

# Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Bintang dengan Teknik Pewarnaan Titik

Devi Eka W M<sup>2</sup>, Dafik<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>CGANT-University of Jember

<sup>2</sup>Department of Mathematics FMIPA University of Jember  
deviekawm@gmail.com

<sup>3</sup>Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,  
d.dafik@gmail.com

## Abstract

For a graph  $G = (V, E)$ , a bijection  $f$  from  $V(G) \cup E(G)$  into  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  is called  $(a, d)$ -edge-antimagic total labeling of  $G$  if the edge-weights  $w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy)$ ,  $xy \in E(G)$ , form an arithmetic progression starting from  $a$  and having common difference  $d$ . An  $(a, d)$ -edge-antimagic total labeling is called super  $(a, d)$ -edge-antimagic total labeling if  $g(V(G)) = \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ . A vertex coloring is an assignment of labels or colors to each vertex of a graph such that there is no two adjacent vertices have the same colors. We can use vertex coloring technique to label the vertices of a graph such that it has EAV-weight. Furthermore, If we have an EAV-weight of  $S_n$ , we can construct a super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling of Star Graph, either simple or disjoint union of this graph.

**Key Words :** *Star graph, super  $(a, d)$ -edge-antimagic total labeling, vertex coloring, vertex coloring technique.*

## Pendahuluan

Pelabelan graf dari suatu graf  $G$  adalah suatu fungsi satu-satu yang memetakan elemen-elemen dalam graf (baik titik, sisi, maupun titik dan sisi) ke dalam himpunan bilangan (biasanya bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif) yang disebut label. Pelabelan yang diberikan pada himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan yang diberikan pada himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan yang diberikan pada himpunan titik dan sisi disebut pelabelan total (*total labeling*). Lebih jelas lihat [1],[11].

Pada tahun 1963 Sedláček memperkenalkan konsep pelabelan magic (ajaib), kemudian pada tahun 1989 Hartsfield dan Ringel memperkenalkan konsep pelabelan antimagic (Dafik, dalam Deviyana [8]). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi disebut antimagic (anti-ajaib) jika sisi-sisinya dilabeli dengan  $\{1, 2, 3, \dots, q\}$  sedemikian hingga bobot titik-titiknya berbeda. Adapun bobot titik pada suatu titik  $v$  merupakan jumlah label sisi yang bersisian pada titik  $v$ , disimbolkan dengan  $w(v)$  [9],[12].

Pelabelan antimagic pada akhirnya berkembang menjadi pelabelan  $(a, d)$ -antimagic yang diperkenalkan oleh Bodendiek dan Walther, dengan pembatasan

pada bobot titik. Hal ini dikarenakan pada beberapa kasus ditemukan pelabelan antimagic yang berbeda-beda dalam suatu graf. Lebih detail lihat [3],[4],[5]. Adapun yang dimaksud dengan pelabelan  $(a, d)$ -antimagic pada artikel ini adalah pelabelan  $(a, d)$ -sisi antimagic.

Suatu fungsi bijektif  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  pada graf  $G = (V, E)$  disebut sebagai pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic jika bobot sisi-sisinya, yaitu  $w(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), xy \in E(G)$ , membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal  $a$  dan beda  $d$ . Pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $g(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$  [6],[7].

Selanjutnya, konsep pewarnaan titik juga menjadi kajian penting dalam penelitian ini karena digunakan pada saat menggeneralisasi pelabelan EAV. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik yang berada dalam suatu graf sedemikian hingga tidak ada warna yang sama antardua titik yang bertetangga.

Salah satu aplikasi pewarnaan titik yaitu sebagai solusi dalam permainan Sudoku yang berasal dari Jepang, yang merupakan permainan teka-teki angka berbasis logika. Langkah yang dilakukan yaitu dengan mengubah masalah Sudoku ke dalam bentuk graf dimana bilangan-bilangan setiap elemen merupakan titik dan sisi-sisinya merupakan penghubung antartitik yang bertetangga. Setelah itu, dilakukan teknik pewarnaan titik sedemikian hingga titik-titik yang berwarna sama mempunyai nilai bilangan yang sama pula.

Untuk memberikan pewarnaan titik pada graf bintang  $(S_n)$ , beri warna titik-titik pada  $S_n$ , selain titik pusat, dengan  $\Psi$  dan beri warna titik pusat dengan  $\Omega$ . Lihat juga [10]. Terlihat bahwa dengan memberi dua warna yang berbeda, tidak ada warna yang sama antardua titik yang bertetangga. Dengan demikian, bilangan kromatik pada  $S_n$  adalah 2.

## Lemma yang Digunakan

Berikut ini disajikan sebuah lemma yang telah dikembangkan oleh Kunti [2] terkait dengan keberadaan dua himpunan permutasi yang membentuk deret aritmatik. Lemma dibuktikan kembali dikarenakan pembuktiannya akan dipakai dalam temuan pada penelitian ini.

**Lemma 1** [2] *Jika  $\Psi$  adalah himpunan dari bilangan-bilangan yang berurutan, didefinisikan sebagai  $\Psi = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$ , dimana  $k$  genap, maka terdapat permutasi  $\Omega$  pada setiap elemen himpunan  $\Psi$  sedemikian hingga  $\Psi + \Omega$  juga merupakan himpunan bilangan-bilangan berurutan, yaitu  $\Psi + \Omega = \{2c +$*

$$\frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}.$$

**Bukti.** Misalkan  $\Psi$  adalah himpunan bilangan-bilangan berurutan  $\Psi = \{v_i | v_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$  dimana  $k$  genap. Permutasi  $\Omega = \{w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$  didefinisikan sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} & \text{dimana } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ c + i - (\frac{k}{2} + 1) & \text{dimana } \frac{k}{2} + 1 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

Dengan demikian,  $\Psi + \Omega = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$ . Substitusikan nilai  $i$ , diperoleh  $\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}$  dengan bobot sisi terkecil pada saat  $i = \frac{k}{2} + 1$  dan bobot sisi terbesar pada saat  $i = \frac{k}{2}$  sehingga terbukti bahwa  $\Psi + \Omega$  membentuk barisan dengan beda 1.  $\square$

### Hasil Penelitian

Graf Bintang, dinotasikan dengan  $S_n$ , adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat  $n - 1$  yang disebut pusat dan  $n - 1$  titik berderajat satu yang bertetangga dengan titik pusat. Himpunan titik dan sisi pada  $S_n$  didefinisikan sebagai  $V(S_n) = \{x\} \cup \{x_j, 1 \leq j \leq n\}$  dan  $E(S_n) = \{xx_j, 1 \leq j \leq n\}$  sehingga jumlah titik dan sisi pada  $S_n$  yaitu  $|V(S_n)| = n$  dan  $|E(S_n)| = n - 1$ . Gabungan saling lepas dari Graf Bintang, dinotasikan dengan  $(k + 1)S_n$ , adalah gabungan  $S_n$  sebanyak  $k + 1$  copy dimana himpunan titik dan sisinya didefinisikan sebagai  $V((k + 1)S_n) = \{x^i, 1 \leq i \leq k + 1\} \cup \{x_j^i, 1 \leq j \leq n - 1, 1 \leq i \leq k + 1\}$  dan  $E((k + 1)S_n) = \{x^i x_j, 1 \leq j \leq n - 1, 1 \leq i \leq k + 1\}$ . Dengan demikian, jumlah titik dan sisi pada  $(k + 1)S_n$  yaitu  $|V((k + 1)S_n)| = (k + 1)(n + 1)$  dan  $|E((k + 1)S_n)| = (k + 1)n$ . Dari hasil penelitian ini ditemukan bahwa Graf Bintang merupakan graf EAVL, sebagaimana teorema berikut.

$\diamond$  **Teorema 1** *Ada pelabelan  $(3, 1)$ -EAV pada graf bintang  $S_n, n \geq 3$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf bintang dengan  $\alpha_1$  sebagai berikut:

$$\alpha_1(x) = 1,$$

$$\alpha_1(x_j) = j + 1.$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa  $\alpha_1$  merupakan fungsi bijektif  $\alpha_1 : V(S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, (n + 1)\}$ . Misal  $w_{\alpha_1}$  merupakan bobot sisi dari  $\alpha_1$  maka  $w_{\alpha_1}$  dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$w_{\alpha_1}(xx_j) = j + 2,$$

Dapat dilihat bahwa himpunan  $w_{\alpha_1}$  merupakan himpunan bilangan berurutan yang membentuk barisan aritmatika dengan beda 1, dengan bilangan terkecil yaitu 3. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa  $S_n$  mempunyai pelabelan  $(3, 1)$ -EAV.  $\square$

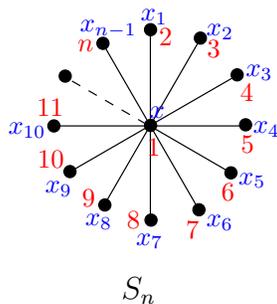


Figure 1: Pelabelan EAV pada  $S_n$

$\diamond$  **Teorema 2** Ada pelabelan  $(\frac{3(k+2)}{2}, 1)$ -EAV pada graf bintang  $(k + 1)S_n, n \geq 3, k$  genap.

**Bukti.** Definisikan  $\alpha_2$  sebagai pelabelan pada  $(k + 1)S_n$ . Definisikan pelabelan  $\alpha_2 : V((k + 1)S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, (k + 1)(n + 1)\}$  sehingga label titik  $\alpha_2$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\alpha_2(x^i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2} & , \text{ untuk } i \text{ ganjil,} \\ \frac{k+i+2}{2} & , \text{ untuk } i \text{ genap,} \end{cases}$$

dimana  $1 \leq i \leq (k + 1), k$  genap.

$$\alpha_2(x_j^i) = \begin{cases} \frac{(2(j-1)+3)(k+1)+i}{2} & , \text{ untuk } i \text{ ganjil,} \\ \frac{2j(k+1)+i}{2} & , \text{ untuk } i \text{ genap,} \end{cases}$$

dimana  $1 \leq i \leq (k + 1), 1 \leq j \leq n, k$  genap.

Bobot sisi (EAV) pada  $(k + 1)S_n$  dengan rumus sebagai berikut:

$$w_{\alpha_2}(x^i x_j^i) = \frac{(2j + 1)(k + 1) + 2i + 1}{2}$$

$$w_{\alpha_2}(x^i x_j^i) = \frac{(2(w_{\alpha_1}(xx_j)) - 1)(k + 1) + 2i + 1}{2},$$

$\square$

Dari Teorema 1 dan 2 dapat dilihat hubungan antara EAVL graf bintang konektif dan diskonektifnya. Ternyata penelitian menunjukkan bahwa ada kaitan antara konektif dan diskonektif. Oleh karenanya penelitian ini dikembangkan untuk menggeneralisasi semua graph tree.

◇ **Teorema 3** *Jika terdapat pelabelan  $(a, 1)$ -EAV pada graf tree maka gabungan saling lepas graf tree,  $\bigcup_{i=1}^{k+1} G$  dimana  $k$  genap juga akan membentuk pelabelan  $(b, 1)$ -EAV.*

**Bukti.** Lakukan pewarnaan titik pada graf bintang  $(S_n)$ . Beri warna titik-titik pada  $S_n$ , selain titik pusat, dengan  $\Psi$  dan beri warna titik pusat dengan  $\Omega$ . Dengan menggunakan Lemma 1, misal  $c = 1$  dan definisikan  $\alpha_{3i}$  sebagai fungsi pelabelan titik untuk  $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_n$  dengan rumus  $\alpha_{3i}(y) = \Gamma + [f(y) - 1](k + 1)$ , dimana  $\Gamma$  adalah label warna titik pada  $V(S_n)$ , dan  $f_i(y)$  adalah label titik pada copy ke- $i$  pada  $S_n$ . Berdasarkan Lemma 1, dapat dilihat bahwa pelabelan titik  $f_i(y)$  merupakan fungsi bijektif. Bobot sisi (EAV) pada  $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_n$  dengan fungsi  $f_i(y)$  merupakan himpunan  $\{\Omega + [f_i(x) - 1](k + 1) + \Psi + [f_i(x_j) - 1](k + 1) \mid u, v \in V(\bigcup_{i=1}^{k+1} S_n)\}$ , dimana  $(f_i(x) + f_i(x_j))$ . Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang ada, dapat dilihat bahwa  $\bigcup_{i=1}^{k+1} S_n$  memiliki pelabelan  $(\frac{k+4}{2} + (a - 2)(k + 1), 1)$ -EAV. □

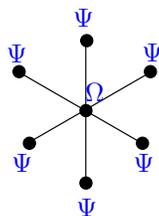


Figure 2: Pewarnaan titik pada  $S_n$

Dengan menggunakan lemma dalam M. Bača, et al.: *Utilitas Math.*, **60** (2001), 229–239, dan lemma dalam Dafik, et al.: *Saintifika* **14** (2012), 106–118, dapat dibuktikan akibat berikut:

◇ **Akibat 1** *Jika  $k + 1$  adalah ganjil, graf  $(k + 1)G$  akan memiliki super  $(a, d)$ -SEATL, untuk  $G$  adalah graf tree dan EAVL.*

## Kesimpulan

Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf *tree* dapat diperoleh menggunakan teknik pewarnaan titik. Dengan menggunakan teknik ini, jika graf tunggal sudah dapat ditemukan bobot EAV-nya maka untuk gabungan saling lepas graf *tree* juga dapat ditemukan bobot EAV dan SEATL-nya. Namun demikian gabungan saling lepas tersebut hanya berlaku apabila  $k + 1$  adalah ganjil, sehingga diajukan masalah terbuka berikut.

**Masalah Terbuka 1** *Jika  $k + 1$  adalah genap, tentukan apakah graf  $(k + 1)G$  memiliki super  $(a, d)$ -SEATL, khusus untuk  $G$  adalah graf tree dan EAVL.*

Penelitian untuk memecahkan masalah terbuka ini sangat penting karena apabila ini terpecahkan maka akan terbuka untuk graf  $G$  selain tree.

## Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang turut membantu selama proses penelitian.

## References

- [1] Bača, Martin, dkk., *On super  $(a, 1)$ -edge-antimagic total labelings of regular graphs*, to appear.
- [2] Dafik, Antimagic total labeling of disjoint union of disconnected Graphs. *CSS*, (2013).
- [3] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete  $s$ -partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.
- [4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.
- [5] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of  $mK_{n,n,n}$ , *Ars Combinatoria* , **101** (2011), 97-107.
- [6] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete  $s$ -partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

- [7] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.
- [8] Deviyana, Riza, *Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $E$* . Tidak Dipublikasikan (Skripsi), 2011.
- [9] Hussain, M., dkk., *On Super Antimagic Total Labeling of Harary Graph*, to appear.
- [10] Irawati, Dina, *Pelabelan total sisi ajaib pada graf bintang*. Jurnal Matematika UNAND Vol. 2 No. 1, 85-89.
- [11] J.A.Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*. The electronic journal of combinatorics 18, 2011.
- [12] Sugeng K.A., *Magic and antimagic labeling of graphs*. Tidak Dipublikasikan (Thesis), 2005.