

Penerapan Metode *Meshless Local Petrov Galerkin* untuk Simulasi Profil Aliran Limbah di Sungai

(*Application of Meshless Local Petrov Galerkin Method for Profile Simulation of Waste Flow in River*)

Maya Ayu P.¹, Rusli Hidayat², Kusbudiono³

^{1,2,3} Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Jember

E-mail: rusli_mat@yahoo.ac.id

Abstrak

Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) merupakan metode tanpa pias. Tujuan utama dari metode ini adalah untuk menghilangkan *mesh/grid* atau untuk mengurangi kesulitan dalam membuat grid dengan menggunakan titik sebagai penggantinya. Keunggulan dari metode ini adalah dalam proses diskritisasi daerah penyelesaian (domain). Pada metode-metode numerik yang telah ada, untuk melakukan interpolasi ataupun penghitungan integral, dibutuhkan grid pada domain yang akan diselesaikan. Sehingga untuk domain yang bentuknya kompleks, diskontinu atau mempunyai *boundary* (batas domain) yang bergerak merupakan permasalahan yang sulit diselesaikan. Persamaan dispersi yang dikembangkan oleh G.I Taylor merupakan model yang dapat digunakan untuk menghitung konsentrasi limbah yang diangkut oleh aliran air sungai. Konsentrasi limbah yang diteliti pada penelitian ini hanya pada panjang sungai. Sehingga persamaan dispersi yang digunakan adalah persamaan dispersi satu dimensi. Hasil simulasi yang diperoleh adalah konsentrasi limbah di titik terdekat sumber lebih tinggi dari konsentrasi limbah yang jauh dari sumber. Semakin menjauhi titik sumber, nilainya semakin kecil, tetapi seiring dengan berjalannya waktu, konsentrasi limbah di sepanjang titik terus meningkat. Kecepatan sungai memiliki pengaruh untuk memperkecil nilai konsentrasi limbah. Semakin cepat aliran sungai, konsentrasi limbah di setiap titik akan semakin kecil daripada sungai yang memiliki kecepatan aliran rendah. Selanjutnya, laju transportasi limbah berbanding lurus dengan besar kecilnya konsentrasi limbah dalam sungai. Nilai laju transportasi limbah yang tinggi menyebabkan nilai konsentrasi limbah di sungai juga tinggi.

Kata Kunci: *Meshless Local Petrov Galerkin*, Persamaan Dispersi.

Abstract

Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) is a method without mesh. The main purpose of this method is to remove the mesh or to reduce the difficulty in making the grid by using the point. The advantage of this method is in the process of discretization settlement areas (domains). In the numerical methods that available, to interpolate or to calculate the integral, required mesh on the domain to be solved. For a complex and discontinuous domain such as a domain that have moving boundaries will be difficult to be solved. Dispersion equation developed by GI Taylor is a model that can be used to

calculate the concentration of waste being transported by the water flow of the river. Effluent concentration observed in this study only on the length of the river. So the dispersion equation used is one-dimensional dispersion equation. The simulation results obtained the concentration of the waste at the point nearest the source is higher than the concentration of the waste away from the source. Further away from the point source, the smaller the value, but over time, the concentration of waste continues to rise at the point. The speed of the river has the effect to decrease the concentration of waste. The faster the flow, the concentration of waste in each point will be smaller than a river that has a low flow rate. Furthermore, the rate of transport of waste is directly proportional to the size of waste concentration in the river. Value of the rate of transport of waste which leads to high concentration of waste in the value stream is also high.

Keywords: *Meshless Local Petrov galerkin, Dispersion models.*

1 Pendahuluan

Pencemaran sungai disebabkan oleh limbah industri, limbah rumah tangga, limbah peternakan, bahan kimia dan unsur hara yang terdapat dalam air serta gangguan kimia dan fisika. Air limbah rumah tangga merupakan sumber yang banyak ditemukan di lingkungan. Salah satu komponennya yang dapat berdampak buruk bagi lingkungan berasal dari deterjen karena manusia pasti menggunakan deterjen setiap harinya sebagai bahan pembersih di rumah tangga.

Taylor [1] menganalisis proses dispersi aliran geser sehingga menghasilkan sebuah model matematika yang dapat digunakan untuk menghitung limbah yang terangkut dalam aliran air. Penelitian sebelumnya, Luknanto [2] menggunakan model dispersi aliran geser ini menggunakan metode Beda Hingga skema Holly-Preissmann. Metode yang digunakan dalam penelitian tersebut masih menggunakan *mesh*/pias dalam perhitungannya. Metode penyelesaian numerik lain dengan *mesh* yang umum digunakan adalah metode elemen hingga.

Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) merupakan metode tanpa piast. Tujuan utama dari metode ini adalah untuk menghilangkan *mesh* atau untuk mengurangi kesulitan dalam membuat *grid* dengan menggunakan titik sebagai penggantinya (Atlury dan Lin, 2001). Beberapa metode *meshless* yang telah dikembangkan antara lain *Elemen Free Galerkin* (EFG), *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM), *the Partition of Unity Finite Elemen Method* (PUFEM), *Natural Elemen Method* (NEM), *Meshless Galerkin* yang menggunakan *Radial Basis Function* (RBF), dan lain lain. Metode MLPG lebih banyak disukai karena merupakan metode tanpa *mesh* yang lebih mudah daripada metode-metode lain [3].

Saidin [4] menjelaskan keunggulan dari metode ini adalah dalam proses diskritisasi daerah penyelesaian (domain). Pada metode-metode numerik yang telah ada, untuk melakukan interpolasi ataupun penghitungan integral, dibutuhkan *mesh* (piast) pada domain yang akan diselesaikan. Sehingga untuk domain yang bentuknya kompleks, diskontinu atau mempunyai *boundary* (batas domain) yang bergerak merupakan permasalahan yang sulit diselesaikan.

Permasalahan yang akan dibahas dalam makalah ini adalah bagaimana aplikasi metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* pada model limbah yang terangkut dalam aliran sungai serta bagaimana simulasi penyebaran konsentrasi BOD pada sungai.

Tujuan dari makalah ini adalah untuk mengaplikasikan metode MLPG pada model dispersi dan untuk mengetahui profil konsentrasi BOD dalam sungai.

2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini diantaranya yaitu Langkah yang pertama adalah melakukan kajian pustaka mengenai model persamaan dispersi oleh G.I Taylor kemudian diselesaikan dengan MLPG. Langkah selanjutnya adalah membuat program yang kemudian melakukan simulasi program dengan memvariasikan nilai parameter. Berikut ini merupakan nilai parameter yang digunakan dalam proses simulasi, dimana parameter tersebut dapat mempengaruhi profil dari dinamika aliran limbah. Beberapa parameter tersebut adalah kedalaman (hi), kecepatan (ui), konsentrasi (bo), debit (Q), lama simulasi yang dibutuhkan (T), selang waktu untuk iterasi (dt). Parameter yang nilainya telah ditentukan terdiri dari faktor friksi Darcy-Weisbach untuk aliran laminar sebesar 0,02 satuan. Panjang sungai yang diamati sepanjang 5 meter dengan jumlah titik sepanjang simulasi adalah 100 titik.

3 Hasil Penelitian

Persamaan dispersi yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + R = 0$$

Untuk menerapkan metode *Meshless Local Petrov Galerkin*, persamaan mula-mula diubah ke dalam bentuk *local weak* dan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dx + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} dx - K \left. \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right|_{x_{sl}}^{x_{sr}} + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} R dx = 0$$

Nilai \bar{C} pada persamaan *local weak* didekati dengan *Moving Least Square* (MLS) sebagai berikut:

$$\bar{C}(x, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x) \hat{C}_j(t)$$

Dengan I_{sl} adalah indeks terkecil dan I_{sr} adalah indeks terbesar dari titik-titik diskrit yang berada di dalam sub domain $[x_{sl}, x_{sr}]$ sehingga :

$$\phi_j(x) = \sum_{i=p_i(x)}^n (A_1^{-1}(x) B_1(x))_{i,j}$$

turunan terhadap waktu fungsi MLS ini adalah :

$$\bar{C}(x, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x) \hat{C}_j'(t)$$

Dengan mensubstitusikan MLS pada persamaan dispersi dalam bentuk *local weak* yang ada, maka diperoleh persamaan:

$$\int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \left(\sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x) \hat{C}_j'(t) \right) dx + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} U \left(\sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x) \hat{C}_j(t) \right) dx - K \left(\sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x) \hat{C}_j(t) \right) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} R dx = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{N_{sp}} \bar{c}_j(t) K_j + \sum_{j=1}^{N_{sp}} \bar{c}_j(t) V_j + f = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, yaitu :

$$G_j \bar{c}_j + V_j \bar{c}_j + f = 0$$

Selanjutnya persamaan di atas didiskritisasi terhadap waktu menggunakan Deret Taylor, sehingga diperoleh:

$$G \bar{c}^{(t+\Delta t)} + (\Delta t V - G) \bar{c}^{(t)} + \Delta t f = 0$$

Dengan mengumpulkan setiap komponen dalam waktu t ke ruas kanan, diperoleh persamaan linier yang terdiskritisasi terhadap waktu t , yaitu :

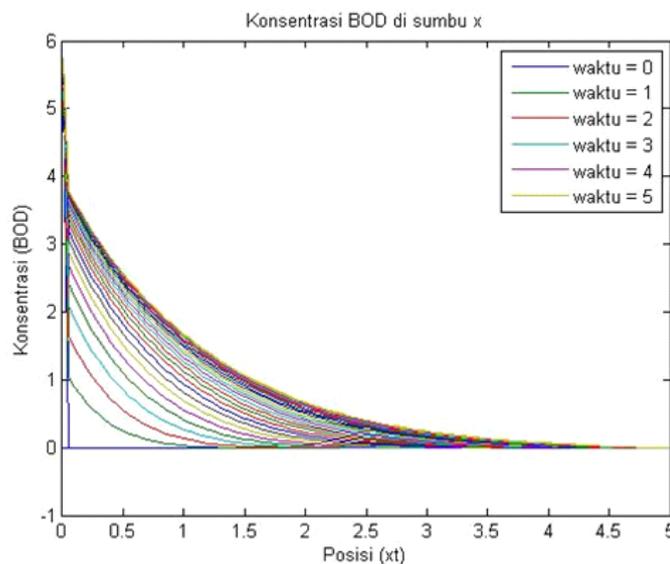
$$\bar{c}^{(t+\Delta t)} = G^{-1} ((G - \Delta t V) \bar{c}^{(t)} - \Delta t f)$$

Setelah diselesaikan dengan metode *Meshless Local* Petrov Galerkin, masukkan nilai awal dari parameter yang digunakan yaitu

Simulasi 1

- kedalaman sungai (h_i) = 2
- kecepatan aliran sungai (u_i) = 0,3
- konsentrasi BOD (b_0) = 6
- waktu (T) = 5
- delta t (dt) = 0,2
- debit sungai (Q) = 0,36

Berikut ini merupakan tampilan profil simulasi aliran limbah pada umumnya ditunjukkan oleh Gambar 1.



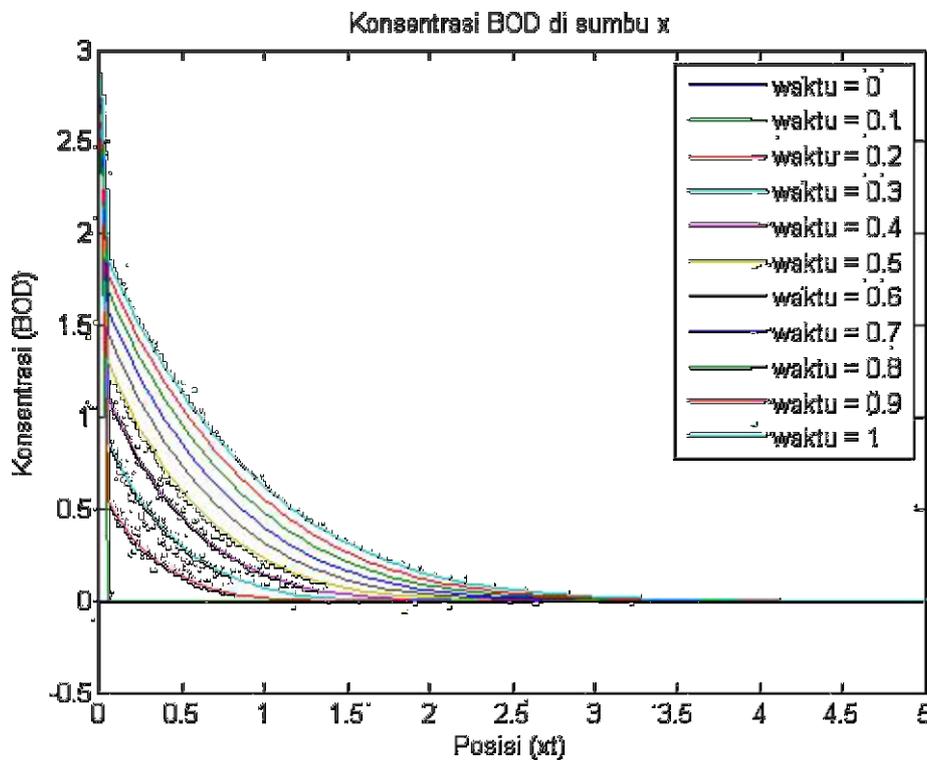
Gambar 1. Profil Konsentrasi BOD di sungai sepanjang x

Pada Gambar 1 terlihat Nilai konsentrasi BOD dalam sungai di titik yang semula nol pada t_0 berubah menjadi 0,240649628837322 ppm pada saat $t_{0,4}$ dan meningkat menjadi 1,937811381753990 ppm saat t_2 . Hingga pada saat waktu mencapai 5 detik, terjadi penumpukan limbah di titik yang sama hingga menyebabkan konsentrasi BOD dalam air sungai di titik tersebut meningkat menjadi 2,571050457158386 ppm.

Besarnya nilai konsentrasi BOD dalam sungai menunjukkan bahwa limbah yang mencemari sungai tersebut juga besar.

Simulasi 2

Selanjutnya, akan dilihat dinamika tingkat pencemaran pada sungai dengan nilai konsentrasi yang lebih rendah dan waktu yang lebih singkat. Nilai parameter yang digunakan pada profil konsentrasi BOD seperti ditunjukkan gambar 2 adalah sama dengan simulasi pada gambar 1. Perbedaan ada pada nilai konsentrasi yang sebesar 3 dan waktu simulasi hanya 1 detik dengan delta t sebesar 0,1.

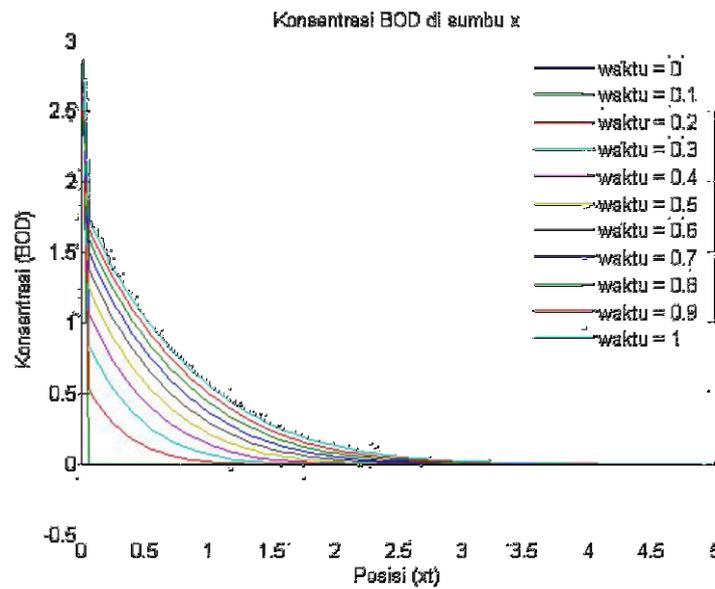


Gambar 2 Profil Konsentrasi BOD di sungai sepanjang x

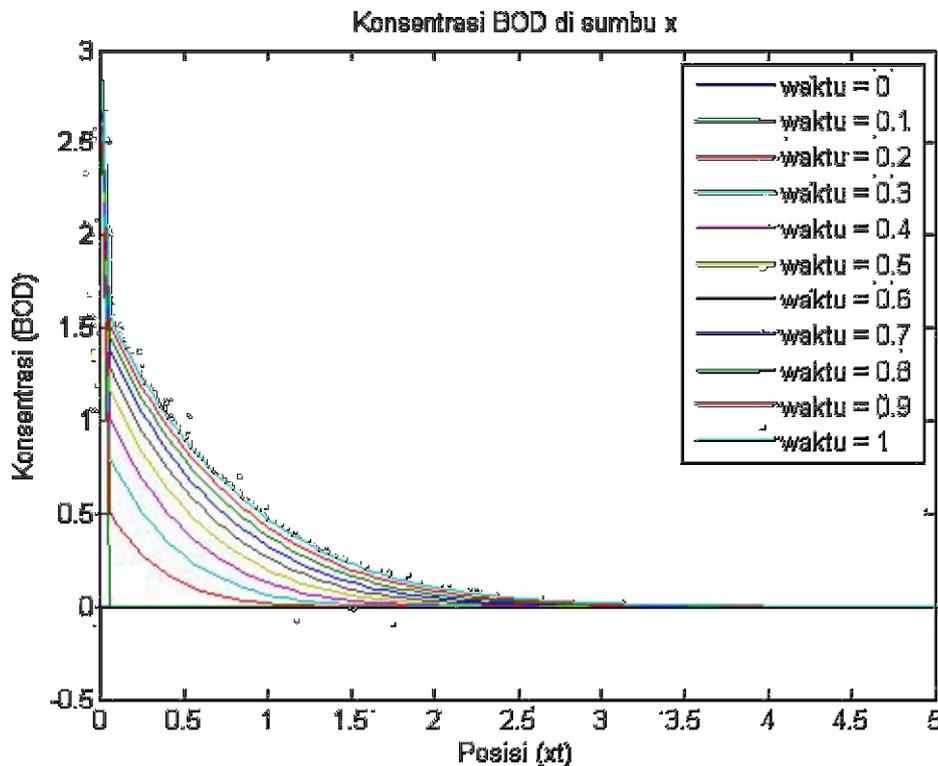
Dinamika yang terlihat pada gambar hasil simulasi 2 tidak jauh berbeda dengan dinamika simulasi 1. Pada gambar 4.2 dapat dilihat sungai tercemar limbah yang memiliki konsentrasi BOD = 3 , nilai konsentrasi BOD pada $t = 0,1$ detik di titik $x = 1$ m meningkat menjadi 0,014349899125272 ppm, pada waktu $t = 0,5$ detik nilainya meningkat menjadi 0,227396315391253 ppm dan meningkat lagi menjadi 0,620718095404386 ppm pada saat $t = 1$ detik di titik yang sama. Konsentrasi BOD di dalam sungai yang meningkat setiap waktu, menyatakan bahwa limbah yang mencemari sungai semakin banyak. Tetapi, nilai konsentrasi BOD terus menurun seiring dengan panjang sungai hingga mencapai mendekati nol. Artinya, semakin jauh jarak yang ditempuh limbah, nilai konsentrasinya akan semakin kecil.

Simulasi 3

Untuk mengetahui pengaruh kecepatan aliran sungai dalam mengangkut limbah, diberikan nilai masukan yang sama seperti simulasi 2 tetapi nilai kecepatan sungai berbeda.



Gambar 3(a) Profil Konsentrasi BOD dengan kecepatan 0,5 m/s

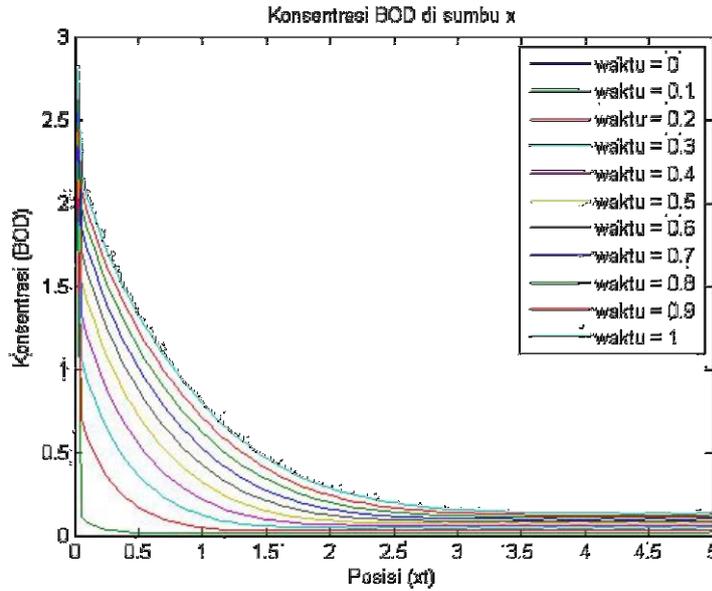


Gambar 3(b) Profil Konsentrasi BOD dengan kecepatan 0,8 m/s

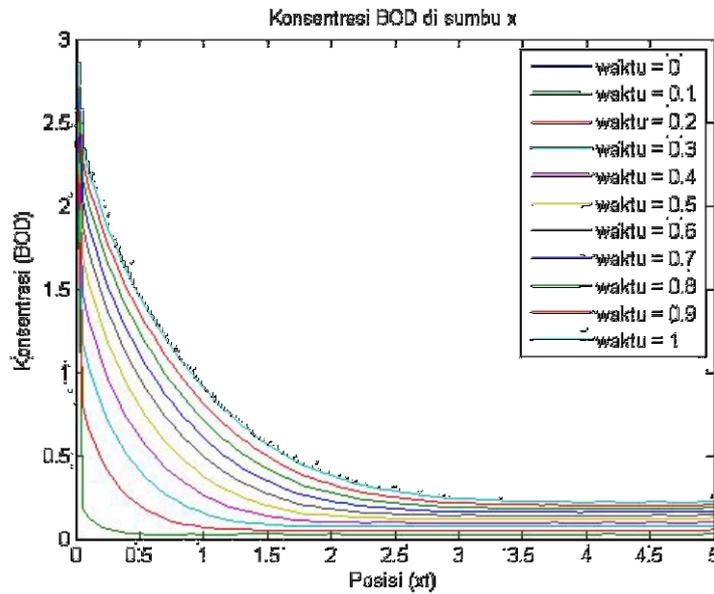
Pada simulasi 3 (a), diberikan masukan untuk kecepatan aliran sungai sebesar 0,5 m/s . Pada simulasi 3 (b), diberikan masukan untuk kecepatan aliran sungai sebesar 0,8 m/s. Dinamika nilai konsentrasi BOD pada simulasi 3 tidak jauh berbeda dengan dinamika nilai konsentrasi BOD yang dihasilkan oleh simulasi sebelumnya. Nilai konsentrasi BOD terus meningkat seiring bertambahnya waktu dan semakin jauh dari titik sumber nilainya semakin turun.

Simulasi 4

Pada simulasi 1 dan 2, nilai untuk laju transportasi limbah nol. Selama waktu nol sampai 1, tidak ada laju penambahan limbah yang masuk ke dalam sungai. Simulasi berikut ini diasumsikan limbah terus menerus dimasukkan ke dalam sungai selama waktu 1 detik.



Gambar 4(a) Profil Konsentrasi BOD dengan $S=0,3$ mgr/s

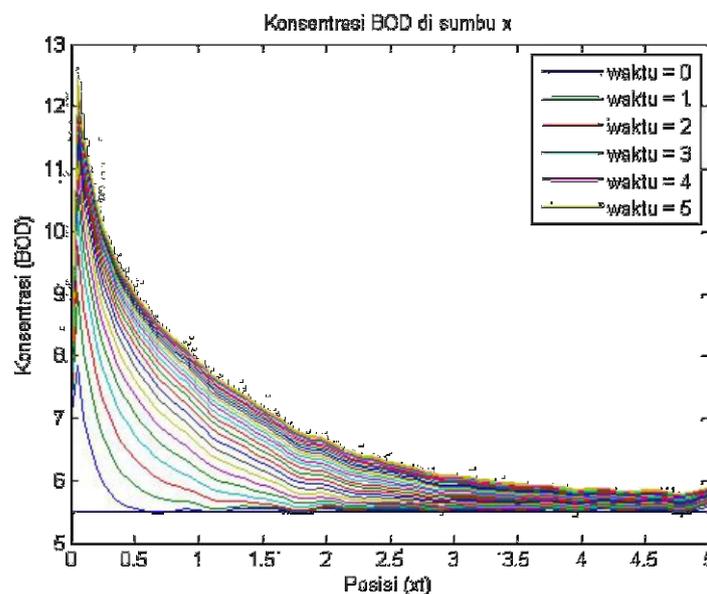


Gambar 4(b) Profil Konsentrasi BOD dengan $S=0,5$ mgr/s

Pembuangan limbah yang dilakukan terus menerus selama waktu t dengan kecepatan tinggi menghasilkan nilai konsentrasi BOD yang lebih tinggi daripada limbah yang memiliki kecepatan rendah. Dari tabel 4.3 dapat dilihat nilai konsentrasi BOD untuk nilai $S = 0,5$ mgr/s lebih tinggi daripada $S = 0,3$ mgr/s . Hasil akhir nilai konsentrasi yang diperoleh pada titik $x = 5$ m untuk $S = 0,3$ mgr/s adalah $0,134834003643562$ ppm, dan $S = 0,5$ mgr/s adalah $0,224870340609767$ ppm.

Simulasi 5

Pada simulasi berikut ini, konsentrasi awal sungai adalah sebesar 5,5 . Kemudian sungai dicemari limbah cair yang memiliki konsentrasi 7 ppm selama 5 detik dan tidak ada pencemaran lagi untuk waktu selanjutnya. Kecepatan limbah yang masuk ke dalam badan sungai sebesar 3 mgr/s.



Gambar 5 Profil Konsentrasi BOD dengan Nilai Awal BOD Sungai 5,5 ppm.

Nilai awal konsentrasi BOD pada sungai sepanjang x adalah 5,5 . Setelah limbah cair masuk selama 5 detik, nilai konsentrasi BOD di semua titik mencapai di atas 5,5 . Ketika nilai konsentrasi berada di atas 5,5 , ketidakstabilan nilai konsentrasi BOD terlihat jelas. Sebenarnya pada simulasi-simulasi sebelumnya nilai konsentrasi juga tidak stabil mengecil ketika menjauhi sumber limbah, tapi karena selisih ketidakstabilan yang sangat kecil, maka konsentrasi dianggap konstan mengecil.

4 Pembahasan

Pada Gambar 1 dapat dijelaskan mengenai simulasi model aliran limbah di sungai pada umumnya menggunakan metode *Meshless Local* Petrov Galerkin tanpa adanya variasi kecepatan sungai dan laju transportasi limbah. Garis berwarna-warni pada gambar menunjukkan waktu simulasi. Seiring berjalannya waktu, grafik yang terbentuk semakin menunjukkan angka konsentrasi yang tinggi di titik sumber. Nilai konsentrasi BOD dalam sungai di titik t_0 yang semula nol pada berubah menjadi 0,240649628837322 ppm pada saat $t_{0,4}$ dan meningkat menjadi 1,937811381753990 ppm saat t_2 . Hingga pada saat waktu mencapai 5 detik, terjadi penumpukan limbah di titik yang sama hingga menyebabkan konsentrasi BOD dalam air sungai di titik tersebut meningkat menjadi 2,571050457158386 ppm. Besarnya nilai konsentrasi BOD dalam sungai menunjukkan bahwa limbah yang mencemari sungai tersebut juga besar.

Pada saat limbah masuk ke dalam sungai, konsentrasi BOD dalam sungai langsung meningkat walaupun terdapat kecepatan air sungai yang membawa limbah menjauhi titik sumber, tetapi kecepatan limbah yang masuk ke dalam sungai membuat limbah menumpuk pada satu titik sebelum limbah tersebut sempat terseret oleh aliran sungai. Sehingga mengakibatkan konsentrasi BOD dalam air sungai di sekitar titik sumber masuk limbah semakin lama semakin tinggi seiring waktu yang dibutuhkan.

Pada titik yang berbeda dalam waktu yang sama, nilai konsentrasi BOD berbeda. Di titik yang dekat dengan sumber, nilai konsentrasi BOD lebih tinggi daripada di titik yang jauh dari sumber. Hal ini dikarenakan ketika limbah masuk, kecepatan limbah akan tercampur dengan air sungai, sehingga limbah menjadi encer dan konsentrasinya berkurang. Adanya kecepatan aliran air sungai yang membawa limbah terlarut ke dalam air dan bergerak menjauhi titik sumber mengakibatkan angka konsentrasi BOD di titik yang jauh dari sumber semakin kecil.

Gambar 2 menampilkan profil konsentrasi BOD dengan nilai yang lebih rendah. Hasil simulasi yang didapatkan sama dengan hasil yang diperoleh di simulasi 1. Hanya saja nilainya yang lebih sedikit.

Simulasi 3 menampilkan variasi nilai kecepatan aliran sungai. Pada gambar 3(a) nilai kecepatan sungai sebesar 0,5 m/s sedangkan gambar 3(b) kecepatan sungai sebesar 0,8 m/s. Dari gambar yang dihasilkan dapat diketahui bahwa konsentrasi BOD pada sungai yang memiliki kecepatan aliran sebesar 0,5 m/s lebih tinggi daripada konsentrasi BOD dalam sungai berkecepatan 0,8 m/s. Artinya besar kecilnya kecepatan sungai berbanding terbalik dengan nilai konsentrasi.

Simulasi selanjutnya adalah variasi nilai kecepatan laju transportasi limbah. Gambar 4(a) menunjukkan kecepatan limbah yang masuk ke dalam badan sungai sebesar 0,3 mgr/s dan laju transportasi limbah pada gambar 4(b) adalah 0,5 mgr/s. Hasilnya, konsentrasi limbah yang memiliki laju sebesar 0,3 mgr/s lebih kecil dari konsentrasi limbah dengan laju 0,5 mgr/s. Semakin cepat lajunya, konsentrasi BOD akan semakin tinggi dan sebaliknya.

Pada gambar 5, terlihat jelas profil nilai konsentrasi BOD naik turun seperti. Pada titik X_1 ketika $t = 5$ detik, konsentrasi meningkat hingga mencapai 12,463245963842711 ppm, di titik $x = 1$ m nilai konsentrasi BOD sebesar 8,205183075258580 ppm, sedangkan pada titik $x = 2$ m, nilai konsentrasi BOD hampir setengah kali nilai konsentrasi saat di titik X_1 yaitu sebesar 6,924843279666956 ppm. Saat mencapai titik X_{80} , konsentrasi BOD sebesar 6,103918311021144 ppm, kemudian pada titik X_{81} nilainya meningkat menjadi 6,109829210495155 ppm. Hingga pada titik X_{84} nilai BOD meningkat lagi mencapai 6,135827421969974 ppm, kemudian pada titik X_{85} nilainya turun lagi menjadi 6,129457486232710 ppm. Selanjutnya nilai konsentrasi BOD terus menurun hingga di titik X_{97} nilainya mencapai 6,038824104333380 ppm dan kemudian naik di titik X_{98} menjadi 6,056635954822816 ppm. Nilai konsentrasi terjadi peningkatan hingga pada $x = 5$ m. Pada titik ini, konsentrasi mencapai angka sebesar 6,148471586351864 ppm. Hingga pada detik terakhir simulasi, konsentrasi BOD selalu berada di atas 5,5 ppm dan tidak pernah mencapai nol.

5 Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

- a. Profil dinamika pengangkutan limbah oleh air sungai secara umum konsentrasinya terus mengalami kenaikan setiap waktu. Pada simulasi 1 nilai konsentrasi BOD dalam sungai di titik $x = 1$ m yang semula nol pada berubah menjadi 0,240649628837322 ppm pada saat dan meningkat menjadi 1,937811381753990 ppm saat . Hingga pada saat waktu mencapai 5 detik, terjadi penumpukan limbah di titik yang sama hingga menyebabkan konsentrasi BOD dalam air sungai di titik tersebut meningkat menjadi 2,571050457158386 .
- b. Nilai konsentrasi BOD di tempat yang dekat dengan sumber pembuangan berbeda dengan tempat yang jauh dengan sumber pembuangan walaupun tempat tersebut dilalui oleh limbah. Semakin menjauhi titik sumber, nilai konsentrasi BOD-nya semakin kecil. Terbukti pada simulasi 2, pada saat konsentrasi mencapai waktu 1 detik di titik nilai BOD sebesar 0,620718095404386 sedangkan di titik nilai konsentrasi BOD adalah 0,000220501860797 . Sehingga semakin jauh jarak yang ditempuh limbah, konsentrasinya akan semakin kecil.
- c. Kecepatan aliran sungai memberikan pengaruh yang signifikan terhadap nilai konsentrasi BOD. Pada simulasi 2, nilai konsentrasi BOD pada sungai yang memiliki kecepatan aliran tinggi lebih kecil daripada nilai konsentrasi pada sungai yang memiliki kecepatan aliran rendah. Sehingga dapat disimpulkan jika kecepatan sungai berbanding terbalik dengan besar konsentrasi BOD. Semakin besar kecepatan sungai, nilai konsentrasi BOD akan semakin kecil dan sebaliknya.
- d. Laju transportasi limbah juga memberikan pengaruh yang signifikan terhadap nilai konsentrasi BOD. Pada simulasi 3, nilai laju transportasi limbah yang tinggi menghasilkan nilai konsentrasi BOD yang lebih tinggi daripada nilai laju transportasi limbah yang rendah. Artinya, laju transportasi limbah berbanding lurus dengan besarnya nilai konsentrasi BOD dan sebaliknya.
- e. Kecepatan limbah ketika memasuki sungai memberikan pengaruh yang lebih besar dalam menaikkan konsentrasi BOD daripada kecepatan aliran sungai. Hal ini dapat dilihat pada simulasi 3 dan 4. Tabel konsentrasi limbah pada simulasi 4 menunjukkan tingkat pencemaran yang lebih tinggi daripada tabel pada simulasi 3.

Daftar Pustaka

- [1] Taylor, G.I. 1953. Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube. *Proceedings The Royal of Society*. **219**(1137): 186-203.
- [2] Luknanto, D. 1992. *Angkutan Limbah*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- [3] Atluri, S. N. & Lin, H. 2000. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Convection-Diffusion Problems. *CMES*. **1**(2): 45-60.
- [4] Saidin, M. 2010. "Profil Sedimentasi pada Sungai Model Shazy Shabayek". Tidak diterbitkan. Skripsi. Surabaya: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember.