasi error antar persamaan. Jika matriks kovarian tidak diketahui maka dilakukan pendugaan matriks kovarian dengan metode two stage Aitken (Zellner 1962). Namun metode ini kurang mampu bertahan terhadap kehadiran outlier.

Estimasi robust S adalah salah satu bentuk estimasi yang digunakan pada data yang memuat outlier. Estimator robust S untuk kasus regresi linier berganda telah dibahas oleh Kumala (2005). Dalam perkembangannya estimator robust S juga dapat diterapkan pada model SUR. Pada penelitian ini dibahas cara mendapatkan estimator model SUR dengan metode robust S tetapi tidak dibahas sifat-sifat estimatornya, kemudian model tersebut diterapkan pada data sekunder.

Model seemingly unrelated regression

Sistem persamaan regresi multivariat dinyatakan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{10} + \beta_{11} X_{1t,1} + \beta_{12} X_{1t,2} + \dots + \beta_{1p_1} X_{1t,p_1} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= \beta_{20} + \beta_{21} X_{2t,1} + \beta_{22} X_{2t,2} + \dots + \beta_{2p_2} X_{2t,p_2} + \varepsilon_{2t} \\
&\vdots \\
y_{qt} &= \beta_{q0} + \beta_{q1} X_{qt,1} + \beta_{q2} X_{qt,2} + \dots + \beta_{qp_q} X_{qt,p_q} + \varepsilon_{qt}
\end{aligned}
\quad (1)
$$

untuk t = 1,2, … , n .

Persamaan (1) juga dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut :

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1, \\ \vdots \\ \mathbf{y}_q = \mathbf{X}_q\boldsymbol{\beta}_q + \boldsymbol{\varepsilon}_q, \end{cases} \quad (2)$$

dengan y_i dan ε_i adalah vektor $n \times 1$, X_i adalah matrik $n \times (p_i + 1)$, β_i adalah vektor $(p_i + 1) \times 1$, dengan asumsi $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_{ii}\text{I}_n$, untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Jika pada persamaan (2) ditambahkan asumsi khusus yaitu $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij}\text{I}_n$, untuk $i, j = 1,2,\ldots,q$, maka sistem persamaan regresi multivariat tersebut dikenal dengan model Seemingly Unrelated Regression (SUR).

Model SUR pada persamaan (2) secara umum dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

dengan y = $(y_1^T, \ldots, y_q^T)^T$, ε = $(\varepsilon_1^T, \ldots, \varepsilon_q^T)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)^T$ dan

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_q \end{pmatrix}$$

dengan asumsi $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ dan $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n$,

dimana

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1q} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q1} & \sigma_{q2} & \cdots & \sigma_{qq} \end{pmatrix}$$

Model SUR pada persamaan (3) juga dapat ditulis dengan menggunakan regresi multivariat :

$$\mathbf{Y} = \widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{B} + \mathbf{E} \quad (4)$$

dimana

$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_q)$, $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^T$

dengan $\mathbf{e}_i = (\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \ldots, \varepsilon_{qi})^T$ adalah vektor $q \times 1$, $\widetilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_q)$, dan

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\beta}_q \end{pmatrix}$$

Estimasi untuk $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\beta}}_q)^T$ dan untuk $\boldsymbol{\Sigma}$ (Bilodeau & Duchesne 2000) adalah :

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^T \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_q^T \end{pmatrix}\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \quad \ldots \quad, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_q\right)$$

atau

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{(\mathbf{Y} - \widetilde{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \widetilde{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{B}})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_i' \quad (5)$$

ESTIMATOR ROBUST S

Misalkan ρ adalah sebuah fungsi sedemikian sehingga berlaku :

(i) ρ adalah simetris dan kontinu, serta ρ (0) = 0 ;

(ii) ρ adalah fungsi naik pada [0, c] dan konstan pada [c, ∞] untuk c >0 ;

(iii) $\lambda = \dfrac{b}{\rho(c)}$, dengan $b = E_\Phi \rho(c)$ dan $\Phi(x)$ adalah fungsi distribusi Normal baku, $0 < \lambda \le 0{,}5$.

Fungsi ρ didefinisikan sebagai berikut (Rousseuw dan Yohai, 1984) :

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{2c^2} + \dfrac{x^6}{6c^4} & jika\ |x| \le c \\ \dfrac{c^2}{6} & jika\ |x| > c \end{cases} \quad (6)$$

Estimator robust S pada model SUR adalah penyelesaian dari masalah optimasi :

$$\min_{(\beta,\Sigma)}|\Sigma|, \text{dengan kendala} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho\left\{\left(\mathbf{e}_i'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}_i\right)^{1/2}\right\} = b \quad (7)$$

dengan memilih $b = E_{\Phi}\rho(c)$, $\Phi(x)$ adalah fungsi distribusi normal baku dan $\lambda = b/\rho(c)$ adalah breakdown point (Ruppert, 1992). Jika ρ seperti pada persamaan (6) dan

$$b = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)d\Phi(x) = \int_{-\infty}^{-c}\rho(x)d\Phi(x) + \int_{-c}^{c}\rho(x)d\Phi(x) + \int_{c}^{\infty}\rho(x)d\Phi(x) \quad (8)$$

Maka diperoleh :

$$b = \int_{-\infty}^{-c}\frac{c^2}{6}d\Phi(x) + \int_{-c}^{c}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2c^2} + \frac{x^6}{6c^4}\right)d\Phi(x) + \int_{c}^{\infty}\frac{c^2}{6}d\Phi(x)$$

$$b = \int_{-\infty}^{-c}\frac{c^2}{6}\phi(x)dx + \int_{-c}^{c}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2c^2} + \frac{x^6}{6c^4}\right)\phi(x)dx + \int_{c}^{\infty}\frac{c^2}{6}\phi(x)dx$$

$$b = \int_{-\infty}^{-c}\frac{c^2}{6}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx + \int_{-c}^{c}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2c^2} + \frac{x^6}{6c^4}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx + \int_{c}^{\infty}\frac{c^2}{6}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

dengan c adalah suatu konstanta. Menurut Marazzi dan Randriamihariosa (1993), jika dipilih c =1,547 maka akan diperoleh nilai breakdown sebesar 50 %.

Estimator robust S pada persamaan (7) dipenuhi oleh persamaan estimasi (Bilodeau & Duchesne 2000) :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \{\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{D}_u)\mathbf{X}\}^{-1}\mathbf{X}^T(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{D}_u)\mathbf{y} \quad (9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = q(\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{B})^T\mathbf{D}_u(\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{B}) / \sum_{i=1}^{n} v(d_i) \quad (10)$$

dengan

$d_i = \mathbf{e}_i' \Sigma^{-1}\mathbf{e}_i$, $\mathbf{D}_u = diag\{u(d_i)\}$,

$u(d_i) = \rho'(d_i)/d_i$,

$v(d_i) = \rho'(d_i)d_i - \rho(d_i) + b$,

dan nilai $\rho'(x)$ adalah sebagai berikut :

$$\rho'(x) = \begin{cases} x - \dfrac{2x^3}{c^2} + \dfrac{x^5}{c^4} &, \ jika\ |x| \le c \\ 0 &, \ jika\ |x| \ge c \end{cases} \quad (11)$$

Nilai koefisien determinasi R2 berada dalam batas $0 \le R^2 \le 1$ dan didefinisikan sebagai berikut (Rousseuw & Leroy, 2003) :

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\text{med}|\varepsilon_{it}|}{\text{mad}(y_{it})}\right)^2 \quad (12)$$

dengan

$\text{mad}(y_{it}) = \text{med}\{|y_{it} - \text{med}(y_{it})|\}$, i = 1,2, … ,q dan t = 1,2, … ,n

Estimasi parameter pada model SUR dengan metode robust S merupakan pengembangan dari metode robust S pada regresi linier berganda yang telah dibahas oleh Kumala (2005).

Estimasi robust S memberikan bobot pada n pengamatan pada residual multivariat $\mathbf{e}_i$ pada model SUR dari persamaan (4). Estimasi robust S untuk mengestimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ yang berturut-turut dinyatakan oleh $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ diselesaikan dengan algoritma Ruppert termodifikasi. Langkah-langkah algoritma Ruppert termodifikasi dibangun dengan mendefinisikan :

$$\Delta(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = (\Delta_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}), \Delta_2(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})) \quad (13)$$

dimana fungsi Δ_1 dan Δ_2 berturut-turut adalah nilai $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ setelah satu kali iterasi dari masing-masing persamaan estimasi (9) dan (10). Dalam metode ini nilai dugaan awal $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yang digunakan adalah estimasi yang diperoleh dengan menggunakan metode ordinary least square.

Algoritma estimator robust S pada model SUR

Proses perhitungan untuk mendapatkan hasil dari estimasi robust S model SUR tidak mempunyai bentuk baku (close form), sehingga didekati dengan suatu algoritma. Secara rinci algoritma estimator Robust S pada model SUR dijelaskan sesuai dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1

Mengambil $\tilde{s}$ cukup besar.

Langkah 2

Menghitung $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, dengan cara sebagai berikut :

a. memilih sub sampel acak sebesar p dari data berukuran n dengan metode resampling bootstrap untuk setiap persamaan (1) ;
b. menghitung estimator awal $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}$, i = 1,2,…,q dari langkah 2 point (a) dengan menggunakan estimator OLS dari persamaan (1) ;

c. mendapatkan

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^{(1)} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^{(q)} \end{pmatrix}$$

dan

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^{(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^{(2)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{\beta}}^{(q)} \end{pmatrix};$$

d. menghitung matrik kovarian $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = (\mathbf{Y} - \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{B}})^T(\mathbf{Y} - \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{B}})/n$, dengan Y dan $\widetilde{\mathbf{X}}$ seperti pada persamaan (4).

Langkah 3

Menghitung nilai $b = E_{\Phi}\rho(c)$ dengan menggunakan persamaan (8).

Langkah 4

Menghitung $\boldsymbol{\beta}_{J,0}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{J,0}$, dengan cara sebagai berikut :

a. memilih sub sampel acak sebesar p dari data berukuran n dengan metode resampling bootstrap untuk setiap persamaan (1) ;
b. menghitung estimator $\boldsymbol{\beta}_{J,0}^{(i)}$, i = 1,2,…,q dari langkah 4 point (a) dengan menggunakan estimator OLS dari persamaan (1) ;
c. mendapatkan

$$\boldsymbol{\beta}_{J,0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_{J,0}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{J,0}^{(q)} \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{B}_{J,0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_{J,0}^{(1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}_{J,0}^{(2)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{J,0}^{(q)} \end{pmatrix}$$

d. menghitung matrik kovarian

$$\boldsymbol{\Sigma}_{J,0} = (\mathbf{Y} - \widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{B}_{J,0})'(\mathbf{Y} - \widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{B}_{J,0})/n$$

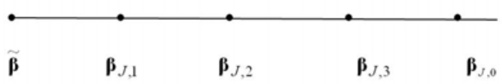
dimana Y dan $\widetilde{\mathbf{X}}$ seperti pada persamaan (4).

Langkah 5

Mencari titik-titik pada segmen garis yang menghubungkan $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\boldsymbol{\beta}_{J,0}$ yang dinyatakan oleh

$$\boldsymbol{\beta}_{J,j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_{J,j}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{J,j}^{(q)} \end{pmatrix}, \text{ j = 1,2, … ,n}$$

Bilodeau & Duchesne (2000) merekomendasikan tiga titik berbeda yang terletak pada segmen garis yang menghubungkan dua titik. Dalam hal ini $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\boldsymbol{\beta}_{J,0}$ masing-masing menjadi titik awal dan titik akhir.



Segmen garis yang menghubungkan $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ dan $\boldsymbol{\beta}_{J,0}$ terbagi menjadi empat ruas garis yang masing-masing memiliki peluang 0,25, sehingga masing-masing nilai $\boldsymbol{\beta}_{J,j}$ untuk j = 1,2, … ,nr adalah

$$\beta_{J,1} = 0{,}25\beta_{J,0} + 0{,}75\widetilde{\beta}$$

$$\beta_{J,2} = 0{,}5\beta_{J,0} + 0{,}5\widetilde{\beta}$$

dan

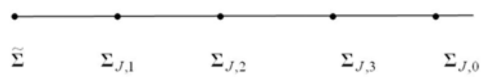
$$\beta_{J,3} = 0{,}75\beta_{J,0} + 0{,}25\widetilde{\beta}$$

Langkah 6

Mencari titik-titik pada segmen garis yang menghubungkan $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{J,0}$ dan dinyatakan oleh

$$\boldsymbol{\Sigma}_{J,j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{J,j}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{J,j}^{(q)} \end{pmatrix}, \text{ j = 1, 2, ... ,nr.}$$

Bilodeau dan Duchesne (2000) merekomendasikan tiga titik berbeda yang terletak pada segmen garis yang menghubungkan dua titik awal.



Segmen garis yang menghubungkan $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_{J,0}$ terbagi menjadi empat ruas garis yang masing-masing memiliki peluang 0,25, sehingga masing-masing nilai $\boldsymbol{\beta}_{J,j}$ untuk j = 1, 2,... ,nr adalah

$$\boldsymbol{\Sigma}_{J,1} = 0{,}25\boldsymbol{\Sigma}_{J,0} + 0{,}75\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{J,2} = 0{,}5\boldsymbol{\Sigma}_{J,0} + 0{,}5\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$$

dan

$$\boldsymbol{\Sigma}_{J,3} = 0{,}75\boldsymbol{\Sigma}_{J,0} + 0{,}25\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$$

Langkah 7

Untuk j = 0,1,…,nr, $\mathbf{C}_{J,j} \leftarrow \left|\boldsymbol{\Sigma}_{J,j}\right|^{-1/q} \boldsymbol{\Sigma}_{J,j}$

Langkah 8

Untuk j = 0,1, … , nr, jika

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho\left\{\left(\mathbf{e}_i^T \mathbf{C}_{J,j}^{-1} \mathbf{e}_i\right)^{1/2} / \tilde{s}\right\} \geq b$$

maka iterasi selesai, tetapi jika

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho\left\{\left(\mathbf{e}_i^T \mathbf{C}_{J,j}^{-1} \mathbf{e}_i\right)^{1/2} / \tilde{s}\right\} < b$$

dilanjutkan ke langkah berikut :

a. $\tilde{\boldsymbol{\beta}} \leftarrow \boldsymbol{\beta}_{J,j}$

b. $\tilde{s} \leftarrow s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j})$ dengan $s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j})$ penyelesaian dari :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho\left\{\left(\mathbf{e}_i^{'} \mathbf{C}_{J,j}^{-1} \mathbf{e}_i\right)^{1/2} / s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j})\right\} = b \qquad (14)$$

Untuk mendapatkan nilai lokal minimum dari $s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j})$ pada persamaan (14) digunakan metode iterasi Newton-Raphson dengan input nilai awal tertentu, yaitu :

$$(s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_{k+1} = (s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_k - \frac{f((s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_k)}{f'((s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_k)}$$

dengan

$$f((s(\tilde{\beta}, C_{J,j}))_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho\left\{\left(e_i^T C_{J,j} e_i\right) / (s(\tilde{\beta}, C_{J,j}))_k\right\} - b$$

dan

$$f^{'}((s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_k) = \frac{\partial f((s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_k)}{\partial((s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}_{J,j}))_k)} .$$

c. $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \leftarrow \tilde{s}^2 \mathbf{C}_{J,j}$.

d. mencari bilangan bulat terkecil $0 \leq m(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) \leq 10$, yang memenuhi :

i. $\tilde{\boldsymbol{\beta}} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\beta}}(1-2^{-m}) + \Delta_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})2^{-m}$,

dengan $\Delta_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ adalah penyelesaian dari (9);

ii. $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(1-2^{-m}) + \Delta_2(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})2^{-m}$,

dengan $\Delta_2(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})$ adalah penyelesaian dari (10) ;

iii. $\mathbf{C} \leftarrow \left|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\right|^{-1/q} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$;

iv. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho\left\{\left(\mathbf{e}_i^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_i\right)^{1/2} / \tilde{s}\right\} < b$.

Langkah 9

Mengulang langkah 4 sampai 8 sebanyak n kali sampai didapat bilangan terkecil m, inputkan

$$\tilde{s} \leftarrow s(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{C}), \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \leftarrow \tilde{s}^2 \mathbf{C}$$

dan

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\beta}}(1-2^{-m}) + \Delta_1(\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}})2^{-m}$$

Langkah 10

Menghitung koefisien determinasi dengan menggunakan persamaan (12).

PENERAPAN

Penerapan estimator robust S pada model SUR menggunakan data sekunder yang diambil dari hasil penelitian Grunfeld (1958) dalam Judge *et al.* (1982). Data model SUR telah memenuhi asumsi-asumsi khusus. Data ini menjelaskan tentang jumlah investasi tahunan dua perusahaan di Amerika yang bergerak dalam bidang yang sama yaitu pembuatan mesin pesawat jet. Dua perusahaan yang dilibatkan disini adalah General electric (GE) dan Westinghouse(WH). Jumlah investasi sebagai variabel dependen. Harga penjualan dan stok total sebagai variabel bebas. Model regresi yang digunakan adalah sebagai berikut :

(Jumlah investasi GE) = $\boldsymbol{\beta}_{10}$ + $\boldsymbol{\beta}_{11}$ (harga penjualan GE) + $\boldsymbol{\beta}_{12}$ (stok total GE)

(Jumlah investasi WH) = $\boldsymbol{\beta}_{20}$ + $\boldsymbol{\beta}_{21}$ (harga penjualan WH) + $\boldsymbol{\beta}_{21}$ (stok total WH)

Jumlah pengamatan sebanyak 20 yaitu pengamatan berturut-turut dari tahun 1935-1954. Datanya disajikan pada Tabel 1.

Untuk selanjutnya variabel y_1, y_2, X_{11}, X_{21} , X_{12}, dan X_{22} berturut-turut menjelaskan jumlah investasi GE, jumlah investasi WH, harga penjualan GE, harga penjualan WH, stok total GE, dan stok total WH. Sehingga model regresi yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$y_1 = \beta_{10} + \beta_{11} X_{11} + \beta_{12} X_{12} + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \beta_{20} + \beta_{21} X_{21} + \beta_{22} X_{22} + \varepsilon_2 \quad (15)$$

Program komputer untuk mengestimasi parameter model SUR dengan menggunakan estimator robust S dibuat dengan bahasa pemrograman yang tersedia di S-Plus 2000. Hasilnya secara ringkas disajikan pada Tabel 2.

Berdasarkan Tabel 2 didapat hasil estimasi model SUR. sebagai berikut :

$$y_1 = -37{,}89448495 + 0{,}04209415 X_{11} + 0{,}16786478 X_{12}$$
$$y_2 = 15{,}29550734 + 0{,}01309584 X_{21} + 0{,}26641302 X_{22} \quad (16)$$

dengan R^2 = 0,8802155

Tabel 1. Data Sekunder General Electric dan Westinghouse tahun 1935-1954

y_{1t}	$X_{1t,1}$	$X_{1t,2}$	y_{2t}	$X_{2t,1}$	$X_{2t,2}$
11,3178	1170,6	97,8	10,9348	191,5	1,8
80,3581	2015,8	104,4	38,5463	516	0,8
90,2841	2803,3	118	36,9759	729	7,4
83,0991	2039,7	156,2	37,0381	560,4	18,1
55,0247	2256,2	172,6	22,2987	519,9	23,5
44,7318	2132,2	186,6	15,3332	628,5	26,5
84,9829	1834,1	220,9	37,0427	537,1	36,2
99,9387	1588	287,8	35,4941	561,2	60,8
107,947	1749,4	319,9	38,9034	617,2	84,4
101,311	1687,2	321,3	58,0168	626,7	91,2
89,3714	2007,7	319,6	44,0455	737,2	92,4
138,92	2208,3	346	51,7816	760,5	86
98,1969	1656,7	456,4	30,207	581,4	111,1
110,585	1604,4	543,4	54,4416	662,3	130,6
116,509	1431,8	618,3	45,5923	583,8	141,8
138,573	1610,5	647,4	44,0503	635,2	136,7
164,167	1819,4	671,3	60,3298	723,8	129,7
141,249	2079,7	726,1	56,2601	864,1	145,5
198,478	2371,6	800,3	95,0585	1193,5	174,8
234,675	2759,9	888,9	97,455	1188,9	213,5

Tabel 2. Hasil Estimasi Parameter Model SUR metode *Robust S*

	persamaan 1	persamaan 2
$\tilde{\beta}_0$	-37,89448495	15,29550734
$\tilde{\beta}_1$	0,04209415	0,01309584
$\tilde{\beta}_2$	0,16786478	0,26641302
Koefisien determinasi	0,8802155	

KESIMPULAN

Hasil estimasi parameter model SUR dengan metode robust S yang diterapkan pada data General Electric dan Westinghouse (1935-1954) adalah :

$$y_1 = -37{,}89448495 + 0{,}04209415 X_{11} + 0{,}16786478 X_{12}$$
$$y_2 = 15{,}29550734 + 0{,}01309584 X_{21} + 0{,}26641302 X_{22}$$

dengan variabel y_1, y_2, X_{11}, X_{21}, X_{12}, dan X_{22} berturut-turut menjelaskan jumlah investasi GE, jumlah investasi WH, harga penjualan GE, harga penjualan WH, stok total

GE, dan stok total WH. Nilai koefisien determinasi $R^2 = 0,8802155$.

DAFTAR PUSTAKA

Bilodeau & Duchesne, 2000, Robust Estimation of The SUR Model, *The Canadian Journal of Statistics*, Canada.www.dms.umontreal.ca/~duchesne/sur.pdf. 8 Agustus 2005.

Efron B & Tibshironi RJ, 1993, *Introduction to The Bootstrap*, Chapman Hall, USA.

Greene H & William, 2000, *Econometric Analysis*, 4thedition, Prentice Hall Inc, USA.

Judge, 1982, *Introduction to The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley and Sons, New York.

Kumala N, 2005, *Estimasi Parameter Regresi Linier Berganda Dengan Metode Robust S*, Skripsi FMIPA Universitas Airlangga, Surabaya.

Marazzi A, Joss J, Randriamihariosa A, 1993, *Algorithms, Routines, and S Functions for Robust Statistics*, Chapman & Hall, New York.

Rousseuw PJ & Leroy AM, 2003, *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley Interscience, New York

Ruppert D, 1992, Computing S Estimators for Regression and Multivariate Location / Dispersion, *American Statistical Association, Institute of Mathematical Statistics, and Interface Foundation of North America*, Ithaca, NY.

Rousseuw PJ & Yohai VJ, 1984, Robust regression by means of S-estimator. *Robust and Nonlinear Time Series Analysis*, Lecture Notes in Statist, **26**: 256-272, Springer, Berlin.

Zellner A.,1962. An Efficient Methods of Estimation SUR and Test for Aggregation Bias. Journal of American Statistical Association, **57**: 348 – 368.