Syarat Derivasi Pada Near-Ring Prima Untuk Ring Komutatif

Derivation Requirements on Prime Near-Rings for Commutative Rings

Dian Winda Setyawati*), Mochammad Reza Habibi, Komar Baihaqi
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
*Email: dian_ws_math@matematika.its.ac.id

ABSTRACT

Near-ring is an extension of ring without having to fulfill a commutative of the addition operations and left distributive of the addition and multiplication operations. It has been found that some theorems related to a prime near-rings are commutative rings involving the derivation of the Lie products and the derivation of the Jordan product. The contribution of this paper is developing the previous theorem by inserting derivations to the Lie products and the Jordan product.

Keywords: Derivation, Prime Near-Ring, Lie Products and Jordan Products

---

PENDAHULUAN

Suatu himpunan dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian berlaku distributif kanan belum tentu berlaku distributif kiri. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa berlaku distributif kiri dan distributif kanan sedangkan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan biasa dan operasi perkalian yang didefinisikan $x.y = x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku distributif kanan tetapi tidak berlaku distributif kiri. *Near-ring* merupakan generalisasi dari *ring* tanpa harus memenuhi komutatif terhadap penjumlahan dan distributif kiri terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Suatu himpunan tak-kosong N dengan dua operasi biner "$+$" dan "$.$" biasa dinotasikan dengan $(N, +, .)$ dinamakan *near-ring* jika memenuhi: $(N, +)$ adalah grup, $(N, .)$ adalah semigrup dan $(N, +, .)$ memenuhi distributif kanan (Pilz, 1983). Suatu *near-ring* N dinamakan prima jika untuk setiap $x, y \in N$ berlaku $x \quad = \{0\}$, maka berakibat $x = 0$ atau $y = 0$ (Bell & Mason, 1987). Suatu homomorpisma grup pada *near-ring* N yaitu $d: N \to N$ dinamakan suatu derivasi bila untuk setiap $x, y \in N$ memenuhi $d(x \quad) = d(x)y + x \quad (y)$ atau $d(x \quad) = x \quad (y) + d(x)y$ (Bell & Mason, 1997). Suatu hasil kali Lie dan hasil kali Jordan pada *near-ring* N masing – masing didefinisikan sebagai $[x, y] = x \quad - y$ dan $x \diamond y = x \quad + y$, dengan $x, y \in N$ (Shang, 2011). Penelitian yang berhubungan dengan derivasi pada *near-ring* terus mengalami perkembangan, yaitu mengenai sifat derivasi pada *near-ring*, eksistensi derivasi pada *near-ring* serta syarat derivasi *near-ring* agar membentuk *ring* komutatif (Argac & Bell, 2001; Gotmare, 2016; Kamal & Al-Shaalan, 2013; Kamal & Al-Shaalan, 2014; Shang, 2011).

Pada paper Shang telah diperoleh beberapa teorema yang terkait suatu *near-ring* prima merupakan *ring* komutatif dengan melibatkan derivasi dari hasil kali Lie dan derivasi dari hasil kali Jordan. Pada penelitian ini akan dikembangkan teorema pada paper Shang sehingga terbentuk teorema baru mengenai suatu *near-ring* prima merupakan *ring* komutatif dengan melibatkan derivasinya dengan cara memasukkan derivasi pada hasil kali Lie dan hasil kali Jordan

METODE

Pada bagian ini akan diberikan beberapa teorema yang mendukung teorema pada paper Shang serta pada bagian hasil dan pembahasan. Pada *near-ring* secara umum tidak disyaratkan berlaku distributif kiri tetapi dengan kondisi tertentu berlaku distributif kiri sebagian seperti pada lemma berikut:

Lemma 1 (Bell & Mason, 1987) Misalkan d adalah suatu derivasi pada *near-ring* N maka untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku:

(i) $z(x \quad (y) + d(x)y) = z \quad (y) + z \quad (x)y$ untuk setiap $x, y, z \in N$

(ii) $z\big(d(x)y + x \quad (y)\big) = z \quad (x)y + z \quad (y)$ untuk setiap $x, y, z \in N$

Sifat pada Lemma 1 dinamakan sifat distributif kiri sebagian. Suatu *near-ring* N disebut simetri nol jika setiap $x \in N$ berlaku $x.0 = 0$. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian biasa maka $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan *near ring* simetri nol sedangkan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan biasa dan perkalian yang didefinisikan: setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

$x.y = x$ maka $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan *near ring* tetapi bukan simetri nol. Teorema berikut menunjukkan eksistensi derivasi pada *near –ring.*

Teorema 1 (Kamal & Al-Shaalan, 2014) Suatu *near-ring* N memuat suatu derivasi jika dan hanya jika N adalah *near-ring* simetri nol

Pada penelitian ini menggunakan derivasi pada *near-ring* sehingga *near-ring* yang digunakan merupakan *near-ring* simetri nol. Misalkan N *near-ring* maka $Z(N)$ didefinisikan sebagai $Z(N) = \{x \in N | x \quad = y \quad , \forall y \in N\}$

Lemma 2 (Bell & Mason, 1997) Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d yang memenuhi $d(N) \subset Z(N)$, maka N adalah suatu ring komutatif.

Akibat dari definisi $Z(N)$ dan definisi derivasi pada *near-ring* N diperoleh lemma berikut:

Lemma 3 Misalkan N adalah suatu *near-ring* simetri nol dan d adalah suatu derivasi pada N. Jika $r \in Z(N)$, maka $d(r) \in Z(N)$.

Dengan menggunakan definisi dari hasil kali Lie atau hasil kali Jordan serta menggunakan sifat distributif kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian pada *near-ring* berlaku lemma berikut:

Lemma 4 Misalkan N adalah suatu *near-ring* maka untuk setiap $x, y \in N$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku*:*

(i) $[x, yx^k] = [x, y]x^k$

(ii) $(x \circ yx^k) = (x \circ y)x^k$

(iii) $[xy^k, y] = [x, y]y^k$

(iv) $(xy^k \circ y) = (x \circ y)y^k$

Dengan menggunakan Teorema 1 dan teorema yang diperoleh paper Shang maka terbentuk teorema berikut ini:

Teorema 2 (Shang, 2011) Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi:

(i) $d([x, y]) = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

(ii) $d([x, y]) = -x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

maka N adalah *ring* komutatif.

Teorema 3 (Shang, 2011) Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi:

(i) $d(x \circ y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

(ii) $d(x \circ y) = -x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$

maka N adalah *ring* komutatif.

Terlihat bahwa syarat derivasi pada Teorema 2 mengkaitkan derivasi dari hasil kali Lie dengan hasil kali Lie sedangkan syarat derivasi pada Teorema 3 mengkaitkan derivasi dari hasil kali Jordan dengan hasil kali Jordan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema – teorema pada hasil dan pembahasan ini merupakan hasil pengembangan dari *paper* Shang dengan memasukkan derivasi pada hasil kali Lie dan hasil kali Jordan. Dari definisi hasil kali Lie dan derivasi d pada *near-ring N* yaitu derivasi $d: N \to N$ maka $d([x, y]) = d(x)y + x \quad (y) - y \quad (x) - d(y)x$ sedangkan $[x, d(y)] = x \quad (y) - d(y)x$ dan $[d(x), y] = d(x)y - y \quad (x)$. Karena *near-ring* prima tidak harus memenuhi komutatif terhadap operasi penjumlahan maupun operasi perkalian sehingga belum tentu berlaku $d([x, y]) = [x, d(y)]$ dan $d([x, y]) = [d(x), y]$. Terlihat bahwa $[x, d(y)]$ dan $[d(x), y]$ lebih sederhana dibandingkan dengan $d([x, y])$. Dari Teorema 2 dapat dikembangkan teorema berikut:

Teorema 4 Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi :

(i) $[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

(ii) $[x, d(y)] = -x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

maka N adalah *ring* komutatif.

Bukti:

(i) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N ring komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4, didapat $[x, y \quad] = [x, y]x$. Substitusi y oleh $y \quad$ diperoleh

$$[x, d(y \quad)] = x^p[x, y \quad]x^q$$

$$[x, d(y \quad)] = x^p[x, y]x^{q+1}$$

$$[x, d(y \quad)] = [x, d(y)]x \qquad (1)$$

$$x\, d(y \quad) - d(y \quad)x = (x\, d(y) - d(y)x)x$$

(hasil kali Lie)

$$x\, d(y \quad) - d(y \quad)x = x\, d(y)x - d(y)x^2$$

(distributif kanan)

$$x\big(d(y)x + y \quad (x)\big) - \big(d(y)x + y \quad (x)\big)x = x\, d(y)x - d(y)x^2$$

(definisi derivasi)

Memakai Lemma 1 dan sifat $-(x + y) = -y - x$ maka

$$x\ \ (y)x + x\ \ \ (x) - y\ \ (x)x - d(y)x^2$$
$$= x\,d(y)x - d(y)x^2$$
$$x\ \ \ (x) - y\ \ (x)x = 0$$
$$x\ \ \ (x) = y\ \ (x)x \quad (2)$$

Untuk sebarang $z \in N$ berlaku

$$zx\ \ \ (x) = z\ \ \ (x)x$$

Substitusi y oleh z pada persamaan (2) diperoleh

$$x.\ \ \ (x) = z\ \ \ (x)x$$

sehingga diperoleh

$$zx\ \ \ (x) = x.\ \ \ (x)$$
$$x.\ \ \ (x) - zx\ \ \ (x) = 0$$
$$(x\ \ - z.\ )\,y\ \ (x) = 0$$

(distributif kanan)

$$[x, z]y\ \ (x) = 0$$

(hasil kali Lie)

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$ maka $[x, z]N\ \ (x) = 0$ untuk setiap $x, z \in N$ (3)
Karena N prima maka berlaku $[x, z] = 0$ atau $d(x) = 0$. Tetapi, d adalah derivasi tak-nol, maka yang memenuhi adalah $[x, z] = 0$ atau $x\ \ = z.$ untuk setiap $x, z \in N$. Dengan kata lain $x \in Z(N)$ untuk setiap $x \in N$ maka menurut Lemma 3 diperoleh $d(x) \in Z(N)$ berakibat $d(N) \subset Z(N)$ sehingga menurut Lemma 2 maka N adalah ring komutatif ■

(ii) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $[x, d(y)] = -x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N *ring* komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4, didapat $[x, y\ \ ] = [x, y]x$. Substitusi y oleh $y\ \ $, diperoleh

$$[x, d(y\ \ )] = -x^p[x, y\ \ ]x^q$$
$$[x, d(y\ \ )] = -x^p[x, y]x^{q+1}$$
$$[x, d(y\ \ )] = [x, d(y)]x$$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (1) ■

Teorema 5 Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi:

(i) $[d(x), y] = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau
(ii) $[d(x), y] = -y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

maka N adalah *ring* komutatif.

Bukti:

(i) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $[d(x), y] = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N *ring* komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4, didapat $[x\ \ , y] = [x, y]y$. Substitusi x oleh $x\ \ $ diperoleh

$$[d(x\ \ ), y] = y^p[x\ \ , y]y^q$$
$$[d(x\ \ ), y] = y^p[x, y]y^{q+1}$$
$$[d(x\ \ ), y] = [d(x), y]y \quad (4)$$
$$d(x\ \ )y - y\,d(x\ \ ) = \big(d(x)y - y\,d(x)\big)y$$

(hasil kali Lie)

$$d(x\ \ )y - y\,d(x\ \ ) = d(x)y^2 - y\,d(x)y$$

(distributif kanan)

$$\big(d(x)y + x\ \ (y)\big)y - y\big(d(x)y + x\ \ (y)\big) = d(x)y^2 - y\,d(x)y$$ (definisi derivasi)

Memakai Lemma 1 dan sifat $-(x + y) = -y - x$ maka

$$d(x)y^2 + x\ \ (y)y - y.\ \ (y) - y\ \ (x)y$$
$$= d(x)y^2 - y\,d(x)y$$
$$x\ \ (y)y - y.\ \ (y) = 0$$
$$x\ \ (y)y = y.\ \ (y) \quad (5)$$
$$z.\ \ (y)y = z\ \ \ (y)$$

Substitusi x oleh $z.$ pada persamaan (5) diperoleh

$$z.\ \ (y)y = y.\ \ \ (y)$$

sehingga diperoleh

$$z\ \ \ (y) = y.\ \ \ (y)$$
$$z\ \ \ (y) - y.\ \ \ (y) = 0$$
$$(z\ \ - y\ )x\ \ (y) = 0$$
$$[z, y]x\ \ (y) = 0$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$ maka $[z, y]N\ \ (y) = 0$ untuk setiap $y, z \in N$
Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (3) Teorema 4 ■

(ii) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $[d(x), y] = -y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N ring komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4 didapat $[x\ \ , y] = [x, y]y$. Substitusi x oleh $x\ \ $, diperoleh

$$[d(x\ \ ), y] = -y^p[x\ \ , y]y^q$$
$$[d(x\ \ ), y] = -y^p[x, y]y^{q+1}$$
$$[d(x\ \ ), y] = [d(x), y]y \quad (6)$$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (4) ■

Dari definisi hasil kali Jordan dan derivasi d pada *near- ring* N yaitu derivasi $d: N \to N$ maka

$$d(x \circ y) = d(x)y + x\ \ (y) + d(y)x + y\ \ (x)$$

sedangkan $x \circ d(y) = x\ \ (y) + d(y)x$ dan $d(x) \circ y = d(x)y + y\ \ (x)$. Terlihat bahwa $x \circ d(y)$ dan $d(x) \circ y$ lebih sederhana dibandingkan dengan $d(x \diamond y)$. Pada Teorema 3 dapat dikembangkan teorema berikut:

Teorema 6 Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi *:*

(i) $x \diamond d(y) = x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ *atau*

(ii) $x \diamond d(y) = -x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

maka N adalah *ring* komutatif.

Bukti :

(i) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $x \diamond d(y) = x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N ring komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4 didapat $(x \diamond y\ \ ) = (x \diamond y)x$. Substitusi y oleh y diperoleh

$$x \diamond d(y\ \ ) = x^p(x \diamond y\ \ )x^q$$

$$x \diamond d(y\ \ ) = x^p(x \diamond y)x^{q+1}$$

$$x \diamond d(y\ \ ) = (x \diamond d(y))x \qquad (7)$$

$$x\, d(y\ \ ) + d(y\ \ )x = (x\, d(y) + d(y)x)x$$

(hasil kali Jordan)

$$x\, d(y\ \ ) + d(y\ \ )x = x\, d(y)x + d(y)x^2$$

(distributif kanan)

$$x\big(d(y)x + y\ \ (x)\big) + (y\ \ (x) + d(y)x)x = x\, d(y)x + d(y)x^2$$

(definisi derivasi)

Memakai Lemma 1 dan distributif kanan maka diperoleh

$$x\ \ (y)x + x\ \ \ (x) + y\ \ (x)x + d(y)x^2 = x\, d(y)x + d(y)x^2$$

$$x\ \ \ (x) + y\ \ (x)x = 0$$

$$x\ \ \ (x) = -y\ \ (x)x \qquad (8)$$

Substitusi y oleh z pada persamaan (8) dan untuk setiap $z \in N$

$$x\ \ \ (x) = -z\ \ \ (x)x$$

$$x\ \ \ (x) = (-z)y\ \ (x)x$$

$$x\ \ \ (x) = (-z)(-x\ \ \ (x))$$

(dari (8))

$$x\ \ \ (x) = (-z)(-x)y\ \ (x)$$

Substitusi x oleh $-x$ pada persamaan

$$-x\ \ d(-x) = (-z)x\ \ \ (-x)$$

$$-x\ \ \ (-x) + z\ \ \ (-x) = 0$$

$$z\ \ \ (-x) = x\ \ \ (-x)$$

$$z\ \ \ (-x) - x\ \ \ (-x) = 0$$

$$(z\ \ - x\ \ )y\ \ (-x) = 0$$

(distributif kanan)

$$[z, x]y\ \ (-x) = 0 \quad \text{(hasil kali Lie)}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$ maka

$$[z, x]N\ \ (-x) = 0 \quad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (3) Teorema 4 ■

(ii) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $x \diamond d(y) = -x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N *ring* komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4, didapat $(x \diamond y\ \ ) = (x \diamond y)x$. Substitusi y oleh y diperoleh

$$x \diamond d(y\ \ ) = -x^p(x \diamond y\ \ )x^q$$

$$x \diamond d(y\ \ ) = -x^p(x \diamond y)x^{q+1}$$

$$x \diamond d(y\ \ ) = (x \diamond d(y))x$$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (7) ■

Teorema 7 Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi:

(i) $d(x) \diamond y = y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ *atau*

(ii) $d(x) \diamond y = -y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

maka N adalah *ring* komutatif.

Bukti:

(i) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $d(x) \diamond y = y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N ring komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4, didapat $(x\ \ \diamond y) = (x \diamond y)y$. Substitusi x oleh x diperoleh

$$d(x\ \ ) \diamond y = y^p(x\ \ \diamond y)y^q$$

$$d(x\ \ ) \diamond y = y^p(x \diamond y)y^{q+1}$$

$$d(x\ \ ) \diamond y = (\, d(x) \diamond y)y \qquad (9)$$

$$d(x\ \ )y + y\, d(x\ \ ) = \big(d(x)y + y\, d(x)\big)y$$

(hasil kali Jordan)

$$d(x\ \ )y + y\, d(x\ \ ) = d(x)y^2 + y\, d(x)y$$

(distributif kanan)

$$\big(d(x)y + x\ \ (y)\big)y + y(x\ \ (y) + d(x)y) = d(x)y^2 + y\, d(x)y$$

(definisi derivasi)

Memakai Lemma 1 dan distributif kanan maka

$$d(x)y^2 + x\ \ (y)y + y\ \ \ (y) + y\ \ (x)y$$
$$= d(x)y^2 + y\, d(x)y$$
$$x\ \ (y)y + y\ \ \ (y) = 0$$
$$y\ \ \ (y) = -x\ \ (y)y \qquad (10)$$

Substitusi x oleh z dan y oleh $-y$ pada persamaan diatas

$$z\ \ (-y)(-y) + (-y)z\ \ (-y) = 0$$
$$z\ \ \ (-y) + (-y)z\ \ (-y) = 0 \text{ (dari (10))}$$
$$(z\ \ - y\ \ )x\ \ (-y) = 0 \text{ (distributif kanan)}$$
$$[z, y]x\ \ (-y) = 0$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$ maka $[z, y]N\ \ (-y) = 0$ untuk setiap $y, z \in N$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (3) Teorema 4 ■

(ii) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi $d(x) \diamond y = -y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka akan dibuktikan N ring komutatif menggunakan Lemma 2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$. Untuk k = 1, menurut Lemma 4, didapat $(x\ \ \diamond y) = (x \diamond y)y$. Substitusi x oleh x diperoleh

$$d(x\ \ ) \diamond y = -y^p(x\ \ \diamond y)y^q$$
$$d(x\ \ ) \diamond y = -y^p(x \diamond y)y^{q+1}$$
$$d(x\ \ ) \diamond y = (\, d(x) \diamond y)y$$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (9) ■

Pada contoh berikut ini menunjukkan bahwa *near-ring* prima yang simetri nol dengan derivasi yang memenuhi syarat pada Teorema 4 membentuk *ring* komutatif.

Contoh 1

Diberikan himpunan polinomial $\mathbb{Z}[x]$ disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial biasa maka $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ merupakan *near ring* prima yang simetri nol. Pemetaan $d : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ yang didefinisikan $d\big(p(x)\big) = p'(x)$ merupakan pemetaan derivasi dan memenuhi $[p(x), d(q(x))] = [p(x), q(x)]$ sehingga menurut Teorema 4 maka $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ *ring* komutatif.

Selanjutnya diberikan definisi 2-torsion free dan sifat khusus yang dipunyai jika *near-ring* N adalah 2-torsion free. Suatu *near-ring* N disebut 2-torsion free jika setiap $x \in N$ yang memenuhi $2x = 0$ maka $x = 0$. Pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan operasi perkalian biasa merupakan *near-ring* yang 2-torsion free sedangan himpunan polinomial $\mathbb{Z}_2[x]$ disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial biasa merupakan *near-ring* yang bukan 2-torsion free.

Teorema berikut akan diberikan suatu kondisi pada derivasi apabila near-ring merupakan 2-torsian free.

Teorema 8 Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol dan 2-torsion free maka untuk setiap $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tidak terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi

(i) $x \diamond d(y) = x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$
(ii) $x \diamond d(y) = -x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Bukti :

(i) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi $x \diamond d(y) = x^p(x \diamond y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ maka menurut Teorema 6 N adalah *ring* komutatif. Dari Teorema 6 persamaan (8) diperoleh

$$x\ \ \ (x) = -y\ \ (x)x \qquad (11)$$
$$x\ \ \ (x) + y\ \ (x)x = 0$$
$$2x\ \ \ (x) = 0$$

Karena N merupakan 2-torsion free maka $x\ \ \ (x) = 0$, untuk setiap $x, y \in N$ akibatnya $x\ \ \ (x) = 0$, untuk setiap $x \in N$

Karena N prima maka berlaku $x = 0$ atau $d(x) = 0$. Tetapi, d adalah derivasi tak-nol maka yang memenuhi adalah $x = 0$ untuk setiap $x \in N$. Jika $x = 0$ untuk setiap $x \in N$ maka kontradiksi dengan adanya derivasi tak-nol d. Jadi tidak terdapat derivasi yang demikian. ■

(ii) Analog dengan pembuktian pada Teorema 8 (i) dan Teorema 6 (ii) maka terbukti ■

Teorema 9 Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol dan 2-torsion free maka untuk setiap $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tidak terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi

(i) $d(x) \diamond y = y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$
(ii) $d(x) \diamond y = -y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

Bukti:

(i) Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi $d(x) \diamond y = y^p(x \diamond y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$. Maka menurut Teorema 7 N adalah *ring* komutatif. Dari Teorema 7 persamaan (10) diperoleh

$$y\ \ \ (y) = -x\ \ (y)y$$

Substitusikan x oleh y dan y oleh x sehingga diperoleh

$$x\ \ \ (x) = -y\ \ (x)x$$

Selanjutnya pembuktian mengikuti bukti pada persamaan (11) Teorema 8 ■
(ii) Analog dengan pembuktian pada Teorema 9 (i) dan Teorema 7 (ii) maka terbukti. ■

Dari Teorema 8 dan Teorema 9, apabila N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol dan 2-torsion free maka untuk menunjukkan bahwa N merupakan *ring* komutatif tidak dapat menggunakan Teorema 6 dan Teorema 7 tetapi dapat menggunakan Teorema 4 dan Teorema 5.

KESIMPULAN

Pada bagian hasil dan pembahasan telah diperoleh teorema baru sebagai berikut:

(1) Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi salah satu dari persamaan berikut :
  (i) $[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$
  (ii) $[x, d(y)] = -x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$
  (iii) $[d(x), y] = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau
  (iv) $[d(x), y] = -y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$
  (v) $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ *atau*
  (vi) $x \circ d(y) = -x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$.
  (vii) $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ *atau*
  (viii) $d(x) \circ y = -y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

  maka N adalah *ring* komutatif.

(2) Misalkan N adalah suatu *near-ring* prima yang simetri nol dan 2-torsion free maka untuk setiap $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tidak terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi
  (i) $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$
  (ii) $x \circ d(y) = -x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$
  (iii) $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$
  (iv) $d(x) \circ y = -y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$.

DAFTAR PUSTAKA

Argac, N & Bell. H. E. 2001. Some Results on Derivations in Nearrings. *Near-Rings and Near-Fields* : 42–46.

Bell, H. E. & Mason, G. 1987. On Derivations in Near-Rings *North-Holland Math. Stud.* 37:31–35.

Bell, H. E. & Mason, G. 1997. On Derivations in Near-Rings, II. *Nearrings, Nearfields and K-Loops* : 191–197

Gotmare, A. R. 2016. Derivations in Prime Near Rings. *Int. J. Pure Engg. Math.* 4:101-105.

Kamal, A. A. M & Al-Shaalan, K. H. 2013. Existence of Derivations on Near-Rings. *Math. Slovaca*. 63:431-448

Kamal, A. A. M & Al-Shaalan, K. H. 2014. Commutativity of Near-rings with Derivations. *Algebr. Colloq.* 21:215-230

Pilz, G. 1983. *Near-Rings the Theory and its Applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company

Shang, Y. 2011. A Study of Derivations in Prime Near-Rings. *Math. Balk. 25*:413-417