BERKALA SAINSTEK 2022 10(3): 133-139
doi: 10.19184/bst.v10i3.24183
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/BST/article/view/24183

RESEARCH ARTICLE

On The Modification of Chaos Game Rules on A Square

(Modifikasi Aturan Chaos Game Pada Persegi)

Kosala Dwidja Purnomo*, Anindita Setya Mawarni, Firdaus Ubaidillah
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Jember,
Jl. Kalimantan No.37, Jember, Indonesia

ABSTRACT

Fractal is a collection of geometric patterns found in nature and can also be a mathematical model visualization in which the pattern is repeated on a different scale. The formation of a fractal object can be done with a rule called chaos games. Chaos games explain a dot that moves erratically. On this research there will be random and non-random modification of the chaos game rules on a square. The purpose of this research is to make modifications and get visual results from modifications of the rules random and non-random chaos game. Depictions of random and non-random chaos game are carried out using MATLAB programs. Visualization of the random chaos game rule modification is a new fractal object that has self-similarity. Whereas modifications of the non-random rules by giving a particular sequence in selection a square point result in convergent points at specific coordinates. This is demonstrated by showing the value of the limit from the distance between points that produced by non-random chaos game is zero.

Fraktal adalah kumpulan pola geometris yang terdapat di alam dan dapat juga berupa visualisasi model matematis yang mana pola tersebut diulang dengan skala berbeda. Pembentukan sebuah objek fraktal dapat dilakukan dengan sebuah aturan yang disebut chaos game. Chaos game menjelaskan tentang suatu titik yang bergerak secara tidak teratur. Pada penelitian ini akan dilakukan modifikasi aturan chaos game baik secara random maupun non-random pada bidang persegi. Tujuan penelitian ini adalah untuk melakukan modifikasi dan mendapatkan hasil visual dari modifikasi aturan random maupun non-random chaos game. Penggambaran hasil algoritma random maupun non-random chaos game dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Visualisasi dari modifikasi aturan random chaos game adalah sebuah objek fraktal baru yang memiliki self-similarity. Sedangkan modifikasi aturan non-random dengan memberikan urutan tertentu pada pemilihan titik sudut persegi menghasilkan titik-titik yang konvergen pada suatu koordinat tertentu. Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan nilai limit dari jarak antar titik hasil bentukan non-random chaos game adalah nol.

Keywords: Fractal, Chaos Game, Random, Non-random.

*) Corresponding author:
Kosala Dwidja Purnomo
E-mail: kosala.fmipa@unej.ac.id

PENDAHULUAN

Fraktal pertama kali diperkenalkan oleh Benoit Mandelbrot pada tahun 1975, fraktal berasal dari bahasa latin "*fractus*" yang memiliki arti patah, rusak atau tidak beraturan. Terdapat beberapa contoh objek fraktal yaitu: segitiga Sierpinski, *Dragon curve*, *Koch snowflake*, kurva Hilbert, himpunan Cantor, himpunan Mandelbrot dan Julia [2]. Purnomo [4] memanfaatkan transformasi affine pada segitiga untuk membangun segitiga Sierpinski yang merupakan fraktal linier dan memiliki sifat *self-similarity*. Segitiga Sierpinski juga dapat dibangun dengan menggunakan sebuah metode yang disebut *chaos game* atau permainan acak. Metode ini dilakukan dengan memilih secara acak titik awal pada sebuah bidang kemudian tandai titik tengah antara titik awal dengan titik sudut. Langkah tersebut diulangi sampai iterasi tertentu sehingga akan dihasilkan sebaran titik pada bidang. Visualisasi dari sebaran titik yang dihasilkan oleh *chaos game* tersebut dapat digunakan untuk menentukan apakah terbentuk suatu objek fraktal atau tidak. Penggunaan aturan *chaos game* yang diterapkan pada sebuah segitiga dengan tiga titik sudut dan dilakukan dengan beberapa ribu kali iterasi dengan jarak titik hasil bentukan *chaos game* adalah setengah dari titik sudut, akan menghasilkan sebuah pola yaitu segitiga Sierpinski. Motif serupa dengan segitiga Sierpinski yang terlihat pada sebuah persegi hasil dari pengembangan *Cantor set* disebut dengan karpet Sierpinski [6].

Menurut Armana [5] agar segitiga Sierpinski dapat dibangun menggunakan *chaos game*, jarak titik baru hasil bentukan metode *chaos game* haruslah setengah dari titik sudut segitiga. Apabila jarak tersebut diubah menjadi 1/3 dari titik sudut segitiga maka yang terbentuk adalah sebuah segi lima di bagian dalam segitiga. Pola yang berbeda akan didapatkan jika mengubah bidang yang diteliti, namun tetap menggunakan aturan *chaos game* untuk pembentukan segitiga Sierpinski yakni dengan menggunakan pengambilan jarak setengah dari titik sudut yang digunakan sebagai titik acuan. Devaney [1] memodifikasi aturan *chaos game* dengan memberikan enam titik awal yang membentuk hexagon dan mengubah jarak antara titik sudut dengan titik awal menjadi sepertiga dari titik semula, yang menghasilkan sebuah bentuk fraktal Sierpinski hexagon.

Menurut Yunaning [7] aturan *non-random chaos game* pada segitiga menghasilkan kumpulan titik yang konvergen di titik koordinat tertentu pada titik sudut yang sama. Kekonvergenan titik ditunjukkan dengan melakukan perhitungan numerik dan perhitungan analitik pada titik-titik yang dihasilkan dari aturan *non-random chaos game.* Pada penelitian Yunaning dikatakan bahwa objek yang dihasilkan dari penggunaan aturan *non-random chaos game* tidak membentuk fraktal. Sedangkan Jeffrey [2], penggambaran aturan *chaos game* pada empat titik dengan memanfaatkan urutan DNA sebagai aturan pemilihan titik acuan menghasilkan sebuah persegi yang diisi dengan banyak titik.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut mengenai aturan *chaos game*. Penelitian ini akan membahas modifikasi aturan *random* dan *non-random chaos game* pada persegi, serta visualisasi dengan menggunakan MATLAB.

METODE PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan penelitian ini dapat dibagi menjadi dua yaitu modifikasi aturan *random chaos game* dan modifikasi aturan *non-random chaos game*. Berikut ini merupakan algoritma modifikasi aturan *random chaos game* dengan tidak memilih titik terakhir yang sudah dipilih:

a. Membuat sebuah persegi sebagai dasarnya dan memberi label keempat titik sudut persegi.
b. Menentukan sebuah titik di luar, di dalam, maupun pada persegi sebagai titik awal.
c. Menentukan sebuah titik sudut dari persegi yang digunakan sebagai titik acuan pertama dan dicari titik tengah dari titik awal ke titik sudut atau titik acuan tersebut.
d. Ditandai sebuah titik baru yang berjarak setengah dari titik acuan.
e. Ulangi langkah d dengan titik awal adalah titik baru yang didapat dari iterasi sebelumnya namun titik acuan atau titik sudut yang digunakan tidak boleh sama dengan titik sudut yang digunakan sebelumnya.

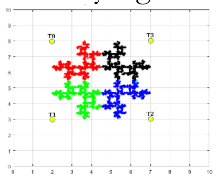
Bagian selanjutnya menjelaskan tentang algoritma *non-random chaos game* sebagai berikut:

a. Membuat sebuah persegi sebagai dasarnya dan memberi label keempat titik sudut persegi, misalkan diberi label setiap titik sudutnya secara berurutan (T_0,T_1,T_2,T_3). Titik sudut persegi digunakan sebagai titik acuan.
b. Menentukan sebuah titik di luar, di dalam, maupun pada persegi sebagai titik awal.
c. Menentukan urutan titik sudut persegi untuk memulai proses *non-random chaos game.*
d. Ditentukan sebuah titik baru yang berjarak setengah dari titik acuan pertama atau titik sudut pertama dengan titik awal.
e. Ulangi langkah d dengan titik awal adalah titik baru yang didapat dari iterasi sebelumnya namun titik acuan yang digunakan harus sesuai dengan urutan yang telah ditentukan. Misalkan titik acuan awal yang digunakan adalah titik T_0, kemudian titik acuan selanjutnya dipilih sesuai dengan urutan, yaitu T_1, kemudian dipilih titik acuan T_2 dan yang terakhir T_3, kemudian akan berulang kembali lagi pada titik acuan T_0 dan berjalan sesuai dengan urutan hingga iterasi berakhir.

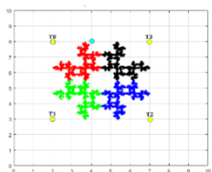
HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Simulasi Program Modifikasi *Random Chaos Game*

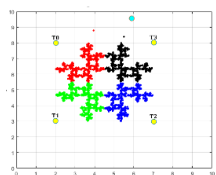
Pada Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3 ditunjukkan hasil simulasi aturan *random chaos game* dengan memvariasikan letak titik awal dan titik acuan yang digunakan dalam percobaan. Iterasi yang dilakukan untuk setiap percobaan adalah sama yaitu sebanyak 3000 iterasi, hal ini dilakukan untuk mempermudah dalam membandingkan hasil dari setiap percobaan pada iterasi yang sama.



Gambar 1. Titik awal dalam persegi dengan titik sudut T_0 sebagai titik acuan



Gambar 2. Titik awal pada persegi dengan titik sudut T_1 sebagai titik acuan

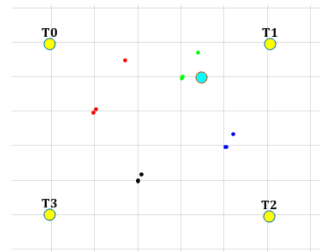


Gambar 3. Titik awal di luar persegi dengan titik sudut T_2 sebagai titik acuan

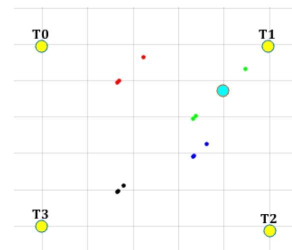
Melalui hasil simulasi aturan *random* pada Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3 ditunjukkan bahwa letak titik awal dan pemilihan titik sudut mana pun sebagai titik acuan pertama tidak memengaruhi titik baru yang dihasilkan oleh aturan *random chaos game*. Setiap titik baru yang dihasilkan oleh aturan *random chaos game* akan cenderung berkumpul dan berdekatan terhadap titik acuan masing-masing meskipun titik awal dan titik acuannya berbeda. Gambar 1 menunjukkan kumpulan titik hasil aturan *random chaos game* yang dibedakan berdasarkan warna untuk masing-masing titik sudut sebagai titik acuan. Dapat terlihat kumpulan titik untuk masing-masing titik acuan dari T_0, T_1, T_2, T_3 jika dibagi menjadi empat bagian sesuai titik sudutnya, memiliki bentuk atau pola yang sama yang menyerupai sayap kupu-kupu. Selain itu, pada setiap pola di masing-masing titik sudut terlihat pola yang sama dengan pola pada keseluruhan persegi T_0, T_1, T_2, T_3 dengan perbedaan skala yang lebih besar dari masing-masing titik sudut. Sehingga dapat dikatakan aturan modifikasi *random chaos game* dengan tidak memilih titik terakhir yang sudah dipilih menunjukkan sebuah bentuk fraktal dengan sifat kesamaan dirinya atau *self-similarity*.

2. Simulasi Program Aturan *non-random Chaos Game*

Hasil penggunaan aturan *non-random chaos game* pada program Matlab ditunjukkan oleh Gambar 4 dan Gambar 5.



Gambar 4. Titik acuan berurutan T_0, T_1, T_2, T_3 dengan titik awal di dalam persegi, iterasi ke-500



Gambar 5. Titik acuan urutan T_1, T_0, T_2, T_3 dengan titik awal di dalam persegi, iterasi ke-500

Gambar 4 dan Gambar 5 merupakan hasil dari percobaan *non-random chaos game* dengan perbedaan urutan titik acuan namun memiliki iterasi sama dan letak titik awal yang sama. Dengan kedua percobaan yang ditunjukkan oleh Gambar 4 dan Gambar 5, dapat dilihat bahwa meskipun pada urutan pengambilan titik acuan untuk aturan *non-random chaos game* berbeda tetapi tetap memiliki urutan yang telah ditentukan dengan jelas, hasil yang ditunjukkan adalah sama yaitu kumpulan titik-titik yang saling berdekatan. Pada percobaan *non-random chaos game* tidak dihasilkan sebuah bentuk fraktal. Melalui beberapa percobaan yang telah dilakukan, akan didapatkan koordinat titik hasil dari *non-random chaos game* dengan urutan titik acuan yang diawali dari T_0 kemudian ke T_1, T_2, T_3. Selanjutnya akan diukur jarak antar titik yang dihasilkan oleh *non-random chaos game* sesuai dengan urutan titik sudut sebagai titik acuan yang telah ditentukan. Jarak masing-masing titik hasil bentukan *non-random chaos game* yang diukur dari titik A_n menuju A_{n+4}, dengan titik acuan T_0 berlaku $n = 1,5,9,13, \dots m_0$, untuk titik acuan T_1 berlaku $n = 2,6,10,14, \dots m_1$, pada titik acuan T_2 berlaku n = 3,7,11,15, … m_2, sedangkan pada titik acuan T_3 berlaku n = 4,8,12,16, … m_3. Dalam hal ini n menyatakan bilangan asli dan m_i $(i = 0,1,2,3)$ adalah suatu bilangan asli yang memenuhi rumus barisan *n* pada titik acuan T_i. Jarak antara kedua titik tersebut ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1 menunjukkan hasil perhitungan jarak antar titik hasil bentukan *non-random chaos game* pada masing-masing titik acuan. Pada Tabel 1. ditunjukkan semakin banyak iterasi yang dilakukan pada aturan *non-random chaos game*, jarak antar titik pada masing-masing titik sudut atau titik acuan semakin mendekati 0.

Tabel 1. Hasil perhitungan jarak

Jarak dua titik di Masing-masing Pemilihan Titik Acuan (Titik Sudut)			
Titik Acuan **T_0**	Titik Acuan **T_1**	Titik Acuan **T_2**	Titik Acuan **T_3**
0.864916	0.432456	0.216229	0.108114
0.054057	0.027029	0.013514	0.006757
0.003379	0.001689	0.000845	0.000422
0.000211	0.000106	0.000053	0.000026
0.000013	0.000007	0.000003	0.000002
0.000001	0.000000	0.000000	0.000000
0,000000	0,000000	0.000000	0,000000
0,000000	0,000000	0.000000	0,000000
0,000000	0,000000	0.000000	0,000000

Koordinat titik tengah untuk masing-masing titik hasil dari non-random chaos game pada masing-masing titik sudut ditentukan dengan memanfaatkan rumus $\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$. Koordinat titik tengah bentukan non-random chaos game akan digunakan untuk menentukan rumus koordinat dari masing-masing titik di masing-masing titik sudut yang didapatkan sebagai berikut:

1. Titik sudut $T_0, n = 4m + 1$:

$$x_{A_{4m+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^{m} 2^{4i}\, x_1 + (2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i}}{2^{4m+1}}$$

$$y_{A_{4m+1}} = \frac{y_0 + \sum_{i=0}^{m} 2^{4i}\, y_1 + (2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_4)\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i}}{2^{4m+1}}$$

2. Titik sudut $T_1, n = 4m + 2$:

$$x_{A_{4m+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i} + (2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i}}{2^{4m+2}}$$

$$y_{A_{4m+2}} = \frac{y_0 + (y_1 + 2y_2)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i} + (2^2y_3 + 2^3y_4)\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i}}{2^{4m+2}}$$

3. Titik sudut $T_2, n = 4m + 3$:

$$x_{A_{4m+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i} + 2^3x_4\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i}}{2^{4m+3}}$$

$$y_{A_{4m+3}} = \frac{y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i} + 2^3y_4\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i}}{2^{4m+3}}$$

4. Titik sudut $T_3, n = 4m + 4$:

$$x_{A_{4m+4}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i}}{2^{4m+4}}$$

$$y_{A_{4m+4}} = \frac{y_0 + (y_1 + 2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_4)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i}}{2^{4m+4}}$$

Keempat rumus koordinat titik hasil bentukan *non-random chaos game* pada masing-masing titik sudut dibuktikan benar dengan menggunakan induksi matematika. Berikut akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Karena nilai koordinat x dan y sama, maka akan dilakukan induksi matematika pada salah satu koordinat yaitu koordinat x.

1. Dibuktikan benar untuk $m = 0$ berlaku

a. Titik sudut $T_0, n = 4m + 1$

$$x_{A_{4m+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^{m} 2^{4i}\, x_1 + (2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4m+1}}$$

$$x_{A_1} = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

b. Titik sudut $T_1, n = 4m + 2$

$$x_{A_{4m+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i+2}\, x_3 + \sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4m+2}}$$

$$x_{A_2} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2)}{2^2}$$

c. Titik sudut $T_2, n = 4m + 3$

$$x_{A_{4m+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{m-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4m+3}}$$

$$x_{A_3} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)}{2^3}$$

d. Titik sudut $T_3, n = 4m + 4$

$$x_{A_{4m+4}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{m} 2^{4i}}{2^{4m}}$$

$$x_{A_4} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)}{2^4}$$

2. Untuk $m = a$

a. Titik sudut pada $T_0, n = 4a + 1$

$$x_{A_{4a+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^{a} 2^{4i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a-1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4a+1}}$$

b. Titik sudut $T_1, n = 4a + 2$

$$x_{A_{4a+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a-1} 2^{4i+2} x_3 + \sum_{i=0}^{a-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4a+2}}$$

c. Titik sudut $T_2, n = 4a + 3$

$$x_{A_{4a+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4a+3}}$$

d. Titik sudut $T_3, n = 4a + 4$

$$x_{A_{4a+4}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i}}{2^{4a}}$$

3. Untuk $m = a + 1$

a. Titik sudut pada $T_0, n = 4(a + 1) + 1$

$$x_{A_{4(a+1)+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a+1-1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a+1-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4(a+1)+1}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+1}} = \frac{x_0 + \sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} x_1 + (2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + 2^3x_4\sum_{i=0}^{a} 2^{4i}}{2^{4a+4+1}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+1}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + 2^{4a+4}x_1}{2.2^{4a+4}}$$

$$x_{A_1} = \frac{x_1 + x_{A_{4a+4}}}{2}$$

b. Titik sudut $T_1, n = 4(a + 1) + 2$

$$x_{A_{4(a+1)+2}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2)\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a+1-1} 2^{4i+2} x_3 + \sum_{i=0}^{a+1-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4(a+1)+2}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+2}} = \frac{x_0 + x_1\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + 2x_2\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a} 2^{4i+2} x_3 + \sum_{i=0}^{a} 2^{4i+3}x_4}{2^{4(a+1)+2}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+2}} = \frac{x_0 + x_1\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + 2x_2\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a} 2^{4i+2} x_3 + \sum_{i=0}^{a} 2^{4i+3}x_4}{2^{4(a+1)+2}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+2}} = \frac{x_0 + x_1\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + (2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + 2^{4a+5}x_2}{2^{4(a+1)+2}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+2}} = \frac{x_0 + x_1\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + (2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + 2^{4a+5}x_2}{(2^{4a+5}).2}$$

$$x_{A_{4(a+1)+2}} = \frac{x_{A_{4(a+1)+1}} + x_2}{2}$$

c. Titik sudut $T_2, n = 4(a+1)+3$

$$x_{A_{4(a+1)+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a+1-1} 2^{4i+3}x_4}{2^{4(a+1)+3}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + \sum_{i=0}^{a} 2^{4i+3}x_4}{2^{4a+4+3}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+3}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2)\sum_{i=0}^{a+1} +2^{4i}(2^3x_4 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + 2^2.2^{4a+4}x_3}{2^{4a+4+3}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+3}} = \frac{x_{A_{4(a+1)+2}} + x_3}{2}$$

d. Titik sudut $T_3, n = 4(a+1)+4$

$$x_{A_{4(a+1)+4}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i}}{2^{4(a+1)+4}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+4}} = \frac{x_0 + (x_1 + 2x_2 + 2^2x_3)\sum_{i=0}^{a+1} 2^{4i} + 2^3x_4\sum_{i=0}^{a} 2^{4i} + 2^3.2^{4a+4}x_4}{2^{4a+4+4}}$$

$$x_{A_{4(a+1)+4}} = \frac{x_{A_{4(a+1)+3}} + x_4}{2}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa rumus koordinat x untuk titik hasil bentukan *non-random chaos game* pada masing-masing titik sudut adalah benar. Didapatkan pula bukti rumus koordinat y karena nilai x dan y sama. Setelah terbukti rumus koordinat x dan y untuk titik hasil bentukan *non-random chaos game* pada masing-masing titik sudut adalah benar, maka kemudian dibuktikan kekonvergenan kumpulan titik yang saling berdekatan pada masing-masing titik sudut dengan menentukan rumus jarak antar titik .

Titik sudut T_0, $n = 4m+1$, rumus jarak yang didapat:

$$\left|\overline{A_{4(m-1)+1}A_{4m+1}}\right| = \sqrt{(x_{A_{4m+1}} - x_{A_{4(m-1)+1}})^2 + (y_{A_{4m+1}} - y_{A_{4(m-1)+1}})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(1-16)x_0 + (2^{4m} - 15\sum_{i=0}^{m-1}2^{4i})x_1 + (2^{4m-4} - 15\sum_{i=0}^{m-1-1}2^{4i})(2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)}{2^{4m+1}}\right)^2 + \left(\frac{(1-16)y_0 + (2^{4m} - 15\sum_{i=0}^{m-1}2^{4i})y_1 + (2^{4m-4} - 15\sum_{i=0}^{m-1-1}2^{4i})(2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_4)}{2^{4m+1}}\right)^2}$$

Karena $\left(2^{4m} - 15\sum_{i=0}^{m-1}2^{4i}\right) = 1$ dan $\left(2^{4m-4} - 15\sum_{i=0}^{m-1-1}2^{4i}\right) = 1$ yang didapatkan setelah melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika. Dalam hal ini akan dibuktikan persamaan yang pertama, yaitu

$$\left(2^{4m} - 15\sum_{i=0}^{m-1}2^{4i}\right) = 1.$$

Untuk $m = 2$ maka berlaku

$$\left(2^{4m} - 15\sum_{i=0}^{m-1}2^{4i}\right) = \left(2^{4(2)} - 15\sum_{i=0}^{2-1}2^{4i}\right)$$
$$= 2^8 - 15\sum_{i=0}^{1}2^{4i}$$
$$= 256 - 15(1 + 2^4) = 1$$

Asumsikan benar untuk $m = k > 2$, yaitu $\left(2^{4k} - 15\sum_{i=0}^{k-1}2^{4i}\right) = 1$, maka harus dibuktikan juga benar untuk $m = k+1 > 2$.

$$\left(2^{4(k+1)} - 15\sum_{i=0}^{(k+1)-1}2^{4i}\right) = \left(2^4.2^{4k} - 15\sum_{i=0}^{k-1}2^{4i} - 15.2^{4k}\right)$$

Bagian ruas kanan persamaan terakhir adalah sama dengan $\left(2^{4k} - 15\sum_{i=0}^{k-1}2^{4i}\right)$ dan bernilai 1.

Oleh karena itu, didapat rumus jarak antar titik hasil bentukan *non-random chaos game* pada titik acuan yaitu titik sudut T_0 adalah:

$$\left|\overline{A_{4(m-1)+1}A_{4m+1}}\right| = \sqrt{\left(\frac{(1-16)x_0 + x_1 + (2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4)}{2^{4m+1}}\right)^2 + \left(\frac{(1-16)y_0 + y_1 + (2y_2 + 2^2y_3 + 2^3y_4)}{2^{4m+1}}\right)^2}$$

Rumus jarak di atas kemudian dicari nilai limitnya untuk menunjukkan bahwa kumpulan titik pada titik sudut T_0 sebagai titik acuan adalah konvergen. Berdasarkan teorema kekonvergenan barisan didapat:

$$\lim_{m\to\infty}\left|\overline{A_{4(m-1)+1}A_{4m+1}}\right| = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(2^{4m+1})^2}}\sqrt{\begin{array}{c}\left((1-16)x_0+x_1+\ (2x_2+2^2x_3+2^3x_4)\right)^2+\\ \left((1-16)y_0+y_1+\ (2y_2+2^2y_3+2^3y_4)\right)^2\end{array}}$$

Dibuktikan $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(2^{4m+1})^2}}$ konvergen berdasarkan Akibat dari teorema kekonvergenan barisan, sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{(2^{4m+1})^2}} = \frac{1}{(2^{4m+1})} = \frac{1}{(2^{4m})}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Sehingga

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2^{4m})} = \lim_{m\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)^4 = 0$$

Didapat nilai $\lim_{m\to\infty}\left|\overline{A_{4(m-1)+1}A_{4m+1}}\right|$ adalah 0, maka rumus tersebut dapat dinyatakan konvergen. Sehingga benar bahwa kumpulan titik yang merupakan hasil dari non-random chaos game dengan titik sudut T_0 sebagai titik acuan akan konvergen di suatu koordinat tertentu. Untuk jarak antar titik hasil bentukan non-random chaos game pada masing-masing titik sudut dilakukan langkah pembuktian yang sama

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa penggunaan aturan *non-random chaos game* dengan memberikan urutan tertentu pada titik sudut sebagai titik acuan yang digunakan pada persegi tidak menunjukkan suatu bentuk fraktal, namun menghasilkan kumpulan titik pada masing-masing titik sudut sebagai titik acuan yang konvergen ke suatu koordinat tertentu. Modifikasi aturan *random chaos game* dengan tidak memilih titik sudut terakhir yang telah dipilih sebagai titik acuan selanjutnya dalam persegi menunjukkan sebuah bentuk fraktal dengan sifat *self-similarity* atau kesamaan diri yang telah diperlihatkan oleh program MATLAB.

Modifikasi aturan *random* dan *non-random chaos game* dengan memanfaatkan keempat titik sudut pada persegi serta aturan pemilihan titik sudut sebagai titik acuan telah dilakukan dengan didapatkan salah satu aturan yang diterapkan menunjukkan bentuk fraktal. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan suatu bentuk fraktal menggunakan *chaos game* pada persegi dengan mengubah jarak antara titik acuan dengan titik awal atau dengan mengubah aturan pemilihan titik sudut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R.L. Devaney, Fractal Patterns and Chaos Game. Boston: Department of Mathematics Boston University, 2003.

[2] H.J Jeffrey, Chaos Game Representation of Gene Structure. USA: Nothern Illinois University, Vol. 18 No. 8, 1990.

[3] B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman and Company, 1983.

[4] K.D. Purnomo, Algoritma Pembangkitan Segitiga Sierpinski dengan L-System. *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember,* 2014.

[5] K.D. Purnomo, R.F. Armana, and Kusno. Kajian Pembentukan Segitiga Sierpinski Pada Masalah *Chaos Game* dengan Memanfatkan Transformasi Affine. *Jurnal Matematika*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Udayana, 2016.

[6] J. Sampurno, and D. F. Irfana, Metode Analisis Fraktal. Yogyakarta: Deepublish, 2016.

[7] F. Yunaning, K.D. Purnomo, and F. Ubaidillah. Aturan *Non-Random Chaos Game* pada Segitiga. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, 2018.